

Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. I. Флуктуации поля

А. С. Брюховецкий

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: ire@ire.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 21 июня 2007 г.

Получено выражение для флуктуационного поля, рассеянного статистически шероховатой плоскостью, в виде главного члена асимптотического разложения по большому параметру, определяющему волновую зону относительно точки источника и точки наблюдения.

Асимптотика равномерна по отношению к высотам этих точек над рассеивающей поверхностью и может служить отправным пунктом при определении энергетических характеристик флуктуационного поля в ближней зоне поверхности.

Введение

Теоретические исследования по рассеянию волн малыми случайными неровностями поверхности раздела проводятся уже более полувека, однако результаты исследований по рассеянию в ближней зоне малочисленны и не обладают достаточной общностью. Во многих работах по радиолокации взволнованной морской поверхности используется удельное сечение рассеяния, полученное Барриком [1] для малой рассеивающей площадки, в пределах которой можно пренебречь кривизной фазового фронта сферической волны. Неадекватность такой модели для площадки, формируемой диаграммой направленности локатора, очевидна: в дальней зоне локатора значение френелевского параметра для апертуры антенны $(ka^2/R) \ll 1$ (a – размер апертуры антенны; $k = 2\pi/\lambda$, где λ – длина волны; R – дистанция), угловой размер диаграммы направленности $\sim \lambda/a$, а поперечный размер $L \sim R\lambda/a$. Величина соответствующего параметра Френеля рассеивающей площадки $(kL^2/R) \sim 4\pi^2 (ka^2/R)^{-1} \gg 1$ означает необходимость учета кривизны фазового фронта в ее пределах.

Содержащаяся в монографии [2] (§ 10) модель рассеяния также ограничена по ряду причин:

- а) расчет проводится для мягкой и жесткой поверхности;
- б) остается под вопросом применимость результатов расчета к описанию рассеяния реальной поверхностью;
- в) введение “зоны разделения спектров” для непериодической поверхности ставится под сомнение самими же авторами в подстрочном замечании на с. 107.

Таким образом, исследование рассеяния в ближней зоне поверхности по-прежнему является актуальной задачей, крайне важной для практических целей.

Интегральное представление флуктуационного поля

Поставим своей целью получение представления рассеянного поля, не накладывающего жестких ограничений на высоту корреспондирующих пунктов и размеры рассеивающей площадки, а следовательно, и величину френелевского параметра. В частности, при рассеянии

неограниченной поверхностью ($L \rightarrow \infty$) этот параметр неограничен для любой точки наблюдения, находящейся на конечном расстоянии ($R < \infty$) от поверхности.

Как отмечалось нами ранее [3], метод малых возмущений в теории рассеяния волн случайными неровностями поверхности на самом деле означает три варианта метода возмущений, различающихся областями применимости. Наиболее общий из них – приближение Крейчна на [4], согласно которому рассеянное (флуктуационное) поле $u(\vec{R}_2)$ в точке \vec{R}_2 в момент времени t (временная зависимость $e^{-i\omega_0 t}$ опущена) выглядит следующим образом:

$$u(\vec{R}_2) = -\frac{i}{4\pi^2} \iint_S d^2\vec{r}_1 \iint d^2\vec{k}_{2\perp} \frac{1}{k_{2z} + k\eta(\vec{k}_{2\perp})} \times \\ \times e^{i[\vec{k}_{2\perp}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + k_{2z}(z_2 - z_1)]} L_1(\zeta_1 \langle U_1 \rangle) \Big|_{z_1=0}. \quad (1)$$

Здесь

$$L_1(\zeta_1 \langle U_1 \rangle) \Big|_{z_1=0} = \\ = \left\{ \nabla_1 \zeta_1 \cdot \nabla_1 - \zeta_1 \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + ik\eta_0 \right) \right\} \langle U_1 \rangle \Big|_{z_1=0}; \quad (2)$$

$\langle U_1 \rangle = \langle U(\vec{R}_1) \rangle$ – среднее поле в точке $\vec{R}_1 = (\vec{r}_1, z_1)$; $\nabla_1 = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y_1}$ – градиент по переменным x_1, y_1 в средней плоскости S (рис. 1); $z = \zeta_1 = \zeta(\vec{r}_1)$ – случайные неровности рассеивающей поверхности, причем среднее значение $\langle z \rangle = \langle z_1 \rangle = 0$ образует плоскость S ; $\eta_0 = \text{const}$ – импеданс невозмущенной (гладкой) поверхности; $\eta(\vec{k}_{2\perp})$ – эффективный импеданс среднего поля, являющийся решением интегрального уравнения [4]:

$$\eta(\vec{k}_{2\perp}) = \eta_0 + \frac{\sigma^2}{k} \int \int_{-\infty}^{\infty} d^2\vec{\chi} \frac{\tilde{W}(\vec{k}_{2\perp} - \vec{\chi})}{\chi_z + k\eta(\vec{\chi})} \times$$

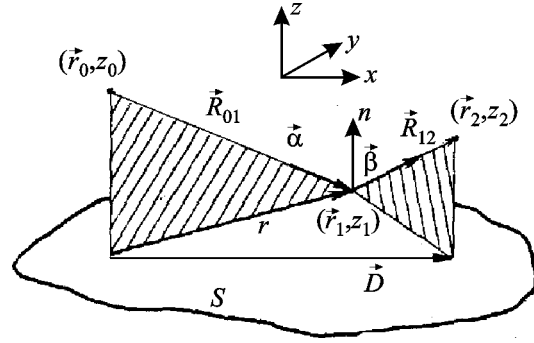


Рис. 1. Геометрия рассеяния

$$\times [k^2 - \vec{\chi}\vec{k}_{2\perp} - k^2\eta_0\eta(\vec{k}_{2\perp})] [k^2 - \vec{\chi}\vec{k}_{2\perp} + k\eta_0\chi_z]. \quad (3)$$

Экспоненты в (1) с различными компонентами $\vec{k}_{2\perp}$ в плоскости $z = 0$ образуют совокупность плоских однородных ($|\vec{k}_{2\perp}| \leq k$) и неоднородных ($|\vec{k}_{2\perp}| > k$) волн с проекциями волнового вектора на ось oz , равными $k_z = \sqrt{k^2 - k_{2\perp}^2}$, $\text{Im} k_z \geq 0$. Здесь $k = \omega_0/c$ – волновое число, ω_0 – частота, c – фазовая скорость волны.

В формуле (3) $\sigma^2 \tilde{W}(\vec{k}_{2\perp} - \vec{\chi})$ – пространственный энергетический спектр неровностей, $\chi_z = \sqrt{k^2 - \chi^2}$, $\text{Im} \chi_z \geq 0$, $\sigma^2 = \langle \zeta^2 \rangle$ – дисперсия неровностей.

Решение (3) методом итераций, где в правой части в качестве нулевого приближения берется $\eta(\vec{\chi}) = \eta(\vec{k}_{2\perp}) = \eta_0$, приводит к выражению, обладающему свойством симметрии:

$$\eta(-\vec{k}_{2\perp}) = \eta(\vec{k}_{2\perp}), \quad (4)$$

что является следствием симметрии $\tilde{W}(-\vec{K}) = \tilde{W}(\vec{K})$ для вещественного поля случайных неровностей [4].

Для точечного источника, расположенного в точке $\vec{R}_0 = (\vec{r}_0, z_0)$ среднее поле, создаваемое им в точке $\vec{R}_1 = (\vec{r}_1, z_1)$ над шероховатой поверхностью, [4]

$$\langle U_1 \rangle \equiv \langle U(\vec{R}_1) \rangle = \frac{i}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \vec{k}_{\perp} \frac{1}{k_z} e^{i\vec{k}_{\perp}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)} \times \\ \times \left\{ e^{ik_z(z_1 - z_0)} + V(\vec{k}_{\perp}) e^{ik_z(z_1 + z_0)} \right\}. \quad (5)$$

Здесь $k_z = \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}$, $\text{Im } k_z \geq 0$, а коэффициенты отражения плоских волн от плоской поверхности с эффективным импедансом $\eta(\vec{k}_{\perp})$,

$$V(\vec{k}_{\perp}) = \left[k_z - k\eta(\vec{k}_{\perp}) \right] / \left[k_z + k\eta(\vec{k}_{\perp}) \right], \quad (6)$$

удовлетворяют соотношениям:

$$1 + V(\vec{k}_{\perp}) = 2k_z / \left[k_z + k\eta(\vec{k}_{\perp}) \right], \quad (7)$$

$$1 - V(\vec{k}_{\perp}) = 2k\eta(\vec{k}_{\perp}) / \left[k_z + k\eta(\vec{k}_{\perp}) \right]. \quad (8)$$

Приняв во внимание (7), (8), после несложных преобразований (1) и (5) можно записать в виде:

$$u(\vec{R}_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int \int_S d^2 \vec{r}_1 I_{12} L_1(\zeta_1 \langle U_1 \rangle) \Big|_{z_1=0}, \quad (9)$$

$$\langle U_1 \rangle \equiv I_{01} = \frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}} + \frac{e^{ikR'_{01}}}{R'_{01}} + I'_{01}. \quad (10)$$

$$I_{12} = \frac{e^{ikR_{12}}}{R_{12}} + \frac{e^{ikR'_{12}}}{R'_{12}} + I'_{12}. \quad (11)$$

При этом мы воспользовались разложением Вейля ([5], с. 215) по плоским неоднородным волнам,

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{i}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \vec{k}_{\perp} \frac{1}{k_z} e^{i(\vec{k}_{\perp} \vec{r} + k_z z)}, \quad (12)$$

$$\vec{R} = (\vec{r}, z), \quad z \geq 0, \quad \text{Im } k_z \geq 0,$$

и ввели обозначения: $\vec{R}_{01} = \vec{R}_1 - \vec{R}_0$, $\vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$, $\vec{R}'_{01} = \vec{R}_1 - \vec{R}'_0$, $\vec{R}'_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}'_1$, а $\vec{R}'_0 = (\vec{r}_0, -z_0)$, $\vec{R}'_1 = (\vec{r}_1, -z_1)$ – радиус-векторы зеркальных отражений источника и точки рассеяния в плоскости $z = 0$.

Для величин I'_{01} и I'_{12} имеем следующие выражения:

$$I'_{01} = \frac{i}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \vec{k}_{\perp} \frac{1}{k_z} \left[V(\vec{k}_{\perp}) - 1 \right] e^{i[\vec{k}_{\perp}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) + k_z(z_1 + z_0)]}, \quad (13)$$

$$I'_{12} = \frac{i}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \vec{k}_{2\perp} \frac{1}{k_{2z}} \left[V(\vec{k}_{2\perp}) - 1 \right] e^{i[\vec{k}_{2\perp}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + k_{2z}(z_2 + z_1)]}. \quad (14)$$

Здесь учтено, что условие $z_1 \rightarrow 0$ приводит к $R'_{12} \rightarrow R_{12}$.

Таким образом, определение рассеянного (9) и среднего (10) полей требует вычислений величин (13), (14).

Асимптотические представления I'_{01} , I'_{12} в волновой зоне ($kR'_{01}, kR'_{12} \gg 1$)

Введем сферическую систему координат, экваториальная плоскость которой совпадает с $z = 0$, т. е. с поверхностью S , а направление полярной оси с осью oz . В этой системе

$$\vec{R}_{01} = (R_{01} \sin \theta_{01} \cos \varphi_{01}, R_{01} \sin \theta_{01} \sin \varphi_{01}, R_{01} \cos \theta_{01}). \quad (15)$$

Для вектора \vec{R}_{12} соответствующие сферические координаты – R_{12} , θ_{12} , φ_{12} ; для \vec{R}'_{01} и \vec{R}'_{12} соответствующие координаты пометим штрихами. Волновой вектор \vec{k} имеет вид:

$$\vec{k} = \vec{k}_{\perp} + \vec{i}_z k_z = (k \sin \theta \cos \varphi, k \sin \theta \sin \varphi, k \cos \theta). \quad (16)$$

Для вектора $\vec{k}_2 = \vec{k}_{2\perp} + \vec{i}_z k_{2z}$ сферические координаты – k , θ_2 , φ_2 , причем их области изменений

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi, \varphi_2 \leq 2\pi; \\ 0 \leq \theta, \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{\pi}{2} - i\infty \leq \theta, \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Углы θ, θ_2 принимают комплексные значения вдоль ломаной линии, определяемой неравенствами (17).

При этом выражения (13) и (14) имеют вид (ср. [5], с. 216; [6]; [7]; [8]):

$$I'_{01} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi [V(\theta, \varphi) - 1] \times e^{ikr'_{01} \sin \theta \cos(\varphi - \varphi'_{01})} e^{ikR'_{01} \cos \theta \cos \theta'_{01}}, \quad (18)$$

$$I'_{12} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 [V(\theta_2, \varphi_2) - 1] \times e^{ikr'_{12} \sin \theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi'_{12})} e^{ikR'_{12} \cos \theta_2 \cos \theta'_{12}}. \quad (19)$$

Здесь $r'_{01} = R'_{01} \sin \theta'_{01}$, $r'_{12} = R'_{12} \sin \theta'_{12}$, а величины $V(\theta, \varphi)$ и $V(\theta_2, \varphi_2)$ получены переходом в выражениях для $V(\vec{k}_\perp)$, $V(\vec{k}_{2\perp})$ к сферическим координатам векторов \vec{k}_\perp и $\vec{k}_{2\perp}$.

Обозначим

$$f_V(\theta, \varphi) \equiv V(\theta, \varphi) - 1 = \frac{-2\eta(\theta, \varphi)}{\cos \theta + \eta(\theta, \varphi)}. \quad (20)$$

Симметрия соотношения (4) означает симметрию $f_V(\theta, \varphi)$ по отношению к заменам $\theta \rightarrow -\theta$, либо $\varphi \rightarrow \varphi \pm \pi$ (такие замены приводят к $\vec{k}_\perp \rightarrow -\vec{k}_\perp$):

$$f_V(-\theta, \varphi) = f_V(\theta, \varphi \pm \pi) = f_V(\theta, \varphi). \quad (21)$$

Воспользуемся разложением (см. [9], с. 987)

$$e^{ip \cos(\varphi - \varphi'_{01})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(p) e^{im(\varphi - \varphi'_{01})} =$$

$$= \sum i^m J_m(p) e^{-im(\varphi - \varphi'_{01})}, \quad (22)$$

где $p = kr'_{01} \sin \theta$, и соотношениями (см. [10], с.180, с.183):

$$J_{2m}(p) = \frac{1}{2} [H_{2m}^{(1)}(p) + H_{2m}^{(2)}(p)], \quad (23)$$

$$H_{2m}^{(2)}(pe^{-i\pi}) = -e^{i2m\pi} H_{2m}^{(1)}(p). \quad (24)$$

Тогда интегрирование по φ выражения (18) приводит к результату:

$$I'_{01} = \frac{ik}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{i2m\varphi'_{01}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} d\theta \sin \theta \times e^{ikR'_{01} \cos \theta \cos \theta'_{01}} H_{2m}^{(1)}(p) C_{2m}(\theta) - \int_0^{-\frac{\pi}{2} + i\infty} d\theta \sin \theta e^{ikR'_{01} \cos \theta \cos \theta'_{01}} H_{2m}^{(1)}(p) C_{2m}(-\theta) \right], \quad (25)$$

где $C_{2m}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i2m\varphi} f_V(\theta, \varphi) d\varphi$ – коэффициенты разложения $f_V(\theta, \varphi)$ в ряд Фурье по φ , учитывающие симметрию преобразования $\varphi \rightarrow \varphi \pm \pi$. Для волновой зоны $kr'_{01} \gg 1$ и обычным для метода перевала [5], [6], [8] является ограничение первым членом в асимптотическом разложении

$$H_{2m}^{(1)}(p) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi p}} (-1)^m e^{i\left(\frac{p-\pi}{4}\right)} \left\{ 1 + i \frac{16m^2 - 1}{8p} + \dots \right\}, \quad (26)$$

справедливое при слабой зависимости $\eta(\theta, \varphi)$ от φ . Подстановка (26) в (25) приводит к результату:

$$I'_{01} = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{R}{2\pi r'_{01}}} \int_{-\frac{\pi}{2}+i\infty}^{\frac{\pi}{2}-i\infty} d\theta \sqrt{\sin \theta} \times \\ \times [V(\theta, \phi'_{01}) - 1] e^{ikR'_{01} \cos(\theta - \theta'_{01})}. \quad (27)$$

При этом учтено, что $p = kr'_{01} \sin \theta$, где $r'_{01} = R'_{01} \sin \theta'_{01}$, и разложение Фурье

$$f_V(\theta, \phi'_{01}) = V(\theta, \phi'_{01}) - 1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{2m}(\theta) e^{i2m\phi'_{01}}. \quad (28)$$

Таким образом, в волновой зоне интегрирование по ϕ отбирает в разложении только те волны, азимутальное направление которых совпадает с направлением ϕ'_{01} вектора \vec{R}'_{01} .

Аналогичным образом в волновой зоне ($kR'_{12} \gg 1$) можно получить

$$I'_{12} = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{k}{2\pi r'_{12}}} \int_{-\frac{\pi}{2}+i\infty}^{\frac{\pi}{2}-i\infty} d\theta_2 \sqrt{\sin \theta_2} \times \\ \times [V(\theta_2, \phi'_{12}) - 1] e^{ikR'_{12} \cos(\theta_2 - \theta'_{12})}. \quad (29)$$

Интегралы (27) и (29) в комплексной плоскости углов являются типичными для задачи о поле точечного источника над плоскостью раздела [5], [6], [8] с одним осложнением – зависимостью импеданса от угла θ или θ_2 соответственно. Точных методов вычисления таких интегралов не существует, однако в волновой зоне достаточно эффективным асимптотическим методом является метод перевала.

Метод перевала для интегралов I'_{01} , и I'_{12}

Метод перевала с разной степенью подробностей, необходимых для нашей цели, содержится в монографиях [5], [6], [7], [8]. Наиболее детально он изложен в [8]. Однако выбор координатных систем в этой работе отличается от используемого нами и в [5], [6], [7], а след-

ствие этого отличие и в конформных отображениях комплексных плоскостей делает необходимым краткое изложение этого метода с использованием некоторых деталей из [5], [6], [7]. Решение задачи о поле точечного источника вблизи импедансной плоскости в [7] дано лишь схематически, а в [5] в самом начале § 20 (с. 236) допущение о характере решения $\left(\sin \theta_0 \sim 1, \theta_0 \approx \frac{\pi}{2}\right)$ делает полученные результаты неприменимыми для произвольного расположения источника и точки наблюдения. Во второе издание монографии в 1973 г. данное решение в общем виде не вошло, по-видимому, по этой причине.

Переход от комплексной плоскости k_{\perp} к плоскости θ требует однозначного определения $k_z = \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}$ на этой плоскости. Одно из условий, определяющих такой выбор, –

$$k_z > 0, \text{ если } -k < k_{\perp} < k, \quad (30)$$

при действительном $k > 0$ (см. [6], с. 27). Требование ограниченности подинтегрального выражения (13) при $|k_z| \cdot |z_1 + z_0| \rightarrow \infty$ приводит ко второму условию –

$$\text{Im } k_z > 0, \quad (31)$$

для всех допустимых комплексных значений k_{\perp} .

Для полного определения двузначной функции k_z необходимо ввести двулиственную риманову поверхность комплексной переменной k_{\perp} , переход с одного листа которой на другой осуществляется по линии разреза. Выбор ее определяет расположение областей на комплексной плоскости k_{\perp} , которым отвечают значения корня с $\text{Im } k_z > 0$ и $\text{Im } k_z < 0$ (см. [6], с. 28).

Используемое в наших вычислениях преобразование

$$k_{\perp} = k \sin \theta \quad (32)$$

отображает всю плоскость k_{\perp} на любую из полос шириной 2π на плоскости θ в силу перио-

дичности $\sin \theta$. Обратная функция $\arcsin(k_z/k)$ многозначна на плоскости k_{\perp} с точками ветвления, определяемыми из равенства

$$\frac{dk_{\perp}}{d\theta} = k \cos \theta = 0.$$

Точки ветвления первого порядка расположены при $k_{\perp} = \pm k$.

Представив $\theta = \theta_r + i\theta_i$, где θ_r и θ_i – действительная и мнимая части θ , для $k_{\perp} = k_{\perp r} + ik_{\perp i}$ из (32) получим:

$$k_{\perp r} = k \sin \theta_r \operatorname{ch} \theta_i, \quad k_{\perp i} = k \cos \theta_r \operatorname{sh} \theta_i. \quad (33)$$

Четыре квадранта плоскости k_{\perp} отображаются (рис. 2) на четыре полуполосы, соответствующие (33) и образующие полосу $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{2}$, $-\infty \leq \theta_i \leq \infty$. Эти области периодически повторяются на плоскости θ при изменении θ_r на величину кратную 2π .

Проведем разрезы на плоскости k_{\perp} вдоль вещественной оси от $-k$ до $-\infty$ и от $+k$ до $+\infty$ и положим

$$\begin{aligned} k_z &= \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2} = +k \cos \theta = \\ &= k(\cos \theta_r \operatorname{ch} \theta_i - i \sin \theta_r \operatorname{sh} \theta_i). \end{aligned} \quad (34)$$

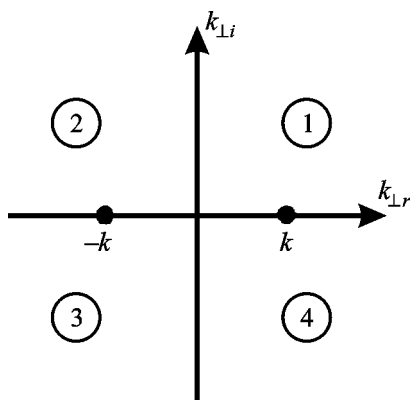


Рис. 2. Комплексная плоскость k_{\perp}

Поскольку $k_z = k$ при $k_{\perp} = 0$, выбор такого знака отвечает отображению точки $k_z = 0$ в точку $\theta = 0$. При этом полоса $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ отвечает верхнему листу римановой поверхности, на которой $\operatorname{Re} k_z > 0$, причем $\operatorname{Im} k_z > 0$ в областях 2 и 4, $\operatorname{Im} k_z < 0$ в областях 1 и 3. Любая соседняя полоса шириною π на комплексной плоскости θ может представлять второй лист римановой поверхности. Рис. 2 и рис. 3 иллюстрируют соответствие областей при таком отображении.

Выражение $f_V(\theta, \varphi'_{01})$, задаваемое соотношением (20), имеет полюс в точке $\theta = \theta_p$, которая определяется условием обращения в нуль выражения

$$\cos \theta + \eta(\theta, \varphi'_{01}) = 0. \quad (35)$$

Для малых значений импеданса ($|\eta| \ll 1$) возможно решение (35) итерационным методом. Взяв в качестве нулевого приближения $\theta_p \approx \frac{\pi}{2}$, в следующем приближении имеем

$$\cos \theta_p = -\eta\left(\frac{\pi}{2}, \varphi'_{01}\right). \quad (36)$$

Для физически реализуемых импедансов $\operatorname{Re} \eta > 0$. Следовательно, θ_p лежит либо в по-

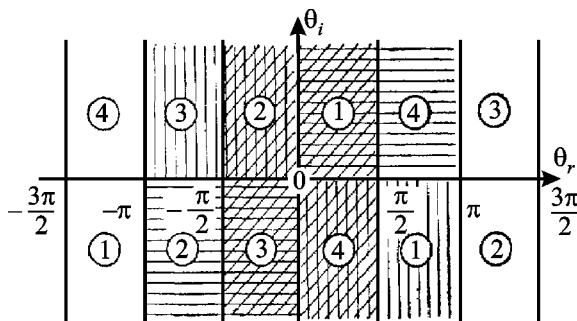


Рис. 3. Комплексная плоскость θ

лосе $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, либо $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ вблизи вещественной оси. Второе значение можно не принимать во внимание [8], поскольку удаленность его от перевального пути приводит к экспоненциально малому вкладу. Остается значение $\theta_p = \frac{\pi}{2} + \Delta\theta_p$, причем $-\sin \Delta\theta_p = -\eta \left(\frac{\pi}{2}, \varphi'_{01}\right)$. Отсюда

$$\theta_p \approx \frac{\pi}{2} + \eta \left(\frac{\pi}{2}, \varphi'_{01}\right). \quad (37)$$

Опуская для краткости обозначений аргумент импеданса, для действительной θ_{pr} и мнимой θ_{pi} частей θ имеем

$$\theta_{pr} = \frac{\pi}{2} + \eta_r, \quad \theta_{pi} = \eta_i. \quad (38)$$

Быстрые изменения подынтегрального выражения (27) обеспечивает также при изменениях θ и условия $kR_{01} \gg 1$ экспонента $e^{kR_{01}f(\theta)}$, где

$$f(\theta) = i \cos(\theta - \theta'_{01}). \quad (39)$$

Стационарная точка $\theta_s = \theta'_{01}$ определяется из условия

$$\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_s} = -i \sin(\theta - \theta'_{01}) = 0, \quad (40)$$

причем $f(\theta_s) = i \cos = i$. Согласно методу перевала вводим новую переменную s соотношением $f(\theta) - f(\theta_s) = s^2$, откуда

$$s = \pm \sqrt{2} e^{i\pi/4} \sin \frac{\theta - \theta'_{01}}{2}. \quad (41)$$

Перевальный путь определяется из условия

$$\text{Im } f(\theta) = \text{Im } f(\theta_s) = 1. \quad (42)$$

Из (41) получаем:

$$\left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{s=0} = \left(\frac{ds}{d\theta} \right)_{\theta_s}^{-1} = \pm \sqrt{2} e^{i\pi/4}. \quad (43)$$

Аргумент (43) вблизи $\theta = \theta_s$ должен совпадать с аргументом $\theta - \theta_s$. Следовательно, в (41) и (43) следует взять верхний знак “+”.

Из уравнения перевального пути (42) получаем

$$\cos(\theta_r - \theta'_{01}) \text{ch } \theta_i = 1, \quad (44)$$

или

$$\theta_r - \theta'_{01} = \arccos(\text{sch } \theta_i). \quad (45)$$

При $\theta_i \rightarrow \pm\infty$ контур имеет две асимптоты $\theta_r - \theta'_{01} = \pm\pi/2$, как это изображено на рис. 4. Преобразование первоначального контура и перевального можно проследить с помощью преобразования (41) плоскости θ в плоскость s . Точки ветвления $s = \pm s_g = \pm \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ и разрезы показаны на рис. 5, взято из книги [6] (с. 481).

Точка полюса $\theta_p \approx \frac{\pi}{2} + \eta$ переводится в точку $s = s_p$ согласно соотношению

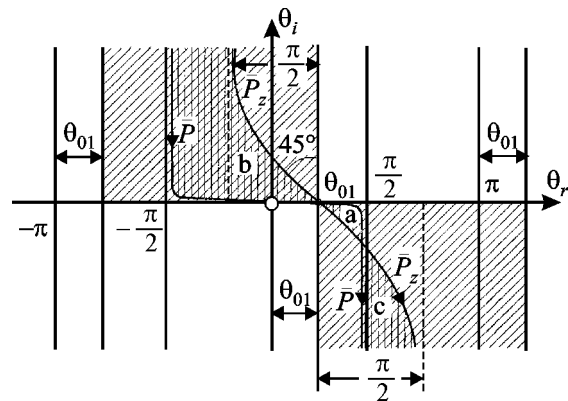


Рис. 4. Контур интегрирования в плоскости θ : начальный \bar{P} , деформированный \bar{P}_z

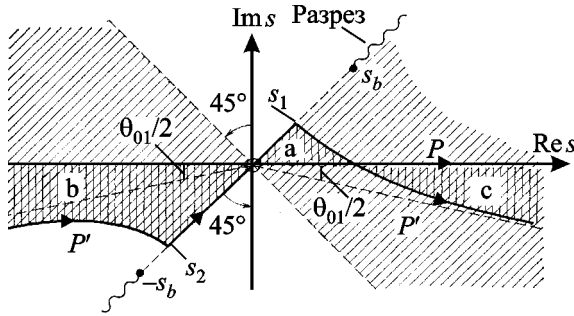


Рис. 5. Контуры интегрирования в плоскости s ($s_{1,2} = +\sqrt{2}e^{i\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\theta_{01}}{2}\right)$): начальный P' , деформированный P

$$s_p = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \sin \frac{\theta_p - \theta'_{01}}{2}. \quad (46)$$

Воспользовавшись (46), для малых импедансов ($|\eta| \ll 1$) можно получить [8]

$$s_p \approx e^{i\pi/4} \left[1 + \eta \cos \theta'_{01} - \sqrt{1 - \eta} \sin \theta'_{01} \right]^{1/2}. \quad (47)$$

Если ввести угол скольжения

$$\psi'_{01} = \frac{\pi}{2} - \theta'_{01}, \quad (48)$$

то можно показать [8], что $\text{Im} s_p < 0$ при условии

$$|\eta_i| > \eta_r + \psi'_{01} \quad \text{и} \quad \arg \eta < -\pi/4, \quad (49)$$

т. е. импеданс должен быть “сильноиндуктивным”. В таком случае при деформации исходного контура в перевальный пересекается точка полюса, поэтому к интегралу по контуру наискорейшего спуска необходимо добавить вычет в точке $s = s_p$.

Для слабоиндуктивных и емкостных импедансов $\arg \eta > -\pi/4$, и контур интегрирования при деформации не пересекает полюса,

поскольку тот лежит в верхней полуплоскости ($\text{Im} s_p > 0$).

Из условия (49) вытекает малость угла скольжения, при котором $\text{Im} s_p < 0$ в случае $\arg \eta < -\pi/4$,

$$\psi'_{01} < \psi_{\text{кр}} = |\eta_i| - \eta_r \ll 1.$$

Подытоживая, можно записать:

$$I'_{01} = I_{\text{сп}} + \begin{cases} 0, & \text{если } s_p > 0, \\ Q, & \text{если } s_p < 0, \end{cases} \quad (51)$$

где

$$Q = -i4\pi\eta_p e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{e^{ikr'_{01}}}{\sqrt{r'_{01}}} e^{-ik\eta_p(z_1+z_0)}, \quad (52)$$

$$\eta_p = \eta(\theta_p, \phi'_{01}) \approx \eta(\pi/2, \phi'_{01}),$$

а $I_{\text{сп}}$ – интеграл вдоль преобразованного контура наискорейшего спуска.

Величина Q описывает поверхностную волну (волну Ценнека), убывающую при удалении от границы как $e^{-ik\eta_p(z_0+z_1)}$, а вдоль границы как $1/\sqrt{r'_{01}}$.

Для интеграла $I_{\text{сп}}$ получается выражение

$$I_{\text{сп}} = \sqrt{\frac{k}{\pi r'_{01}}} e^{ikR'_{01}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-kR'_{01}s^2}}{s - s_p} \Phi(s) ds, \quad (53)$$

$$\Phi(s) = \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\cos \frac{\theta - \theta'_{01}}{2}} \frac{-2\eta(\theta, \phi'_{01})}{\cos \theta + \eta(\theta, \phi'_{01})} (s - s_p). \quad (54)$$

Здесь $\theta = \theta(s)$ обратная функция s из зависимости (41), а $d\theta = \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1} ds$ из (43).

При переходе от θ к s мы умножили и разделили подынтегральное выражение на

$(s - s_p)$, чтобы выделить в явном виде полюс $(s - s_p)^{-1}$. Очевидно, что $\Phi(s)$ из (54) при этом является регулярной функцией в точке $s = s_p$ и может быть разложена по степеням s вблизи точки перевала. Ограничиваясь главным членом разложения, имеем

$$\Phi(s) = \Phi(0) + \dots \approx \sqrt{\sin \theta'_{01}} \frac{-2\eta(\theta'_{01}, \varphi'_{01})}{\cos \theta'_{01} + \eta(\theta'_{01}, \varphi'_{01})} (-s_p). \quad (55)$$

Здесь учтено, что $\theta \rightarrow \theta'_{01}$ при $s \rightarrow 0$.

Если умножить выражение под знаком интеграла на $\frac{s + s_p}{s + s_p} \equiv 1$ и учесть свойства его четности, то получим

$$I_{\text{сн}} \approx s_p^2 \frac{2\eta(\theta'_{01}, \varphi'_{01})}{\cos \theta'_{01} + \eta(\theta'_{01}, \varphi'_{01})} \sqrt{\frac{kR'_{01}}{\pi}} \frac{e^{ikR'_{01}}}{R'_{01}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-kR'_{01}s^2}}{s^2 - s_p^2} ds. \quad (56)$$

Введем обозначения:

$$v = \sqrt{kR'_{01}}s, \quad v_p = \sqrt{kR'_{01}}s_p, \quad -$$

и учтем соотношение (20). Тогда получим

$$I_{\text{сн}} = [1 - V(\theta'_{01}, \varphi'_{01})] \frac{e^{ikR'_{01}}}{R'_{01}} \frac{v_p^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-v^2}}{v^2 - v_p^2} dv. \quad (57)$$

Можно показать [8], что интеграл в правой части (57) сводится к выражению, содержащему интеграл вероятности от комплексного аргумента:

$$I(v_p) = \frac{2\sqrt{\pi}}{v_p} e^{-v_p^2} \int_{v_p}^{i\infty - \alpha} e^{v^2} dv, \quad (58)$$

где $\alpha = \text{sgn Im } v_p = \text{sgn Im } s_p$. Аналогичные интегралы в [5] (с. 241) и [6] (с. 496) могут

отличаться множителем $\pm i$ при переменной интегрирования.

При наличии вычета θ в точке полюса объединение его с $I_{\text{сн}}$ приводит к единому асимптотическому представлению (см. [8], формулу 14.45), независимо от значения $\text{sgn Im } s_p$:

$$I'_{01} = [1 - V(\theta'_{01}, \varphi'_{01})] \frac{e^{ikR'_{01}}}{R'_{01}} 2v_p e^{-v_p^2} \int_{-\infty}^{i\infty} e^{v^2} dv. \quad (59)$$

Подставим полученное выражение в формулу (27), а (27) в (10), проделав затем тождественное преобразование: прибавим и вычтем в полученном выражении слагаемое $\frac{e^{ikR'_{01}}}{R'_{01}} V(\theta'_{01}, \varphi'_{01})$. В результате получим:

$$I_{01} = \frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}} + V(\theta'_{01}, \varphi'_{01}) \frac{e^{ikR'_{01}}}{R'_{01}} + [1 - V(\theta'_{01}, \varphi'_{01})] W'_{01} \frac{e^{ikR'_{01}}}{R'_{01}}, \quad (60)$$

где

$$W'_{01} = 1 + 2v_p e^{-v_p^2} \int_{v_p}^{i\infty} e^{v^2} dv - \quad (61)$$

“множитель ослабления” на трассе R'_{01} . Очевидно, что введенный таким образом “множитель ослабления” совпадает с подобным выражением для вертикальной компоненты электрической напряженности поля, излучаемого вертикальным электрическим диполем [8] (с. 105).

Аналогичным образом можно получить

$$I_{12} = \frac{e^{ikR_{12}}}{R_{12}} + V(\theta'_{12}, \varphi'_{12}) \frac{e^{ikR'_{12}}}{R'_{12}} + [1 - V(\theta'_{12}, \varphi'_{12})] W'_{12} \frac{e^{ikR'_{12}}}{R'_{12}}. \quad (62)$$

Асимптотическое поведение “множителей ослабления” W'_{01} и W'_{12} определяется величиной соответствующих численных расстояний. Для W'_{01}

$$w'_{01} = \left(\sqrt{kR'_{01}}s_p\right)^2 = ikR'_{01} \left[1 + \eta \sin \psi'_{01} - \sqrt{1 - \eta^2} \cos \psi'_{01}\right]. \quad (63)$$

Напомним, что ψ'_{01} – угол скольжения (48). Выражение для w'_{12} получается заменой $R'_{01} \rightarrow R'_{12}$ и $\psi'_{01} \rightarrow \psi'_{12} = \frac{\pi}{2} - \theta'_{12}$ в формуле (63).

Численные расстояния увеличиваются с ростом угла скольжения, причем для $\psi'_{01} = \psi'_{12} = 0$ имеем

$$w'_{01} \approx ikR'_{01} \eta^2/2, \quad w'_{12} \approx ikR'_{12} \eta^2/2. \quad (64)$$

Если же $\psi'_{01} \rightarrow \psi'_{12} = \pi/2$, то

$$|w'_{01}| \approx kR'_{01} |1 + \eta| \gg 1, \quad |w'_{12}| \approx kR'_{12} |1 + \eta| \gg 1. \quad (65)$$

В случае (64) могут реализовываться как большие значения $|w'_{01}|$, $|w'_{12}|$, так и малые в зависимости от величины kR'_{01} , kR'_{12} и малости $|\eta^2|$.

Исключая случай “сильноиндуктивного” импеданса ($\arg \eta > -\pi/4$), для множителя ослабления можно получить [8] асимптотики:

$$W'_{01} \approx 1 + i\sqrt{\pi w'_{01}} + O(w'_{01}) \text{ при } |w'_{01}| \ll 1, \quad (66)$$

$$W'_{01} \approx -\frac{1}{2w'_{01}} \left(1 + \frac{3}{2w'_{01}} + \dots\right) \text{ при } |w'_{01}| \gg 1. \quad (67)$$

Поведение I_{01} и I_{12} с изменением углов падения (скольжения) прослеживается достаточно просто в предельных случаях. Если ψ'_{01} , $\psi'_{12} \gg \psi_{Br}$, где $\psi_{Br} \sim |\eta|$ – угол Брюстера, то $\cos \theta'_{01}$, $\cos \theta'_{12} \gg |\eta|$ и $V(\theta'_{01}, \phi'_{01}), V(\theta'_{12}, \phi'_{12}) \rightarrow 1$, а в формуле (60) множитель $[1 - V] \rightarrow 0$. Кроме

того, реализуется случай (67). В результате I_{01} и I_{12} описывают “двухлучевую интерференцию” луча от реального источника и умноженного на соответствующий коэффициент отражения луча от зеркального источника. В обратном случае $\psi'_{01}, \psi'_{12} \ll \psi_{Br}$ имеем $\cos \theta'_{01}, \cos \theta'_{12} \ll |\eta|$, соответственно $R'_{01} \rightarrow R_{01}$, $R'_{12} \rightarrow R_{12}$, $V(\theta'_{01}, \phi'_{01}), V(\theta'_{12}, \phi'_{12}) \rightarrow -1$, а множитель $[1 - V] \rightarrow +2$. В результате “прямой” луч и “зеркальный” взаимно погашаются и поле определяется переизлучением и ослаблением поверхностью раздела.

Для подстановки (2) в (1) необходимо вычислить соответствующие производные от I_{01} при $z_1 = 0$. Структура формулы (60) для I_{01} такова, что основной вклад при дифференцировании дают экспоненциальные множители:

$$\nabla_1 I_{01} \Big|_{z=0} \approx ik\alpha_\perp \frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}} \times \times \left\{ (1 + V'_{01}) + (1 - V'_{01})W'_{01} + O(1/kR'_{01}) \right\}_{z_1=0},$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} I_{01} \Big|_{z_1=0} \approx ik\alpha_z \frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}} \times \times \left\{ (-1 + V'_{01}) + (1 - V'_{01})W'_{01} + O(1/\sqrt{kR'_{01}}) \right\}_{z_1=0},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} I_{01} \Big|_{z_1=0} \approx -k^2 \alpha_z^2 \frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}} \times \times \left\{ (1 + V'_{01}) + (1 - V'_{01})W'_{01} + O(1/\sqrt{kR'_{01}}) \right\}_{z_1=0}.$$

Здесь $-\alpha_z = -\frac{z_0}{R_{01}} \Big|_{z_1=0}$, $\alpha_z = \frac{z_0}{R'_{01}} \Big|_{z_1=0}$, $R_{01}|_{z_1=0} = R'_{01}|_{z_1=0}$.

Кроме того, для сокращения записи введены обозначения $V'_{01} = V(\theta'_{01}, \phi'_{01})$. Если $\frac{1}{\sqrt{kR'_{01}}} \ll 1$, то в приведенных выражениях можно ограничиться явно выписанными членами.

С учетом вышеизложенного запишем флуктуации поля в виде

$$u(\vec{R}_2) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S d^2\vec{r}_1 \frac{J_{01} J_{12}}{R_{01} R_{12}} e^{ik(R_{01} + R_{12})} \Big|_{z_1=0} \quad (68)$$

В этой формуле

$$J_{01} = \left\{ [ik\bar{\alpha}_\perp \cdot \nabla_1 \zeta_1 + k^2 \alpha_z^2 \zeta_1] (1 + V'_{01}) + \right. \\ \left. + k^2 \alpha_z \eta_0 (1 - V'_{01}) \zeta_1 + [ik\bar{\alpha}_\perp \cdot \nabla_1 \zeta_1 + k^2 \alpha_z^2 \zeta_1 + k^2 \alpha_z \eta_0 \zeta_1] \times \right. \\ \left. \times (1 - V'_{01}) W'_{01} \right\} \Big|_{z_1=0}, \quad (69)$$

$$J_{12} = \left\{ (1 + V'_{12}) + (1 - V'_{12}) W'_{12} \right\} \Big|_{z_1=0}, \quad (70)$$

причем $\bar{\alpha}_\perp = \frac{\vec{r}_1}{R_{01}}$, $\alpha_z = \frac{z_0}{R_{01}}$, $R_{01} = \sqrt{r_1^2 + z_0^2}$ при $z_1 = 0$.

Преобразования подинтегрального выражения (68) были проведены при выполнении условий $kR'_{01} \gg 1$, $kR'_{12} \gg 1$ и $\cos \theta'_{01}, \cos \theta'_{12} \neq \pi/2$, нарушение которых требует использования подходящих аппроксимаций, не влияющих существенно на величину интеграла. Высоты z_0 и z_2 при этом могут быть произвольными. Имея это в виду, выражение (68) можно принять в качестве исходного для вычислений других статистических характеристик флуктуационного поля.

Литература

1. Barrick D. E. First-Order Theory and Analysis of MF/HF/VHF Scatter from the Sea // IEEE Trans. Antennas. Propag. – 1972. – Vol. AP-20, No. 1. – P. 2-10.
2. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статически неровной поверхности. – М.: Наука, 1972. – 424 с.
3. Брюховецкий А. С. О методе малых возмущений в теории рассеяния волн статистически неровной поверхностью // Радиофизика и радиоастрономия. – 2006. – Т.11, №3. – С. 254-263.
4. Брюховецкий А. С. Об одном варианте метода малых возмущений в теории рассеяния волн на статически неровной поверхности // Изв. вузов. Радиофизика. – 1988. – Т. 31, №3. – С. 321-326.
5. Брюховских Л. М. Волны в слоистых средах. – М.: Изд. АН СССР, 1957. – 503 с.

6. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. – М.: Мир, 1978. – 547 с.
7. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. – М.: Мир, 1978. – 555 с.
8. Макаров Г. И., Новиков В. В., Рыбачек С. Т. Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью. – М.: Наука, 1991. – 195 с.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 831 с.

Розсіяння хвиль у ближній зоні статистично нерівної поверхні. I. Флуктуації поля

А. С. Брюховецкий

Отримано вираз для флуктуаційного поля, розсіяного статистично шорсткою площиною, у вигляді головного члена асимптотичного розкладання за великим параметром, що визначає хвильову зону відносно точки джерела і точки спостереження.

Асимптотика є рівномірною відносно висот цих точок над розсіюючою поверхнею і може бути відправним пунктом у визначенні енергетичних характеристик флуктуаційного поля у ближній зоні поверхні.

Wave Scattering in Near Zone of a Statistically Rough Surface. I. Field Fluctuations

A. S. Bryukhovetski

The expression for a fluctuating field scattered by a statistically rough surface is obtained as a dominant term of the asymptotic expansion in a large parameter defining the wave zone with respect to the source and observation points.

The asymptotic is uniform with respect to the heights of these points over the scattering surface and can be used as a starting point in determination of the energy characteristics of the fluctuating field in the near surface zone.