

## Чои–вильямс-анализ в цифровой обработке сигналов

О. В. Вишнинецкий, О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор<sup>1</sup>

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники,  
пр. Ленина, 14, г. Харьков, 61077, Украина,  
E-mail: Oleg-Lazorenko@yandex.ru*

*<sup>1</sup>Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина,  
E-mail: Leonid.F.Chernogor@univer.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 13 июля 2007 г.*

Обсуждаются свойства, особенности, достоинства и недостатки преобразования Чои–Вильямса. Показывается, что применение преобразования Чои–Вильямса является полезным при анализе различных сигналов. Результаты чои–вильямс-анализа сигналов сравниваются с результатами вигнер-анализа и оконного фурье-анализа этих же сигналов. В качестве примера исследованы некоторые атомарные функции и окна Кравченко–Рвачева. Отмечается, что чои–вильямс-, вигнер- и оконный фурье-анализ хорошо дополняют друг друга. Рекомендуется совместное применение преобразований Чои–Вильямса, Вигнера и оконного преобразования Фурье для анализа сигналов различной природы.

### Введение

В последние годы новые виды сигналов (фрактальные, сверхширокополосные (СШП), прямохаотические СШП, нелинейные СШП, фрактальные СШП и др.) находят все большее применение в различных областях науки и техники (см., например, [1-6]). Методов, основанных на традиционном преобразовании Фурье, по разным причинам становится недостаточно. Поэтому для анализа таких сигналов является перспективным применение новых математических методов обработки, основанных на вейвлет-преобразовании, теории атомарных функций, адаптивном преобразовании Фурье, преобразовании Вигнера (ПВ), системном спектральном анализе и т. п. (см., например, [7-17]).

С другой стороны, прием и обработка реальных сигналов всегда сопровождается влиянием помех. Внешние помехи чаще всего представляют собой случайную последовательность импульсов со случайными параметрами, причем они не являются гауссовыми. Для таких

помех разномасштабные компоненты в разложении скоррелированы, что приводит к неэффективности линейных методов анализа (таких, как фурье-анализ, вейвлет-анализ и др.). В то же время применение нелинейных преобразований из класса Коэна (см., например, [9, 13, 14, 18-23]), в число которых входит и преобразование Чои–Вильямса (ПЧВ), может обеспечить повышение качественных показателей при нелинейной фильтрации помех. Этим объясняется актуальность настоящей работы.

Целью работы является рассмотрение возможности и целесообразности применения ПЧВ для анализа сигналов различной природы, а также сравнение полученных результатов для модельных сигналов с результатами ПВ и традиционного динамического (оконного) преобразования Фурье (ДФФ). Для краткости анализ, основанный на преобразованиях Вигнера или Чои–Вильямса, будем именовать соответственно вигнер-анализом и чои–вильямс-анализом.

### 1. Основы чои–вильямс-анализа

Одним из информативных время-частотных методов анализа сигналов является ПВ, которое относится к общему классу квадратичных частотно-временных распределений, введенному Л. Коэном в 1966 г. (см., например, [13, 14, 18, 24]). Возможности, достоинства и недостатки вигнер-анализа обсуждаются в работах авторов [9, 20, 21]. Известно, что главным его недостатком является наличие интерференционных членов в случае многокомпонентных сигналов, которые могут привести исследователей к обнаружению несуществующих сигналов. В 1989 г. Чои и Вильямсом [19] было предложено использовать распределение, которое также принадлежит классу Коэна и позволяет уменьшить влияние интерференции при сохранении полезных свойств ПВ.

ПЧВ сигнала  $f(t)$  задается следующим соотношением (см., например, [13, 14, 18, 24]):

$$P_{CW}[f(t)] \equiv P_{CW}f(\tau, \omega) = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau)^2\sigma}{4t^2}\right) f\left(u + \frac{t}{2}\right) f^*\left(u - \frac{t}{2}\right) dudt, \quad (1)$$

где символ “\*” обозначает операцию комплексного сопряжения,  $\sigma$  – положительный масштабный коэффициент. Изменяя значение  $\sigma$ , можно управлять уровнем возникающих интерференционных членов. При  $\sigma \rightarrow \infty$  ПЧВ переходит в ПВ, задаваемое, как известно, выражением (см., например, [13, 14, 18, 24]):

$$P_V[f(t)] \equiv P_V f(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau + \frac{t}{2}\right) f^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt.$$

Рассмотрим основные свойства ПЧВ (см., например, [11]).

**Вещественность.** ПЧВ сигнала  $f(t)$  является вещественным: функция спектральной

плотности (ФСП)  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  оказывается вещественной вследствие эрмитовой симметрии произведения  $f(u + t/2)f^*(u - t/2)$  по  $t$ .

**Симметрия аргументов.** Из равенства Парсеваля следует, что время  $\tau$  и частота  $\omega$  входят в преобразование симметрично, а потому ФСП можно записать в виде:

$$P_{CW}f(\tau, \omega) = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\gamma\tau)}{|\gamma|} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(\mu - \omega)^2\sigma}{4\gamma^2}\right) \hat{f}\left(\mu + \frac{\gamma}{2}\right) \hat{f}^*\left(\mu - \frac{\gamma}{2}\right) d\mu d\gamma,$$

где  $\hat{f}(\omega)$  – ФСП преобразования Фурье сигнала  $f(t)$ .

**Частотно-временной носитель.** Если энергия сигнала  $f(t)$  хорошо локализована вблизи  $t_0$  и  $\omega_0$  во временной и частотной областях, то энергия  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  сконцентрирована в окрестности точки  $(t_0, \omega_0)$  с протяженностью, равной частотной и временной протяженности сигнала  $f(t)$ .

**Сдвиг по фазе сигнала  $f(t)$  на величину  $\phi_0$  не изменяет его ФСП  $P_{CW}f(\tau, \omega)$ :**

$$P_{CW}[f(t)\exp(i\phi_0)] = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau)^2\sigma}{4t^2}\right) f\left(u + \frac{t}{2}\right) \exp(i\phi_0) \times f^*\left(u - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\phi_0) dudt = P_{CW}f(\tau, \omega).$$

**Сдвиг по времени сигнала  $f(t)$  на  $t_0$  приводит к такому же смещению ФСП  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  по оси времени:**

$$P_{CW}[f(t-t_0)] = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau)^2\sigma}{4t^2}\right) f\left(u - t_0 + \frac{t}{2}\right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times f^* \left( u - t_0 - \frac{t}{2} \right) du dt = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau+t_0)^2 \sigma}{4t^2}\right) f\left(u + \frac{t}{2}\right) \times \\ & \times f^* \left( u - \frac{t}{2} \right) du dt = P_{CW} f(\tau - t_0, \omega). \end{aligned}$$

Сдвиг по частоте  $\hat{f}(\omega)$  на  $\omega_0$ , приводящий к домножению  $f(t)$  на  $\exp(i\omega_0 t)$ , вызывает такое же смещение ФСП  $P_{CW} f(\tau, \omega)$  по оси частот:

$$\begin{aligned} P_{CW} [f(t) e^{i\omega_0 t}] &= \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma\tau}}{|\gamma|} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(\mu-\omega)^2 \sigma}{4\gamma^2}\right) \hat{f}\left(\mu - \omega_0 + \frac{\gamma}{2}\right) \times \\ & \times \hat{f}^* \left( \mu - \omega_0 - \frac{\gamma}{2} \right) d\mu d\gamma = \\ &= \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma\tau}}{|\gamma|} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(\mu-\omega+\omega_0)^2 \sigma}{4\gamma^2}\right) \times \\ & \times \hat{f}\left(\mu + \frac{\gamma}{2}\right) \hat{f}^* \left( \mu - \frac{\gamma}{2} \right) d\mu d\gamma = P_{CW} \hat{f}(\tau, \omega - \omega_0). \end{aligned}$$

Масштабирование по времени аргумента сигнала  $f(t)$  в  $a$  раз приводит к масштабированию аргументов ФСП  $P_{CW} f(\tau, \omega)$  в  $a$  и  $1/a$  раз соответственно:

$$\begin{aligned} P_{CW} \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right) \right] &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau)^2 \sigma}{4t^2}\right) f\left(\frac{u}{a} + \frac{t}{2a}\right) f^* \left( \frac{u}{a} - \frac{t}{2a} \right) du dt = \\ &= \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau/a)^2 \sigma}{4t^2}\right) \times \\ & \times f\left(u + \frac{t}{2}\right) f^* \left( u - \frac{t}{2} \right) du dt = P_{CW} f\left(\frac{\tau}{a}, a\omega\right). \end{aligned}$$

Множитель  $1/\sqrt{a}$  появляется перед сигналом  $f(t)$  из условия нормировки энергии сигнала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1.$$

Масштабирование по частоте аргумента ФСП сигнала  $\hat{f}(\omega)$  в  $\beta$  раз приводит к масштабированию аргументов ФСП  $P_{CW} f(\tau, \omega)$  в  $1/\beta$  и  $\beta$  раз соответственно:

$$\begin{aligned} P_{CW} \left[ \frac{1}{\sqrt{\beta}} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\beta}\right) \right] &= \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma\tau}}{|\gamma|} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(\mu-\omega)^2 \sigma}{4\gamma^2}\right) \hat{f}\left(\frac{\mu}{\beta} + \frac{\gamma}{2\beta}\right) \times \\ & \times \hat{f}^* \left( \frac{\mu}{\beta} - \frac{\gamma}{2\beta} \right) d\mu d\gamma = \\ &= \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\beta\tau}}{|\gamma|} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(\mu-\omega/\beta)^2 \sigma}{4\gamma^2}\right) \times \\ & \times \hat{f}\left(\mu + \frac{\gamma}{2}\right) \hat{f}^* \left( \mu - \frac{\gamma}{2} \right) d\mu d\gamma = P_{CW} f\left(\beta\tau, \frac{\omega}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Множитель  $1/\sqrt{\beta}$  появляется перед  $\hat{f}(\omega)$  из условия нормировки энергии сигнала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 1.$$

Мгновенная частота сигнала  $f(t)$  может быть вычислена как

$$\omega(t) = \phi'(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \xi P_{CW} f_a(t, \xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} P_{CW} f_a(t, \xi) d\xi},$$

если аналитическая часть  $f_a(t)$  сигнала  $f(t)$ , полученная путем приравнивания к нулю

$\hat{f}(\omega)$  для  $\omega < 0$ , может быть записана в виде  $f_a(t) = a(t)\exp(i\phi(t))$ .

*Обращение по времени.* Изменение знака аргумента сигнала  $f(t)$  приводит к изменению знаков обоих аргументов ФСП  $P_{CW}f(\tau, \omega)$ :

$$\begin{aligned} P_{CW}[f(-t)] &= \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{|t|} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau)^2\sigma}{4t^2}\right) f\left(-u-\frac{t}{2}\right) f^*\left(-u+\frac{t}{2}\right) dudt = \\ &= \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u+\tau)^2\sigma}{4t^2}\right) \times \\ &\times f\left(u+\frac{t}{2}\right) f^*\left(u-\frac{t}{2}\right) dudt = P_{CW}f(-\tau, -\omega). \end{aligned}$$

*Комплексное сопряжение.* При замене сигнала  $f(t)$  на комплексно сопряженный ему сигнал  $f^*(t)$  у ФСП  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  меняется знак перед вторым аргументом:

$$\begin{aligned} P_{CW}[f^*(t)] &= \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{|t|} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau)^2\sigma}{4t^2}\right) f^*\left(u+\frac{t}{2}\right) f\left(u-\frac{t}{2}\right) dudt = \\ &= \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau)^2\sigma}{4t^2}\right) \times \\ &\times f\left(u+\frac{t}{2}\right) f^*\left(u-\frac{t}{2}\right) dudt = P_{CW}f(\tau, -\omega). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что для вещественного сигнала  $f(t)$  ФСП  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  является четной функцией по второму аргументу.

*Сохранение энергии* (теорема Моаяля). Для любых функций  $f(t)$  и  $g(t)$  из пространства функций, интегрируемых с квадратом,  $L^2(\mathbb{R})$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \iint P_{CW}f(\tau, \omega)P_{CW}g(\tau, \omega)d\tau d\omega.$$

Отсюда следует, что энергию сигнала  $f(t)$  можно вычислить как

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \iint P_{CW}^2 f(\tau, \omega) d\tau d\omega.$$

*Маргинальные распределения.* Для ПЧВ существуют маргинальные распределения, а следовательно, выполняются соотношения [13, 14, 18, 24]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{CW}f(\tau, \omega)d\tau = |\hat{f}(\omega)|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{CW}f(\tau, \omega)d\omega = |f(t)|^2.$$

*Интерференция.* Поскольку ПЧВ квадратично по  $f(t)$ , при его вычислении от суммы двух сигналов возникает их интерференция:

$$\begin{aligned} P_{CW}[f_1 + f_2] &= P_{CW}f_1 + P_{CW}f_2 + \\ &+ P_{CW}[f_1, f_2] + P_{CW}[f_2, f_1], \end{aligned}$$

где  $P_{CW}[f_1, f_2]$  – перекрестное ПЧВ от сигналов  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_{CW}[f_1, f_2](\tau, \omega) &= \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(u-\tau)^2\sigma}{4t^2}\right) f_1\left(u+\frac{t}{2}\right) f_2^*\left(u-\frac{t}{2}\right) dudt. \end{aligned}$$

Интерференционный член  $I[f_1, f_2] = P_{CW}[f_1, f_2] + P_{CW}[f_2, f_1]$  является вещественной функцией переменных  $\tau$  и  $\omega$  и может оказаться отличным от нуля в областях, где  $P_{CW}f_1$  и  $P_{CW}f_2$  равны нулю. Последнее может привести к “обнаружению” исследователем несуществующих сигналов. В отличие от ПВ для ПЧВ интенсивность интерференционного члена мож-

но менять, поскольку она снижается с уменьшением величины параметра  $\sigma$ .

Следует также отметить, что в отличие от спектрограммы Фурье (СФ) и скэйлограммы вейвлет-преобразования функцию  $P_{CW}f(\tau, \omega)$ , как и в случае ПВ, можно называть функцией спектральной плотности лишь условно, поскольку она не обладает свойством положительности и поэтому не может являться совместной частотно-временной плотностью сигнала (см., например, [12, 18]). Тем не менее, по мнению специалистов (см., например, [12, 18]), ее рассмотрение оказывается весьма полезным.

Практическое значение ПЧВ при анализе сигналов заключается в следующем [18]. Во-первых, оно дает возможность получать более полную информацию о сигнале, чем при использовании других средств, например, спектрограмм. Во-вторых, позволяет проводить анализ частотно-временного содержания отдельных особенностей сигнала. В-третьих, представляет интерес анализ соответствующей ФСП сигнала без учета того, является она частотно-временной плотностью сигнала или нет.

До последнего времени ПЧВ находилось в тени более известного нелинейного частотно-временного преобразования из класса Коэна – ПВ. Сегодня ПВ, являясь одним из предельных случаев ПЧВ, уже применяется при решении задач геофизической разведки (см., например, [25]), сейсмологии (см., например, [26]), для анализа микроструктуры температурного градиента в океане (см., например, [27]), для анализа нестационарных звуковых и акустических сигналов (см., например, [28]), при разработке приборов, предназначенных для генерации и излучения волн (см., например, [29]), в медицине (см., например, [30]), при решении задач распознавания образов (см., например, [31]), для анализа и распознавания речи (см., например, [32]), при решении задачи обнаружения сигнала на фоне аддитивного шума (см., например, [33]), в оптике для исследования функций энергетической яркости и когерентности (см., например, [34]), в теории антенн (см., например, [35]), для исследования стохастических сигналов (см., например, [36]), при решении задачи неразрушающе-

го контроля (см., например, [37]), при описании и анализе сигналов (вигнер-анализ) [9] и т. д.

Таким образом, несомненными достоинствами ПЧВ являются его хорошее частотно-временное разрешение, инвариантность по отношению к сдвигам по фазе, времени и частоте, а главное – наличие параметра, управляющего интенсивностью интерференционных членов.

ПЧВ несвободно от некоторых недостатков. Платой за уменьшение интенсивности интерференционных членов является ухудшение частотно-временного разрешения. Другим недостатком является невозможность получения аналитических результатов при анализе даже достаточно простых сигналов из-за сложности вычисления интеграла (1).

Все сказанное выше позволяет предположить, что ПЧВ может оказаться полезным при анализе различных сигналов и процессов, в том числе при дистанционном зондировании сред, исследовании околоземного космического пространства, в радиолокации и т. п.

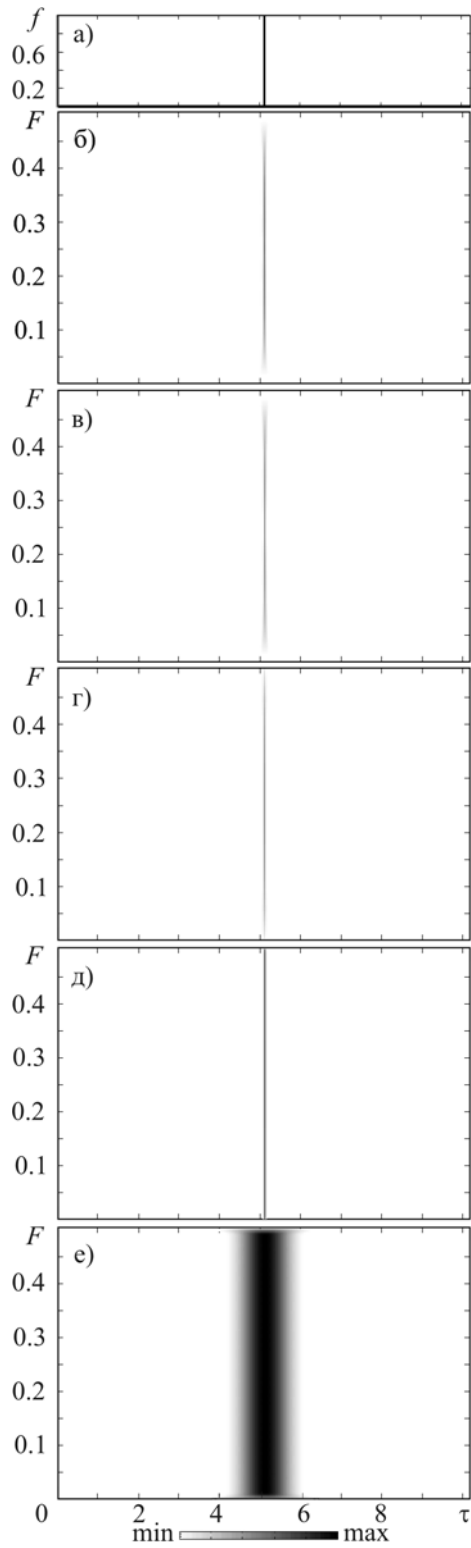
## 2. Чои–вильямс-анализ модельных сигналов

Для ряда простейших сигналов можно получить аналитические выражения для ФСП ПЧВ  $P_{CW}f(\tau, \omega)$ . Запишем их и сравним с соответствующими выражениями для ФСП ПВ  $P_V f(\tau, \omega)$  (см., например, [9]) и ФСП СФ  $P_S f(\tau, \omega) = |\dot{S}f(\tau, \omega)|^2$ , где  $\dot{S}f(\tau, \omega)$  – ФСП ДПФ этих же сигналов, задаваемая, как известно, следующим соотношением (см., например, [12-14]):

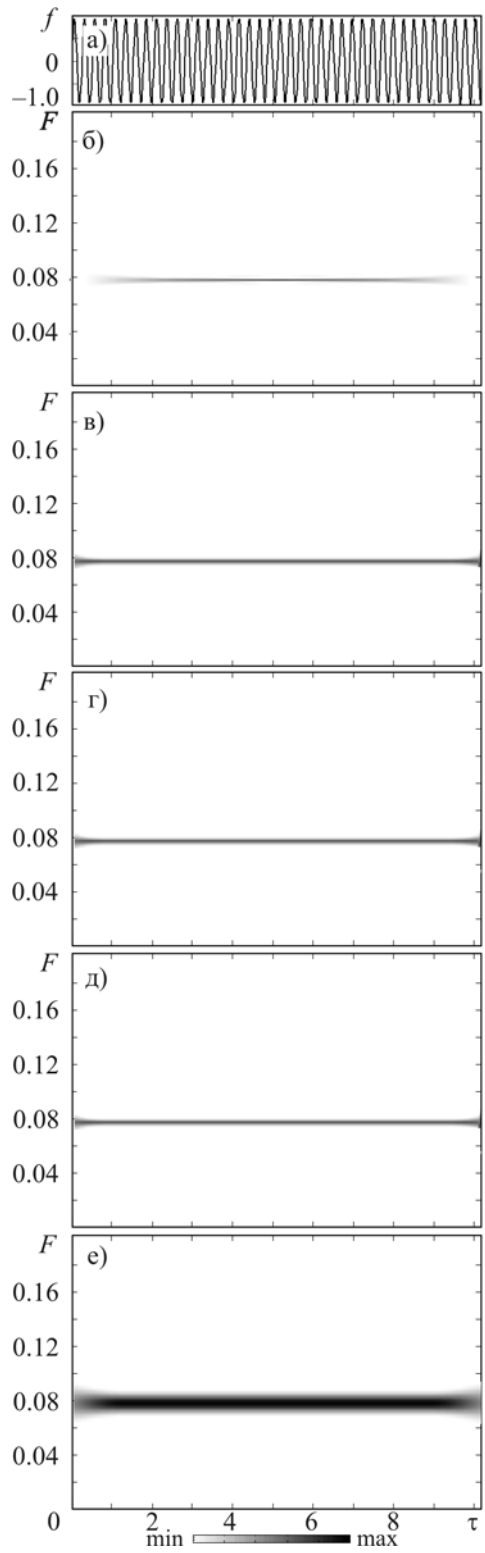
$$\dot{S}f(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t - \tau) \exp(-i\omega t) dt,$$

где  $w(t)$  – оконная функция.

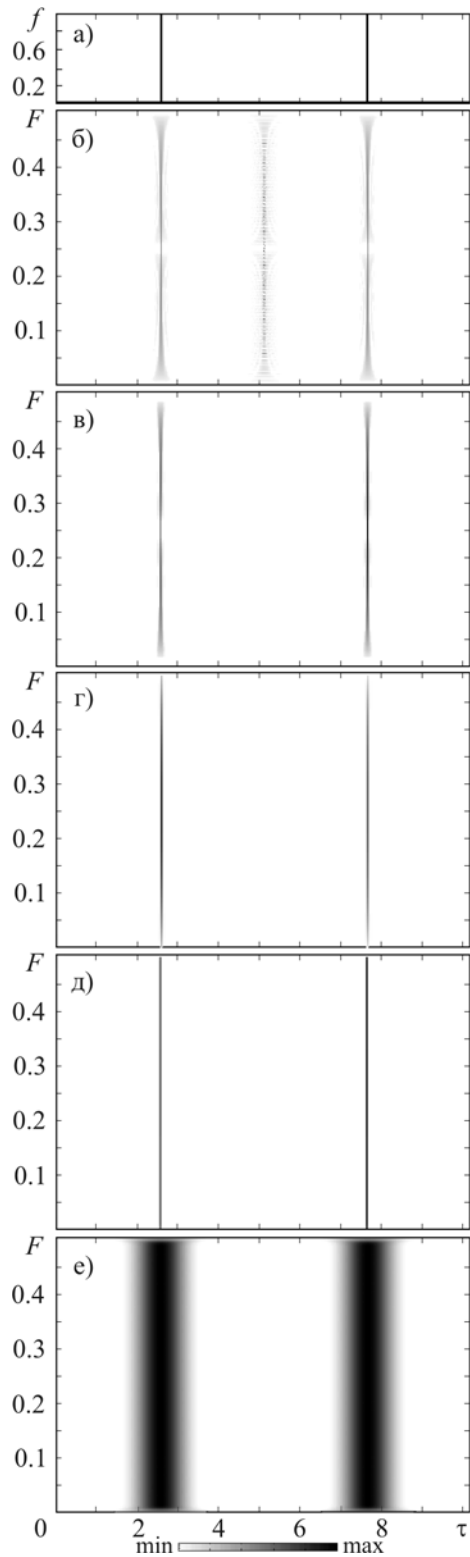
Обращаем внимание, что на рис. 1 – 21, б – е по вертикальной оси отложена безразмерная частота  $F$ , связанная с частотой  $\omega$  соотношением  $F = \omega/\omega_s$ , где  $\omega_s = 2\pi/T_s$ ,  $T_s$  – шаг по времени (в секундах) между двумя соседними точками дискретного вектора, с помощью которого задается анализируемый сигнал  $f(t)$



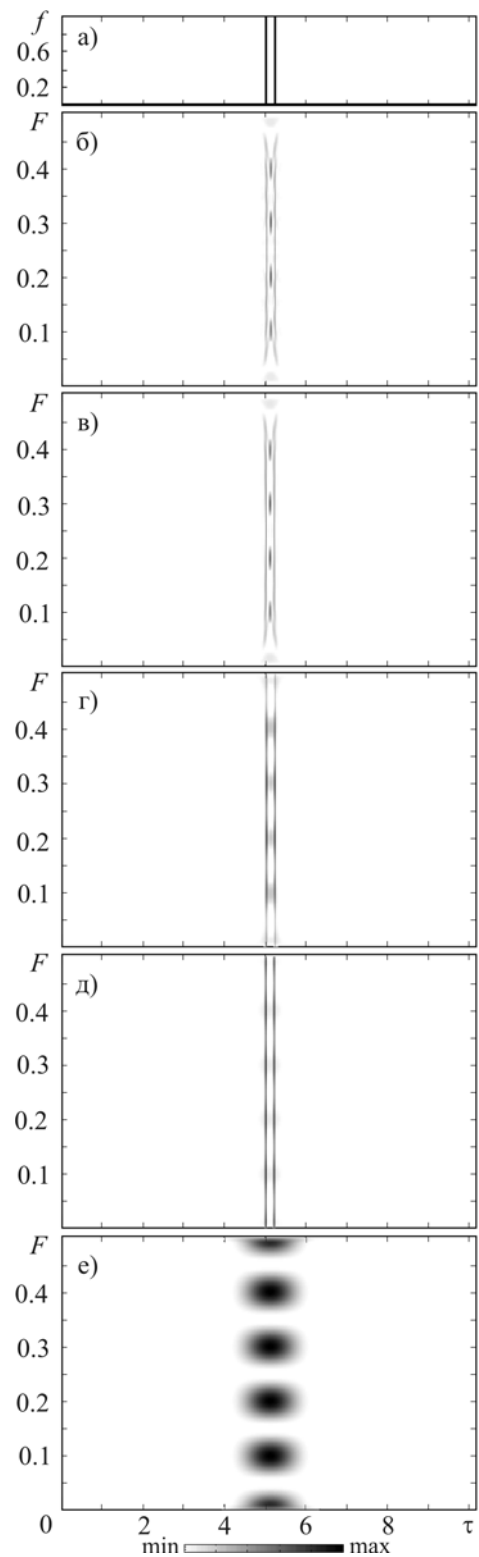
**Рис. 1.** Анализ функции  $\delta(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



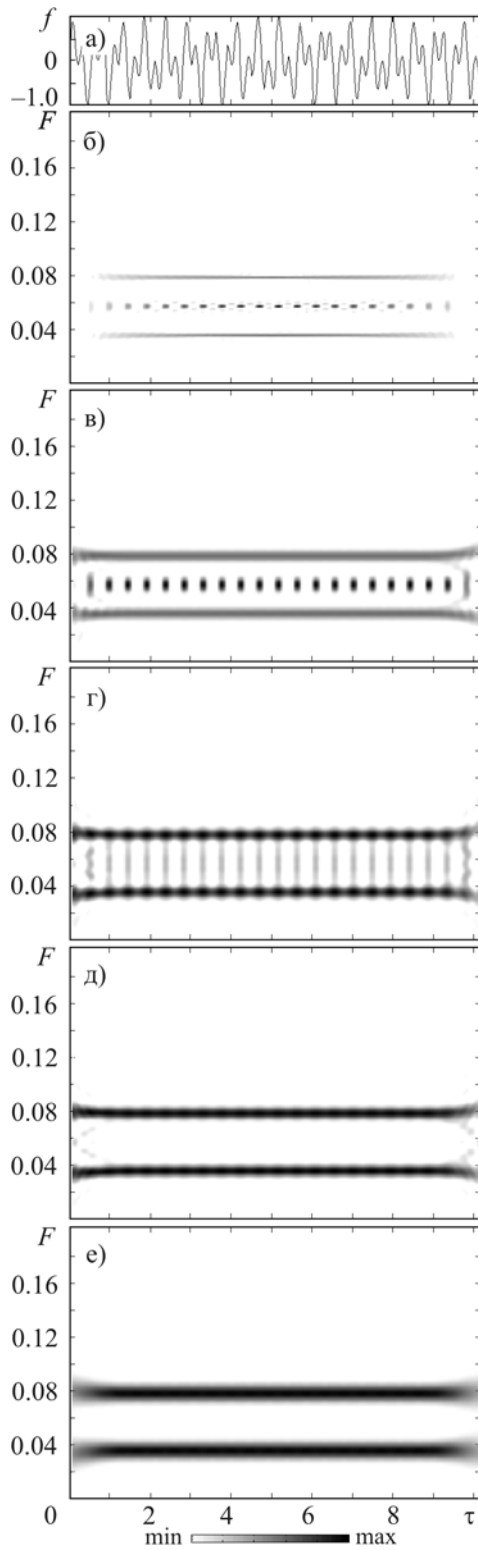
**Рис. 2.** Анализ функции  $\exp(i\omega_0 t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



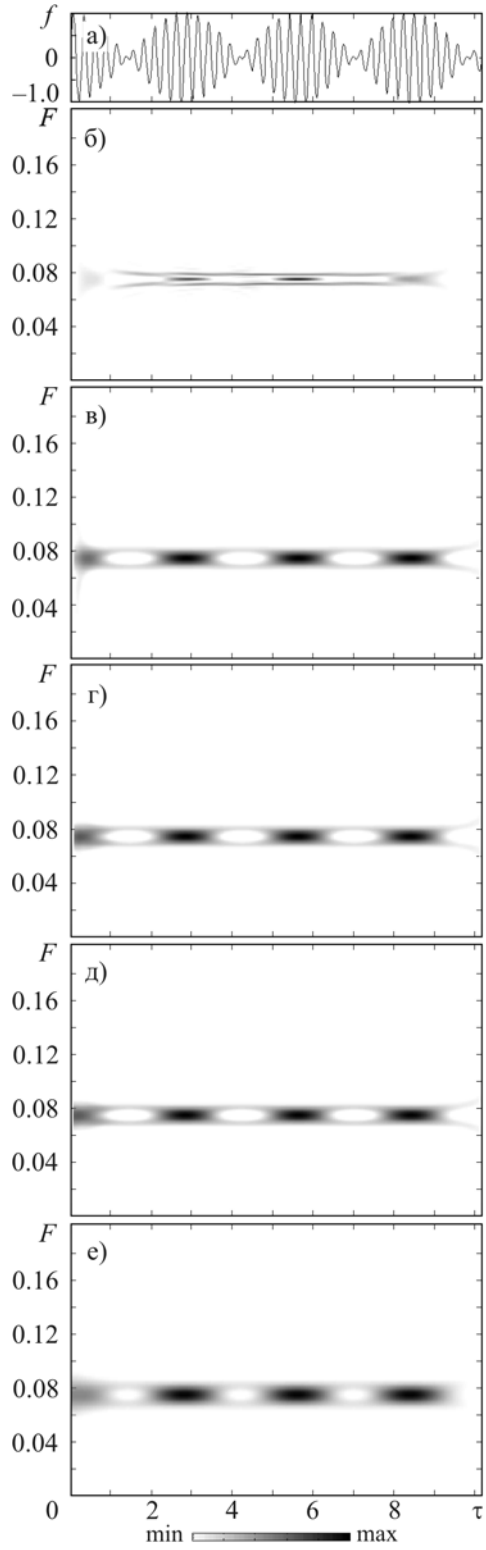
**Рис. 3.** Анализ функции  $\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)$  при  $t_0 = 3$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСППВ; в) – ФСППЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСППЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСППЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



**Рис. 4.** Анализ функции  $\delta(t-t_0)+\delta(t+t_0)$  при  $t_0 = 0.1$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСППВ; в) – ФСППЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСППЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСППЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ

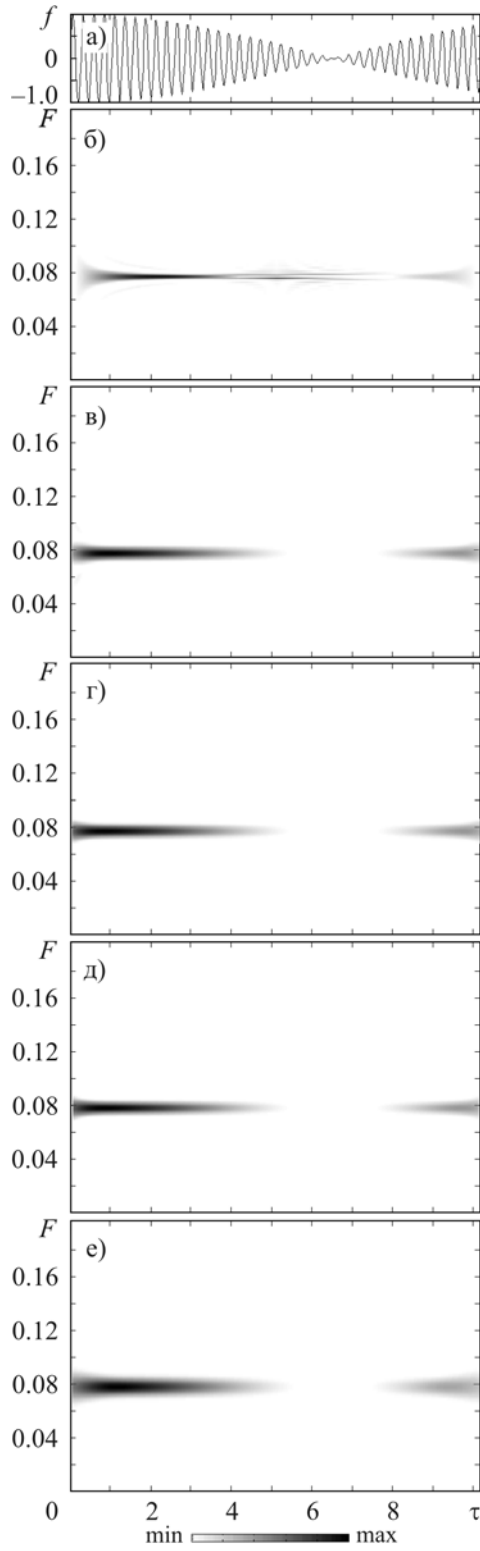


**Рис. 5.** Анализ функции  $\exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t)$  при  $\Delta\omega/\omega_0 = 1.3$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСПСФ

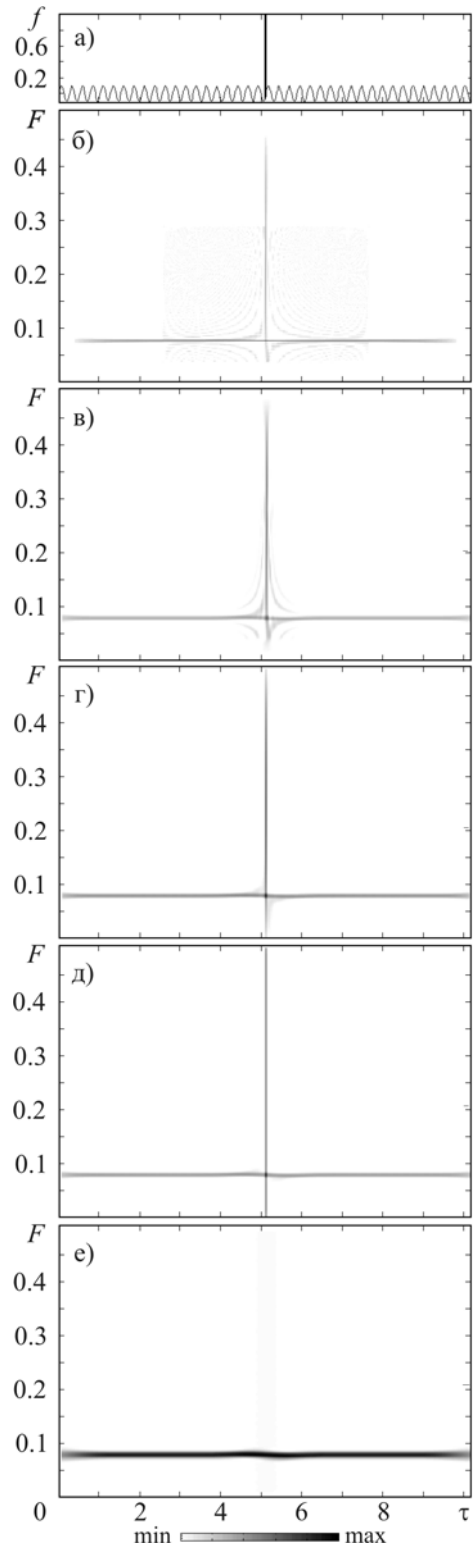


**Рис. 6.** Анализ функции  $\exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t)$  при  $\Delta\omega/\omega_0 = 0.2$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСПСФ

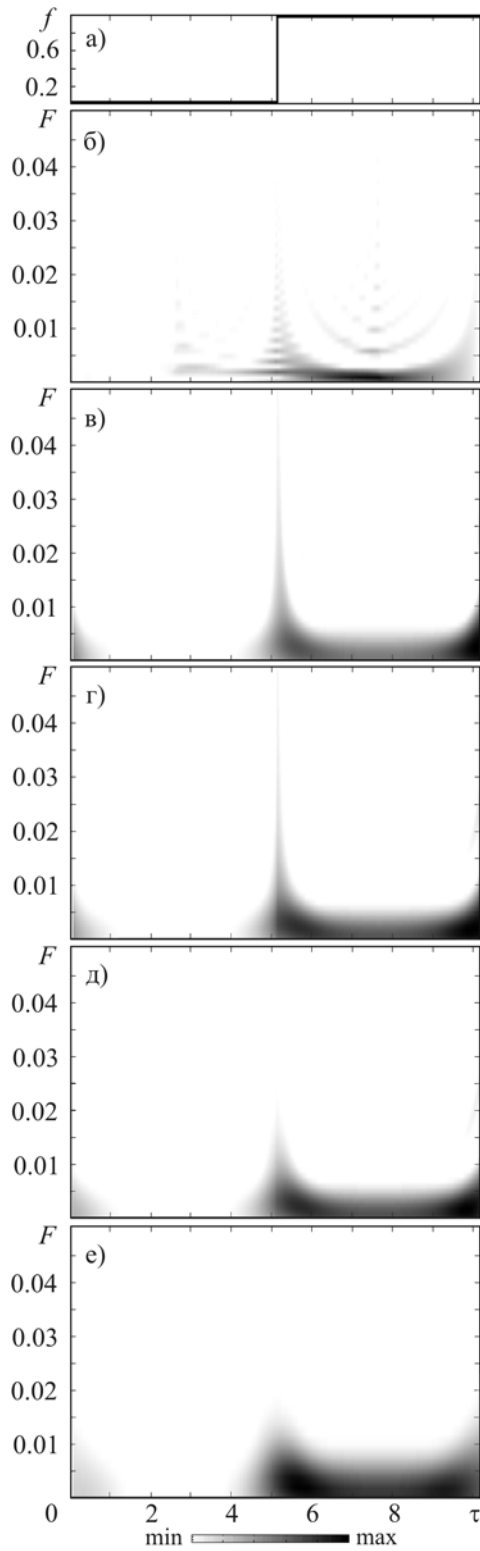




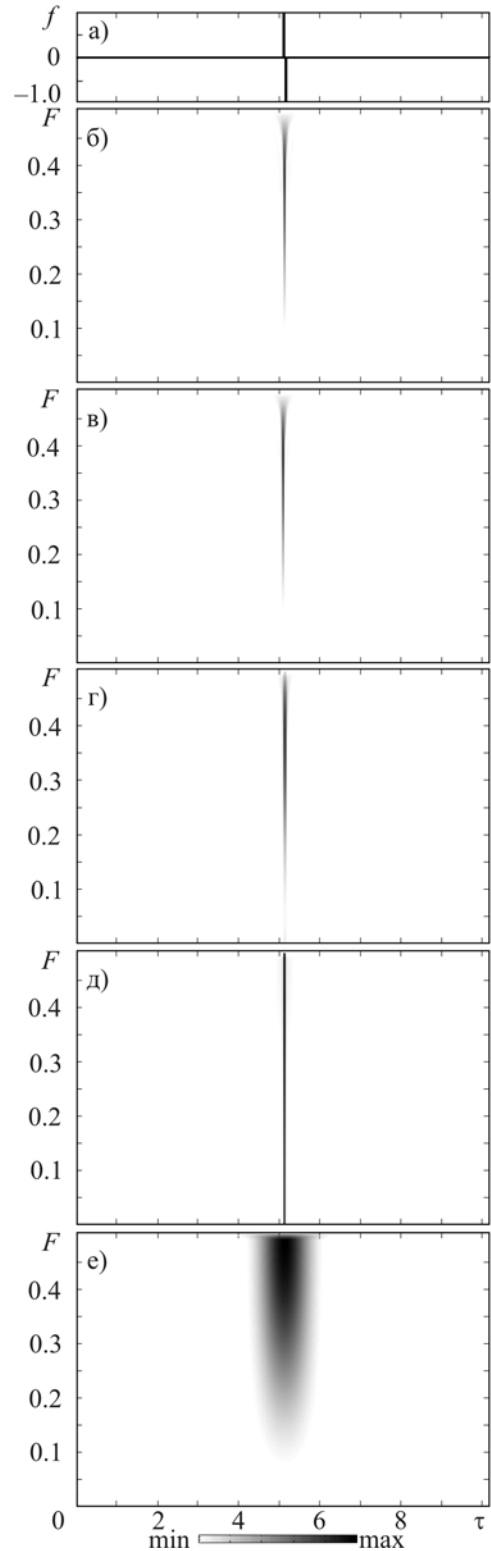
**Рис. 7.** Анализ функции  $\exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t)$  при  $\Delta\omega/\omega_0 = 0.02$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



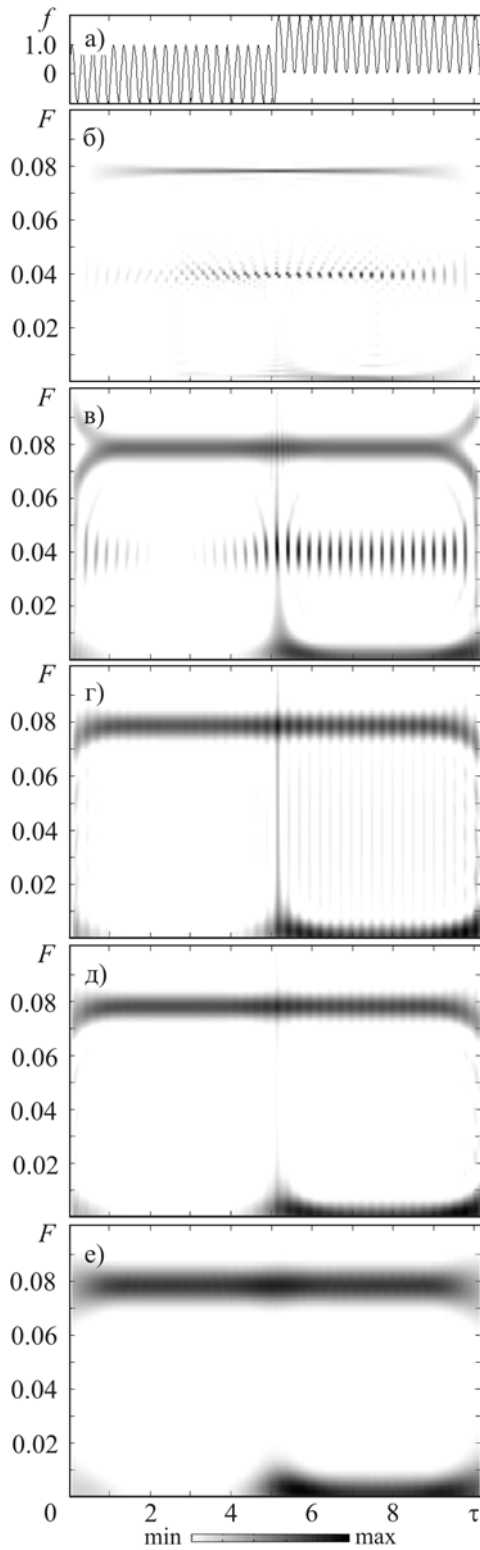
**Рис. 8.** Анализ функции  $\delta(t) + \exp(i\omega_0 t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



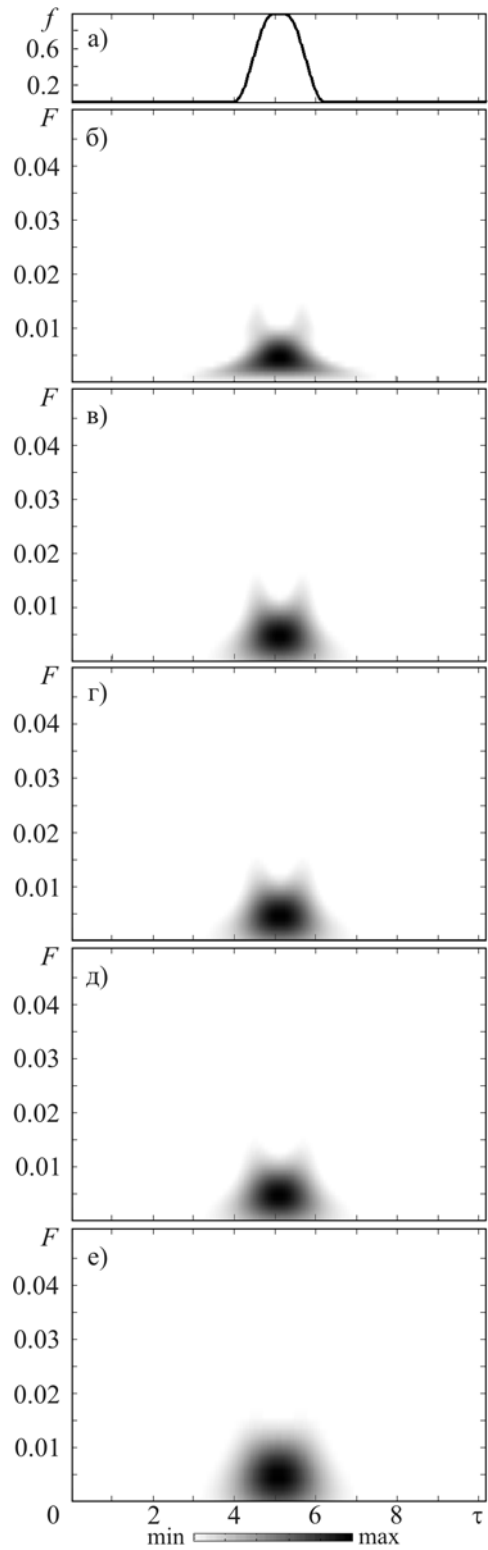
**Рис. 9.** Анализ функции  $\eta(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



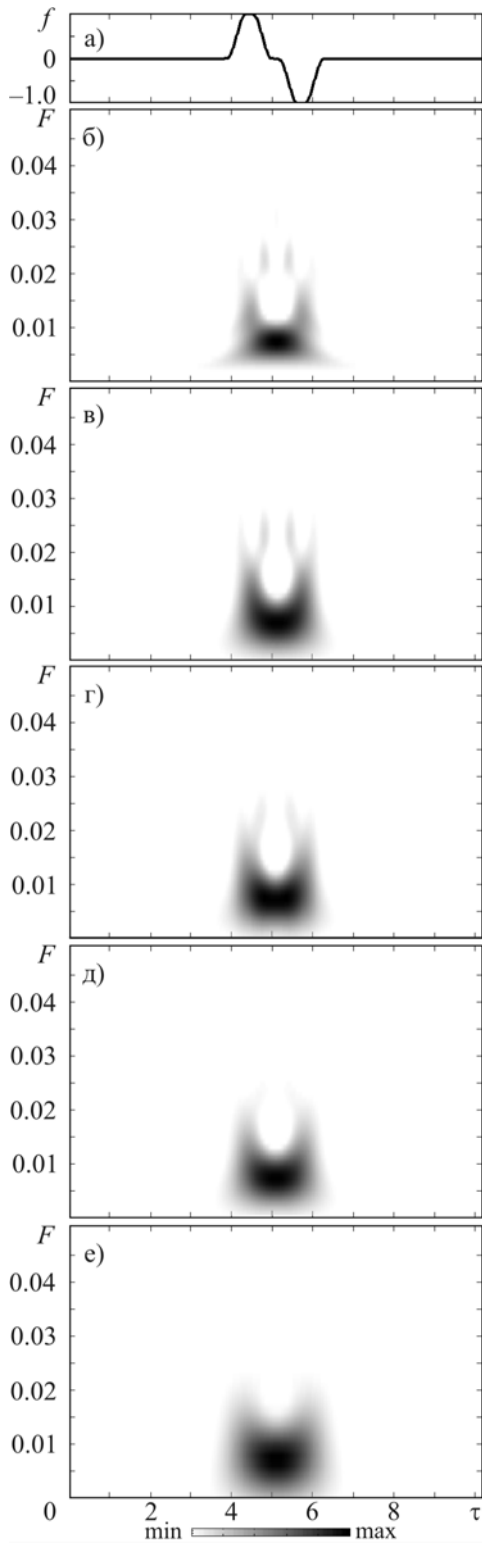
**Рис. 10.** Анализ функции  $d\delta/dt$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



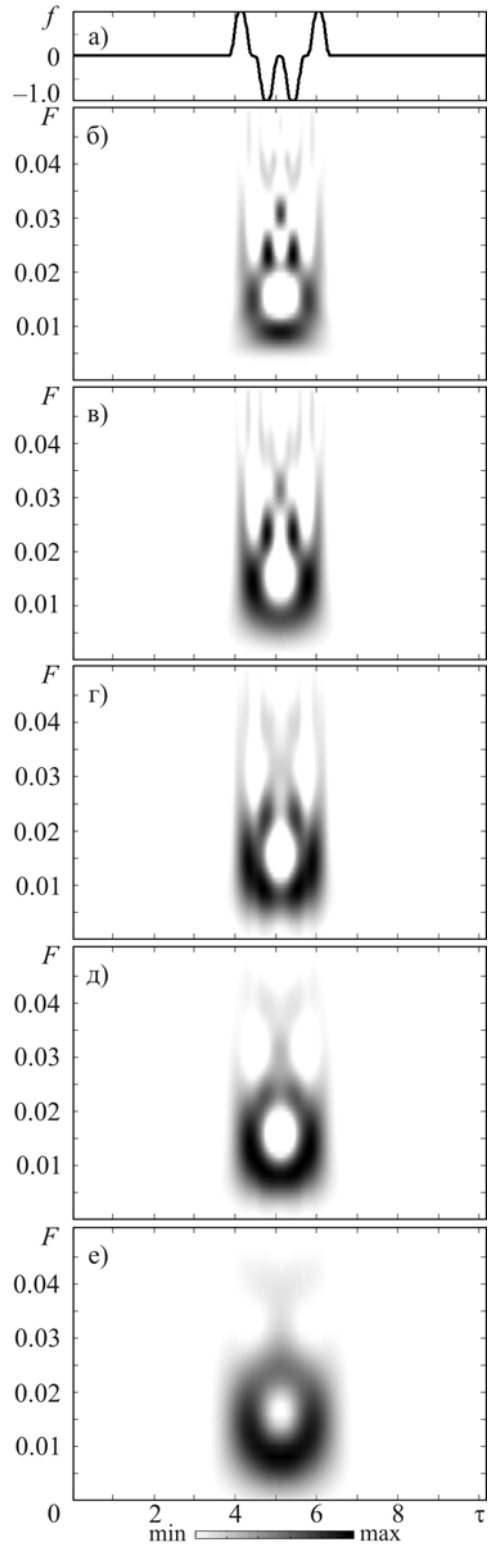
**Рис. 11.** Анализ функции  $\eta(t) + \exp(i\omega_0 t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



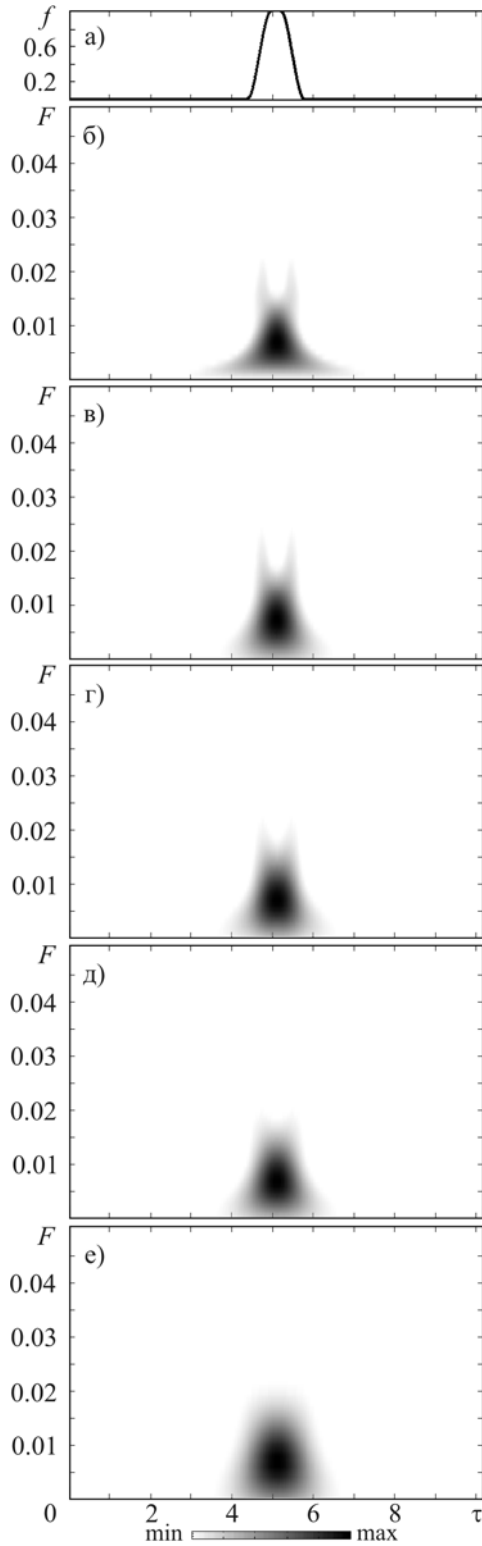
**Рис. 12.** Анализ функции  $\eta p(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



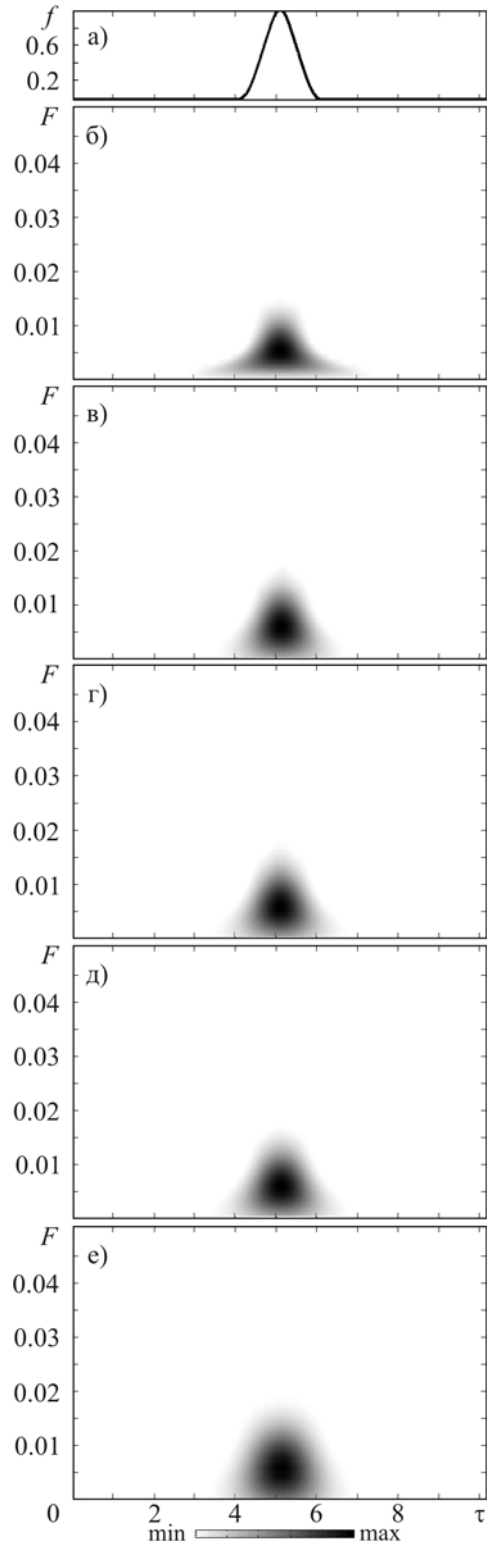
**Рис. 13.** Анализ функции  $ip'(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



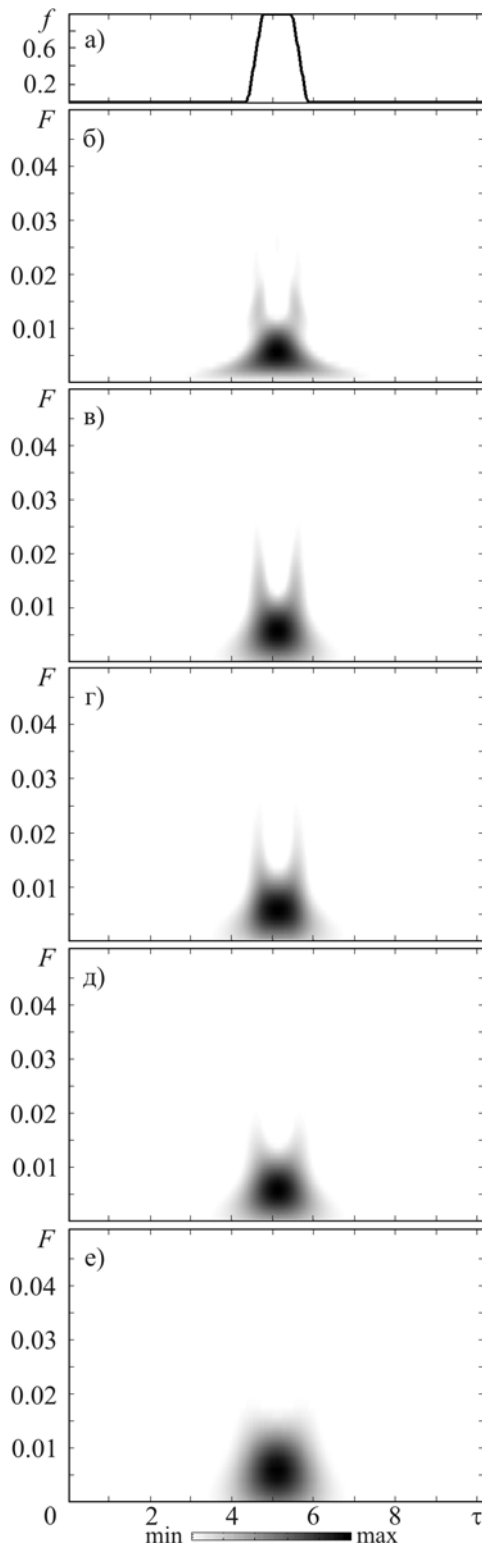
**Рис. 14.** Анализ функции  $ip''(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



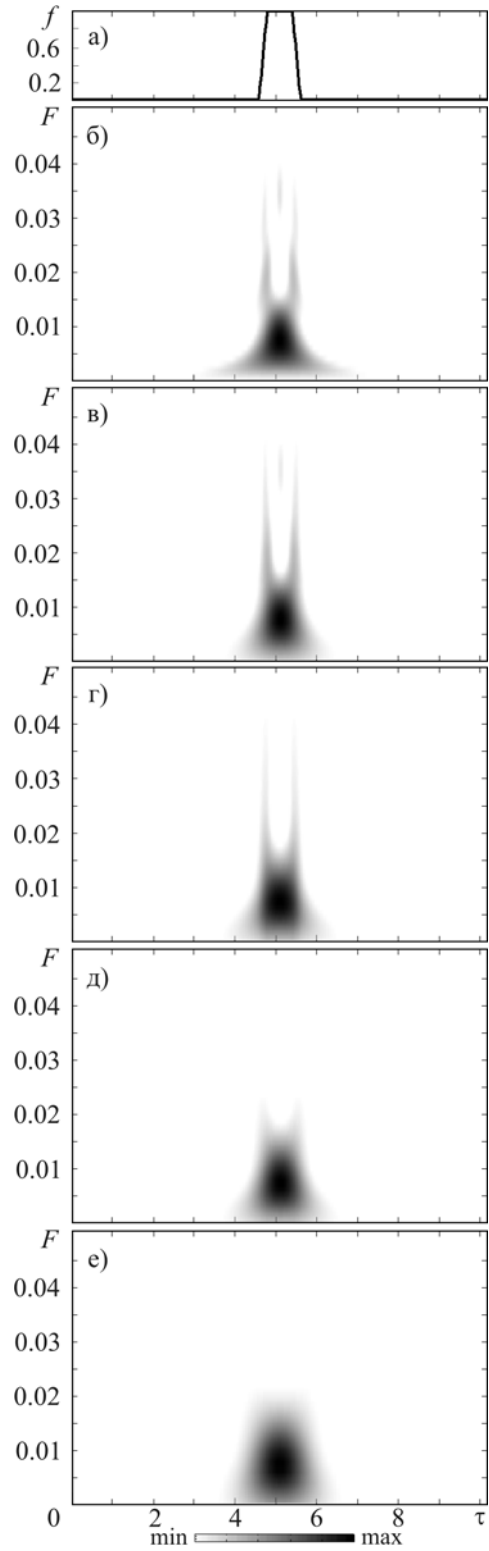
**Рис. 15.** Анализ функции  $f_{ir_1}(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



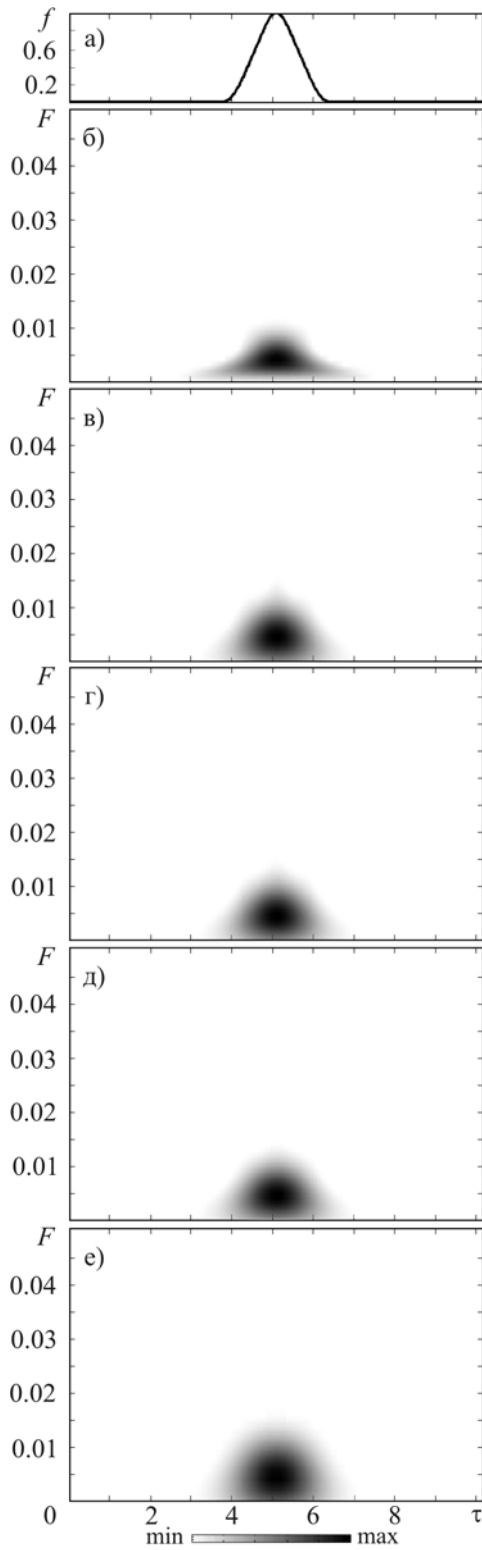
**Рис. 16.** Анализ функции  $f_{ir_2}(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



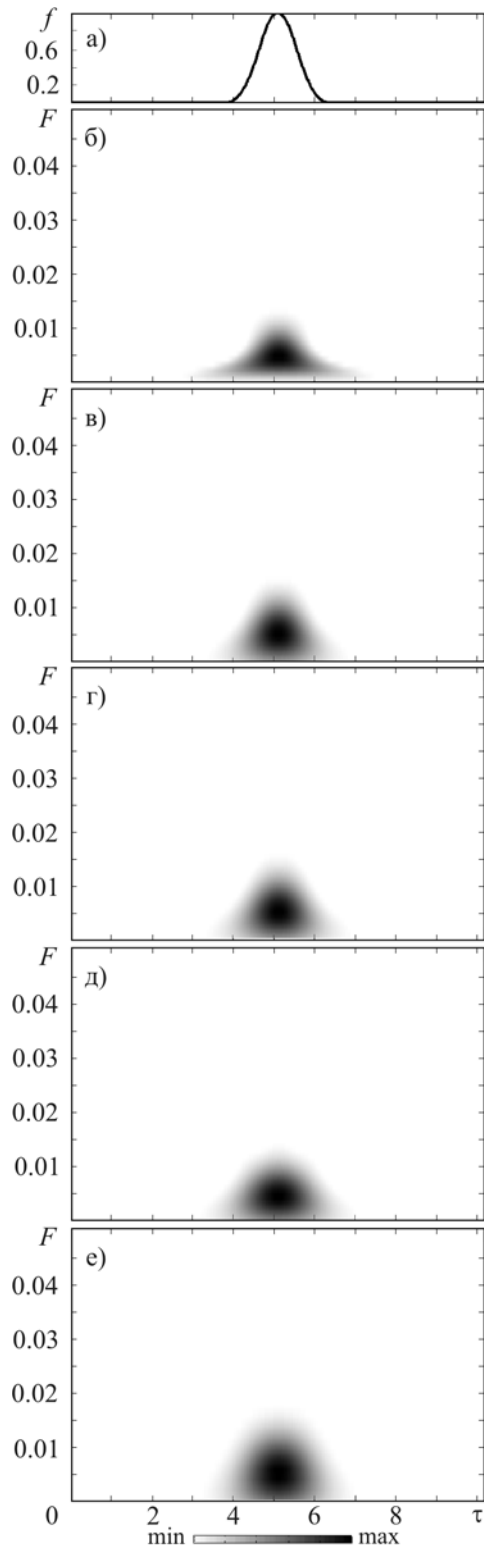
**Рис. 17.** Анализ функции  $h_3(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



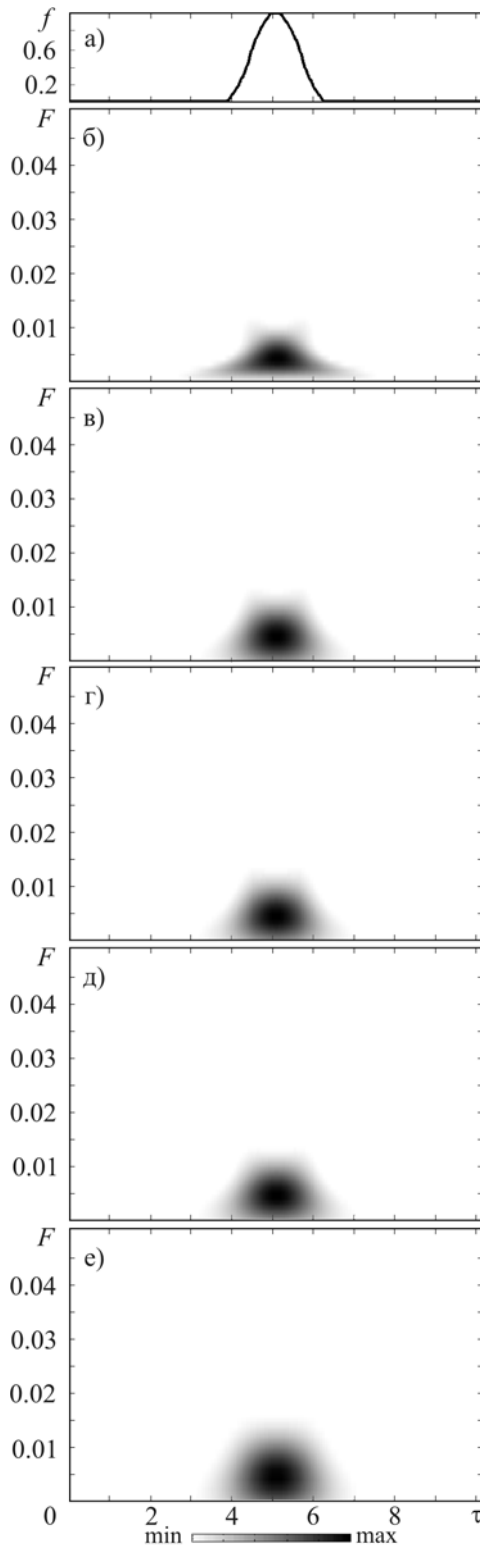
**Рис. 18.** Анализ функции  $h_4(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



**Рис. 19.** Анализ функции  $\Xi_2(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



**Рис. 20.** Анализ функции  $\Xi_3(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ



**Рис. 21.** Анализ функции  $w_{KR2}(t)$ : а) – сигнал во временной области; б) – ФСП ПВ; в) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 1000$ ; г) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 10$ ; д) – ФСП ПЧВ,  $\sigma = 0.01$ ; е) – ФСП СФ

при цифровой обработке. Частота  $F$  изменяется от 0 до 0.5, что определяется теоремой Найквиста–Котельникова.

Рассмотрим конкретные модели сигналов.

1)  $f(t) = \delta(t - t_0)$ , где  $\delta(t)$  – функция Дирака. Для этой модели

$$P_{CW}f(\tau, \omega) = \delta(\tau - t_0),$$

$$P_Sf(\tau, \omega) = w^2(\tau - t_0),$$

$$P_Vf(\tau, \omega) = \delta(\tau - t_0).$$

Важно отметить, что ПЧВ, как и ПВ, не увеличивает ширины носителя  $f(t)$  во временной области. Действительно, ФСП ПЧВ  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  (рис. 1, в–д) сохраняет нулевую ширину  $f(t)$  (рис. 1, а) вдоль  $\tau$ , тогда как для ФСП СФ  $P_Sf(\tau, \omega)$  (рис. 1, е) ширина определяется свойствами оконной функции  $w(t)$ , имеющей ненулевые размеры как в частотной, так и во временной областях.

2)  $f(t) = \exp(i\omega_0 t)$ . Для этой функции

$$P_{CW}f(\tau, \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0),$$

$$P_Sf(\tau, \omega) = |\hat{w}(\omega - \omega_0)|^2,$$

$$P_Vf(\tau, \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0),$$

где  $\hat{w}(\omega)$  – ФСП преобразования Фурье функции  $w(t)$ . Здесь наблюдается сохранение нулевой ширины носителя  $f(t)$  в частотной области для ФСП ПЧВ (рис. 2, в–д) так же, как и для ФСП ПВ (рис. 2, б), и его уширение для ФСП СФ (рис. 2, е). Характер возникающего уширения определяется видом  $\hat{w}(\omega)$ .

3)  $f(t) = \delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)$ . Для нее

$$P_{CW}f(\tau, \omega) = \delta(\tau - t_0) + \delta(\tau + t_0) +$$

$$+ \frac{1}{t_0} \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \exp\left(-\frac{\tau^2 \sigma}{16t_0^2}\right) \cos(2\omega t_0),$$

$$P_Sf(\tau, \omega) = w^2(\tau - t_0) + w^2(\tau + t_0) +$$

$$+ 2w(\tau + t_0)w(\tau - t_0)\cos(2\omega t_0),$$

$$P_Vf(\tau, \omega) = \delta(\tau - t_0) + \delta(\tau + t_0) + 2\delta(\tau)\cos(2\omega t_0).$$



Для суммы двух функций Дирака, например при  $t_0 = 3$  (рис. 3, а), в ФСП ПЧВ  $P_{CW}f(\tau, \omega)$ , кроме двух образов самих функций Дирака, наблюдается интерференция, описываемая третьим слагаемым достаточно сложного вида. Как и следовало ожидать, на частотно-временной плоскости ему соответствует локализованная во времени осциллирующая структура, располагающаяся точно посередине между образами двух исследуемых сигналов. Амплитуда этого слагаемого при конечном значении  $\sigma$  также является конечной. Поэтому по сравнению с бесконечными амплитудами первого и второго слагаемых она оказывается малой, а на соответствующих рисунках (рис. 3, в – д) – практически незаметной. Для ФСП ПВ ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) интерференционное слагаемое приобретает вид  $2\delta(\tau)\cos(2\omega t_0)$  и становится сравнимым с первыми двумя, хотя и имеет волновую структуру (рис. 3, б). В то же время для ФСП СФ  $P_Sf(\tau, \omega)$  (рис. 3, е) слагаемое  $2w(\tau+t_0)w(\tau-t_0)\cos(2\omega t_0)$  отлично от нуля лишь при перекрытии двух оконных функций, соответствующих каждому из сигналов. Если такого перекрытия нет, то интерференция не возникает. Платой за отсутствие интерференции является уширение носителей  $\delta$ -функций во временной области.

Если же перекрытие возникает, как например при  $t_0 = 0.1$ , то по ФСП СФ  $P_Sf(\tau, \omega)$  уже ничего нельзя сказать о виде исследуемого сигнала (рис. 4, е). В то же время на плоскостях ФСП ПВ  $P_Vf(\tau, \omega)$  (рис. 4, б) и ФСП ПЧВ  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  (рис. 4, в – д) сохраняется картина, аналогичная той, что наблюдается при отсутствии перекрытия на рис. 3, б и рис. 3, в – д соответственно. С уменьшением величины  $\sigma$ , а также с увеличением расстояния  $t_0$  между функциями Дирака амплитуда интерференционного слагаемого уменьшается.

4)  $f(t) = \exp(i(\omega_0 - \Delta\omega)t) + \exp(i(\omega_0 + \Delta\omega)t)$ .  
Для нее

$$P_{CW}f(\tau, \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + \Delta\omega) + 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - \Delta\omega) + \frac{\sqrt{\pi\sigma}}{\Delta\omega} \exp\left(-\frac{\sigma}{16}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2\right) \cos(2\Delta\omega\tau),$$

$$P_Sf(\tau, \omega) = |\hat{w}(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)|^2 + |\hat{w}(\omega - \omega_0 + \Delta\omega)|^2 + 2|\hat{w}(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)\hat{w}(\omega - \omega_0 + \Delta\omega)|\cos(2\Delta\omega\tau),$$

$$P_Vf(\tau, \omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - \Delta\omega) + 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + \Delta\omega) + 4\pi\delta(\omega - \omega_0)\cos(2\Delta\omega\tau).$$

В этом примере показательная зависимость вида  $P_{CW}f(\tau, \omega)$ ,  $P_Vf(\tau, \omega)$  и  $P_Sf(\tau, \omega)$  от соотношения значений частот гармонического сигнала  $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$  и  $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$ . Различные варианты возникающей интерференционной картины для  $\Delta\omega/\omega_0 = 1.3$ ,  $\Delta\omega/\omega_0 = 0.2$  и  $\Delta\omega/\omega_0 = 0.02$  представлены соответственно на рис. 5 – 7. Видно, что частотно-временное разрешение оказывается наилучшим у ПВ, но и у него есть предел: при  $\Delta\omega/\omega_0 = 0.02$  (рис. 7, б) сигналы оказываются уже неразличимыми. ПЧВ хорошо подавляет интерференционные слагаемые (рис. 5, д), однако при этом картина несколько размывается. Более того, с уменьшением величины  $\Delta\omega/\omega_0$  его возможности ухудшаются. Так, уже при  $\Delta\omega/\omega_0 = 0.2$  (рис. 6, д) результат мало чем отличается от СФ (рис. 6, е).

5)  $f(t) = \delta(t) + \exp(i\omega_0 t)$ . Для нее

$$P_{CW}f(\tau, \omega) = \delta(\tau) + 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma}{16}\right) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((\omega - \omega_0)\tau\sqrt{\sigma}z/2)}{z} \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2z}\right) dz,$$

$$P_Sf(\tau, \omega) = w^2(\tau) + |\hat{w}(\omega - \omega_0)|^2 + 2w(\tau)|\hat{w}(\omega - \omega_0)|\cos((\omega - \omega_0)\tau),$$

$$P_Vf(\tau, \omega) = \delta(\tau) + 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 4\cos(2\tau(\omega - \omega_0)).$$

Наглядной демонстрацией частотно-временных свойств рассматриваемых преобразований является пример, в котором одновременно проанализированы функция Дирака и гармоническая функция (рис. 8, а). На ФСП ПВ (рис. 8, б) и ФСП ПЧВ (рис. 8, в – д) они присутствуют обе, а на ФСП СФ (рис. 8, е),

по крайней мере с использованием данного окна (окно Натолла), наблюдается только синусоида. Интерференция на плоскостях  $P_{CW}f(\tau, \omega)$ , (рис. 8, в–д) и  $P_Vf(\tau, \omega)$  (рис. 8, б) почти не заметна, поскольку интерференционный член имеет сравнительно малую интенсивность. В последнем легко убедиться, рассмотрев соответствующие аналитические выражения. К сожалению, для  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  интеграл в элементарных функциях вычислить не удастся. Однако его величина является конечной, что и показывает малость интерференционного слагаемого относительно образов самих сигналов.

Вычисление аналитических выражений для ФСП ПЧВ  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  оказывается еще более сложным, чем для ФСП ПВ  $P_Vf(\tau, \omega)$ , а потому получить удовлетворительный результат возможно лишь в простейших случаях, часть из которых рассмотрена выше. На практике основным способом проведения ПЧВ, как и ПВ, являются численные расчеты с помощью систем компьютерной математики (СКМ). Именно так мы и поступим с ниже приведенными модельными сигналами. В настоящей работе нами использовались пакеты WaveLab 8.50 и TimeFreq Toolbox для СКМ MATLAB 7.X (см., например, [24, 38, 39]).

$$6) f(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Функция Хэвисайда  $\eta(t)$  интересна тем, что представляет собой модель идеальной ударной волны (УВ) (рис. 9, а). Использование ПВ для анализа различных УВ было подробно рассмотрено в работе [21]. С помощью выбора величины параметра  $\sigma$  для ФСП ПЧВ удастся эффективно подавить интерференцию (рис. 9, в, г), неизбежно присутствующую на ФСП ПВ (рис. 9, б), одновременно сохранив информацию о местоположении фронта УВ, которая на ФСП СФ оказывается сильно искаженной (рис. 9, е).

$$7) f(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}.$$

Производная функции Дирака (рис. 10, а) является предельным случаем ультракороткого СШП сигнала. Анализ показывает, что заданный сигнал только по ФСП ПВ (рис. 10, б)

или ФСП ПЧВ (рис. 10, в–д) сложно отличить от функции Дирака  $\delta(t - t_0)$  (рис. 1, б и рис. 1, в–д соответственно), а только по ФСП СФ (рис. 10, е) его можно перепутать с конечным СШП сигналом. Это наталкивает на мысль о необходимости совместного рассмотрения  $P_Vf(\tau, \omega)$ ,  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  и  $P_Sf(\tau, \omega)$ , чтобы сделать правильный вывод о характере имеющегося сигнала.

$$8) f(t) = \eta(t) + \exp(i\omega_0 t).$$

При анализе суммы гармонической функции и функции Хэвисайда (рис. 11, а) обе компоненты сигнала хорошо наблюдаются как на ФСП ПЧВ (рис. 11, в–д), так и на ФСП СФ (рис. 11, е). Традиционно у ФСП ПВ (рис. 11, б) лучше частотно-временное разрешение, а на ФСП СФ (рис. 11, е) полностью отсутствуют интерференционные члены. Здесь следует отметить, что на плоскости  $P_Vf(\tau, \omega)$  (рис. 11, б) хорошо наблюдается синусоида и ее интерференция с функцией Хэвисайда, а сама функция Хэвисайда просматривается слабо. Динамика подавления интерференционной картины на плоскости  $P_{CW}f(\tau, \omega)$  (рис. 11, в–д) позволяет убедиться в интерференционном характере подавленных фрагментов. Этот пример также свидетельствует о целесообразности одновременного применения рассматриваемых преобразований.

### 3. Применение чои–вильямс-анализа к исследованию атомарных функций

В качестве сигналов, к которым будет применено ПЧВ, выберем некоторые атомарные функции (АФ) и окна Кравченко–Рвачева, построенные на их основе [8, 10, 11]. Интерес к анализу именно этих сигналов обусловлен следующим.

АФ, как и, например, популярные сегодня вейвлеты, относятся к классу R-функций. Сама же теория R-функций, разработанная академиком В. Л. Рвачевым и его учениками, является основой для ряда современных методов обработки и анализа сигналов. Подробно возможности АФ описаны в недавно опубликованных монографиях [10, 11], а также в лекционном курсе [8]. Более строгое математическое описание теории R-функций можно найти в работах [40, 41]. Здесь приведем только основные определения используемых нами АФ [10, 11].

Материнская функция  $up(t)$  является решением уравнения

$$y'(t) = 2y(2t+1) - 2y(2t-1)$$

и на интервале  $t \in [-1, 1]$  имеет следующее представление на основе преобразования Фурье:

$$up(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iut) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(u \cdot 2^{-k})}{u \cdot 2^{-k}} du.$$

Вид функции  $up(t)$ , а также ее первой и второй производных показан на рис. 12, а, рис. 13, а и рис. 14, а соответственно.

Атомарная функция  $fup_N(t)$ , полученная интегральной сверткой сплайна  $\theta_{N-1}(t)$  и материнской функции  $up(t)$  и определенная на интервале  $t \in [-(N+2)/2, (N+2)/2]$ , имеет вид:

$$fup_N(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iut) \left( \frac{\sin(u/2)}{u/2} \right)^N \times \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(u \cdot 2^{-k})}{u \cdot 2^{-k}} du.$$

Очевидно, что  $fup_0(t) = up(t)$ . Вид функции  $fup_N(t)$  при  $N = 1$  и  $N = 2$  приведен на рис. 15, а и рис. 16, а соответственно.

Атомарная функция  $h_a(t)$ , являющаяся финитным решением уравнения

$$y'(t) = \frac{a^2}{2} (y(at+1) - y(at-1)),$$

может быть записана как

$$h_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iut) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(u \cdot a^{-k})}{u \cdot a^{-k}} du, \quad a > 1.$$

Легко показать, что  $h_2(t) = up(t)$ . Вид функции  $h_a(t)$  при  $a = 3$  и  $a = 4$  показан на рис. 17, а и рис. 18, а соответственно.

Атомарная функция  $\Xi_n(t)$ , являющаяся решением уравнения

$$y^{(n)}(t) = a \sum_{k=0}^n C_k^n (-1)^k y[(n+1)t + n - 2k]$$

и финитная для  $t \in [-1, 1]$ , имеет вид:

$$\Xi_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iut) \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin(u \cdot (n+1)^{-k})}{u \cdot (n+1)^{-k}} \right)^n du.$$

Ясно, что  $\Xi_1(t) = up(t)$ . Вид функции  $\Xi_n(t)$  при  $n = 2$  и  $n = 3$  показан на рис. 19, а и рис. 20, а соответственно.

На основе приведенных АФ построен целый класс спектральных оконных функций во временной области, называемых окнами Кравченко–Рвачева (см., например, [8, 10, 11]). Некоторые из них имеют вид:

$$w_{KR1}(t) = up(t),$$

$$w_{KR2}(t) = up(t) + 0.01up''(t),$$

$$w_{KR3}(t) = fup_1(3t/2)/fup_1(0),$$

$$w_{KR4}(t) = \Xi_2(t)/\Xi_2(0).$$

Очевидно, что окно  $w_{KR1}(t)$  полностью совпадает с АФ  $up(t)$ , а окна  $w_{KR3}(t)$  и  $w_{KR4}(t)$  являются нормированными на максимум функциями  $fup_1(t)$  и  $\Xi_2(t)$  соответственно. Поэтому далее отдельно будем обсуждать только окно  $w_{KR2}(t)$  (рис. 21, а).

Всем АФ и окнам Кравченко–Рвачева свойственна хорошая локализация как в частотной, так и во временной областях. ПЧВ также обладает хорошими частотно-временными свойствами. Представляет интерес проследить, насколько адекватно это преобразование отражает локальные особенности каждой из АФ.

Результаты анализа приведенных выше АФ и окон Кравченко–Рвачева, построенных на их основе, показаны на рис. 12 – 21. Рассмотрим их подробнее.

Установлено, что ФСП ПЧВ (рис. 12, в – д) материнской АФ  $ur(t)$  (рис. 12, а), как и ФСП ПВ (рис. 12, б), имеет характерный вид с “провалом” посередине. С уменьшением  $\sigma$  он становится менее выраженным. На ФСП СФ (рис. 12, е) такого “провала” нет.

У окна Кравченко–Рвачева  $w_{KR2}(t)$  (рис. 21, а), построенного на основе этой же функции  $ur(t)$  характерный “провал” заметен только в ФСП ПВ  $P_V f(\tau, \omega)$  (рис. 21, б).

Для первой производной функции  $ur(t)$  (рис. 13, а) на ФСП ПВ (рис. 14, б) и ФСП ПЧВ (рис. 13, в) тоже хорошо видны два таких же характерных, как и у  $ur(t)$ , локализованных образования, входящих в состав более сложной структуры. Два максимума, расположенные между ними, судя по всему носят интерференционный характер, о чем свидетельствует их постепенное исчезновение при уменьшении значения параметра  $\sigma$  (рис. 13, г, д).

Еще более сложную структуру имеет ФСП ПЧВ второй производной функции  $ur(t)$ . Результаты ее анализа приведены на рис. 14.

Обратим внимание на то, что первая и вторая производная функции  $ur(t)$  могут использоваться как удобные модели ультракоротких СШП сигналов во временной области [22].

Нами был проанализирован также ряд других АФ. В качестве примеров приведены результаты для  $f_{ur1}(t)$ ,  $f_{ur2}(t)$ ,  $h_3(t)$ ,  $h_4(t)$ ,  $\Xi_2(t)$  и  $\Xi_3(t)$  на рис. 15 – 20 соответственно.

Обращает на себя внимание тот факт, что ФСП ПВ и ФСП ПЧВ функций  $f_{ur1}(t)$  (рис. 15, б – д),  $h_3(t)$  (рис. 17, б – д) и  $h_4(t)$  (рис. 18, б – д) содержат характерные образования с “хвостами” в верхней части, похожие на те, что наблюдались для функции  $ur(t)$ . В то же время ФСП ПВ и ФСП ПЧВ функций  $f_{ur2}(t)$  (рис. 16, б – д),  $\Xi_2(t)$  (рис. 19, б – д) и  $\Xi_3(t)$  (рис. 20, б – д) таких “хвостов” не имеют. Это объясняется тем, что функции первой группы, как и функция  $ur(t)$ , имеют в области определения пару точек, вблизи которых происходит резкое изменение первой производной, а функции второй группы – нет. В то же время ФСП СФ для АФ (рис. 12, 15 – 21, е) по внешнему виду почти не отличаются друг от друга.

#### 4. Обсуждение результатов

Проведенные исследования и полученные результаты позволяют отметить следующее.

ПЧВ, являясь одним из частотно-временных преобразований класса Коэна, обладает рядом достоинств. К ним относятся хорошее частотно-временное разрешение, инвариантность относительно сдвигов по фазе, частоте и времени, а также наличие маргинальных распределений. Кроме того, как и ПВ [9], будучи квадратичным по исследуемому сигналу, ПЧВ является одним из возможных методов нелинейной обработки сигналов, которая получает все большее распространение. Сказанное справедливо, например, при наличии помех, закон распределения которых заметно отличается от нормального. Линейная обработка в этом случае оказывается неэффективной из-за скоррелированности составляющих в разложениях. С другой стороны, наличие параметра  $\sigma$ , позволяющего управлять уровнем интерференционных членов, дает возможность частично решить проблему возникновения интерференции между сигналами, а также между сигналом и помехой, характерную для ПВ.

Указанные достоинства ПЧВ привели к тому, что оно наряду с непрерывным и аналитическим вейвлет-преобразованиями, адаптивным и динамическим (оконным) преобразованиями Фурье, преобразованиями Габора, Вигнера и Борна–Жордана вошло в состав системного спектрального анализа – нового комплексного метода анализа сигналов, в котором недостатки одних преобразований компенсируются достоинствами других [17].

ПЧВ несвободно от недостатков. Первым можно назвать сложность интеграла (1), что делает данное преобразование практически бесполезным при проведении аналитических расчетов. Вторым недостатком является то, что при уменьшении значения параметра  $\sigma$ , позволяющего снизить уровень интерференционных членов, одновременно подавляются и локальные особенности самого исследуемого сигнала, а значит, ухудшается частотно-временное разрешение. Последнее наводит на мысль о целесообразности совместного использования ПВ и ПЧВ при анализе сигналов.

Третьим недостатком ПЧВ является несимметричность характера подавления интерференции вдоль прямых  $\omega = \text{const}$  и  $\tau = \text{const}$ . В первом случае интерференция подавляется гораздо более эффективно (см., например, [24]).

Представляет интерес сравнение возможностей ПЧВ и ДПФ, а также СФ.

С одной стороны, ДПФ является линейным преобразованием сигнала, но в отличие от ПЧВ не обладает инвариантностью относительно сдвигов по фазе, частоте и времени. К тому же частотно-временное разрешение ДПФ определяется характеристиками спектрального окна и оказывается хуже, чем у ПЧВ. Платой за хорошее частотно-временное разрешение ПЧВ является наличие интерференции в ФСП ПЧВ.

С другой стороны, СФ, как и ПЧВ, обладает инвариантностью относительно сдвигов по фазе, частоте и времени, но в отличие от последнего не имеет маргинальных распределений и обладает худшим частотно-временным разрешением.

Важно также отметить, что СФ не может быть получена из ПЧВ предельным переходом  $\sigma \rightarrow 0$  подобно тому, как при  $\sigma \rightarrow \infty$  из него получается ПВ. Тем не менее при  $\sigma \rightarrow 0$  ФСП ПЧВ по своему внешнему виду приближается к ФСП СФ, что можно увидеть на приведенных выше рисунках.

Итак, при совместном использовании ПВ, СФ и ПЧВ первое может позволить достаточно точно определить частотно-временную локализацию исследуемого сигнала, второе – отсеять ложные “сигналы”, возникающие из-за интерференции в ФСП ПВ, а третье – пронаблюдать процесс подавления интерференции в динамике и отделить интерференционные члены от локальных особенностей сигнала, которые в СФ могут быть потеряны из-за ее недостаточного частотно-временного разрешения.

ПЧВ, обладающее хорошим частотно-временным разрешением, перспективно применять для анализа новых классов сигналов, в частности, основанных на АФ, окнах Кравченко–Рвачева, R-функциях, вейвлетах и т. п., поскольку такие сигналы в отличие от классических узкополосных сигналов являются достаточно хорошо локализованными во временной области.

Таким образом, на простых примерах мы рассмотрели основные особенности ПЧВ и сравнили его возможности с возможностями традиционного ДПФ. Имея свои характерные достоинства и недостатки, оба этих преобразования хорошо дополняют друг друга, а потому рекомендуется использовать их для анализа сигналов совместно.

## Выводы

1. ПЧВ является одним из квадратичных частотно-временных распределений, относящихся к классу Козна.

2. Достоинства ПЧВ состоят в хорошей частотно-временной локализации и инвариантности относительно сдвигов фазы, времени и частоты. Его возможности по выявлению частотно-временной локализации сигналов превосходят возможности ДПФ.

3. Предполагается, что квадратичность ПЧВ может обеспечить повышение эффективности нелинейных методов фильтрации сигнала на фоне негауссовых помех (помех с ненулевыми высшими моментами распределений).

4. Основным преимуществом ПЧВ перед ПВ является наличие параметра, регулирующего уровень интерференционных членов.

5. Недостатками ПЧВ являются возникновение интерференции при анализе суммы нескольких сигналов, приводящей к появлению в ФСП ложных экстремумов, а также то, что при уменьшении значения параметра  $\sigma$ , управляющего уровнем интерференционных членов, вместе с ними подавляются и локальные особенности сигнала, а следовательно, снижается частотно-временное разрешение. Определенные неудобства создает также несимметричность характера подавления интерференции вдоль прямых  $\omega = \text{const}$  и  $\tau = \text{const}$ .

6. ПЧВ предлагается использовать совместно с ПВ и СФ для анализа детерминированных, случайных и фрактальных сигналов различной природы.

7. Применение ПЧВ перспективно для анализа новых классов сигналов, в частности, основанных на АФ, окнах Кравченко–Рвачева, R-функциях, вейвлетах и т. п.

## Литература

1. Астанин Л. Ю., Костылев А. А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. – М: Радио и связь, 1989. – 192 с.
2. Хармут Х. Ф. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1985. – 376 с.
3. Ultra Wideband Wireless Communication / Edited by Huseyin Arslan, Zhi Ning Chen, Maria-Gabriella Di Benedetto. – New Jersey: Wiley-Interscience, 2006. – 524 p.
4. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения кратковременных знакопеременных и сверхширокополосных процессов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2004. – Т. 9, №9-10. – С. 31-62.
5. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Фрактальные сверхширокополосные сигналы // Радиофизика и радиоастрономия. – 2005. – Т. 10, №1. – С. 62-84.
6. Дмитриев А. С., Кузьмин Л. В., Панас А. И., Пузиков Д. Ю., Старков С. О. Прямохаотические системы связи // Успехи современной радиоэлектроники. – 2003. – №9. – С. 40-56.
7. Кравченко В. Ф., Рвачев В. А., Рвачев В. Л. Математические методы обработки сигналов на основе атомарных функций // Радиотехника и электроника. – 1995. – Т. 40, №9. – С. 1385-1406.
8. Кравченко В. Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. – М.: Радиотехника, 2003. – 512 с.
9. Вишневский О. В., Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Преобразование Вигнера и атомарные функции в цифровой обработке сигналов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2006. – Т. 11, №6. – С. 26-38.
10. Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. – М.: Физматлит, 2006. – 416 с.
11. Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Гусевский В. И. Конструктивные методы аппроксимации в теории антенн. – М.: Сайнс-Пресс, 2005. – 512 с.
12. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
13. The Transforms and Applications Handbook: Second Edition / Edited by Alexander D. Poularikas. – Boca Raton: CRC Press LLC, 2000. – 1335 p.
14. The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing / Edited by Alexander D. Poularikas. – Boca Raton: CRC Press LLC, 1999. – 1335 p.
15. Лазоренко О. В., Панасенко С. В., Черногор Л. Ф. Адаптивное преобразование Фурье // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2005. – Т. 10, №10. – С. 39-50.
16. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Vishnivezky O. V. System spectral analysis of the non-linear ultrawideband signals // In Proceedings of the Sixth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves and Workshop on Terahertz Technologies, Kharkov, Ukraine, June 25-30, 2007. – Kharkov. – 2007. – Vol. 2. – P. 980-982.
17. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Системный спектральный анализ сигналов: теоретические основы и практические применения // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №2. – С. 162-181.
18. Коэн Л. Время-частотные распределения: Обзор // ТИИЭР. – 1989. – Т. 77, №16. – С. 72-120.
19. Choi H.-J., Williams W. J. Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1989. – Vol 37, No. 6. – P. 862-871.
20. Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Пустовойт В. И., Черногор Л. Ф. Преобразование Вигнера в обработке сигналов // ДАН РАН. – 2006. – Т. 410. – С. 38-41. Kravchenko V. F., Lazorenko O. V., Pustovoi V. I., and Chernogor L. F. Wigner transformation in digital processing of signals // Doklady Physics. – 2006. – Vol. 51, No. 9. – P. 461-464.
21. Вишневский О. В., Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Применение преобразования Вигнера для анализа нелинейных волновых процессов // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №3. – С. 295-310.
22. Lazorenko O. V. Ultrawideband signals and Choi-Williams transform // In Proc. Int. Conf. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals. – Sevastopol (Ukraine). – 2006. – P. 300-302.
23. Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Пустовойт В. И., Черногор Л. Ф. Преобразование Чои–Вильямса и атомарные функции в цифровой обработке сигналов // ДАН РАН. – 2007. – Т. 413, №6. – С. 750-753. Kravchenko V. F., Lazorenko O. V., Pustovoi V. I., and Chernogor L. F. Choi-Williams Transform and Atomic Functions in Digital Signal Processing // Doklady Physics. – 2007. – Vol. 52, No. 4. – P. 207-210.
24. Auger F., Flandrin P., Goncalves P., Lemoine O. Time-Frequency Toolbox Reference Guide. – Hewston: Rice University, 2005. – 180 p.
25. Boashash B., Lowell B., Whitehouse H. J. High-resolution time-frequency signal analysis by parametric modeling of the Wigner-Ville distribution // In Proc. IASTED Int. Symp. Signal Processing and Its Application. – Brisbane (Australia). – 1987. – P. 297-301.
26. Boashash B., Whitehouse H. J. Seismic application of the Wigner-Ville distribution // In Proc. IEEE Int. Conf. Systems and Circuits. – Houston, Texas (USA). – 1986. – P. 34-37.
27. Imberger J., Boashash B. Application of the Wigner-Ville distribution to temperature gradient microstruc-

- ture: a new technique to study small-scale variations // J. Phys. Oceanogr. – 1986. – Vol. 16. – P. 1997-2012.
28. Janse C. P., Kaizer J. M. Time-frequency distributions of loudspeakers: the application of the Wigner distribution // J. Audio Eng. Soc. – 1983. – Vol. 31. – P. 198-233.
29. Marinovich N. M., Smith W. A. Application of joint time-frequency distributions to ultrasonic transducers // In Proc. 1986 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems. – Houston, Texas (USA). – 1986. – P. 50-54.
30. Barry D. T., Cole N. M. Muscle sounds are emitted at the resonant frequency of skeletal muscle // IEEE Trans. Biomed. Eng. – 1989. – Vol. 36. – P. 32-38.
31. Marinovich N. M., Eichmann G. An expansion of Wigner distribution and its applications // In Proc. 1985 IEEE ICASSP 85. – Tampa (USA). – 1985. – P. 1021-1024.
32. Chester D., Taylor F. J., Doyle M. The Wigner Distribution in speech processing application // J. Franklin Inst. – 1984. – Vol. 318. – P. 415-430.
33. Kumar B. V., Carroll W. C. Effects of sampling of signal detection using the cross-Wigner distribution function // Appl. Opt. – 1984. – Vol. 23. – P. 4090-4094.
34. Kenny O., Boashash B. An optical signal processor for time-frequency signal analysis using the Wigner-Ville distribution // J. Elec. Electron. Eng. – 1988. – Vol. 35. – P. 152-158.
35. Breed B. R., Posch T. E. A range and azimuth estimator based on forming the spatial Wigner distribution // In Proc. IEEE ICASSP 84. – San Diego (USA). – 1984. – P. 41B/9.1-9.2.
36. White L. B., Boashash B. On estimating the instantaneous frequency of a Gaussian random signal by the use of the Wigner-Ville distribution // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1988. – Vol. 36. – P. 417-420.
37. Zetic R., Sachs J., Schneegast B. Non-destructive testing with imaging radar: first experience with a laboratory equipment // In Proc. IWK-98. – Ilmenau. – 1998. – P. 23-28.
38. Дьяконов В. П. MATLAB 6: учебный курс. – Санкт-Петербург: Питер, 2001. – 592 с.
39. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – Санкт-Петербург: Питер, 2002. – 608 с.
40. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.
41. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. – К.: Наукова думка, 1979. – 196 с.

## Чої–вільямс-аналіз у цифровій обробці сигналів

**О. В. Вишнiveцкий, О. В. Лазоренко,  
Л. Ф. Черногор**

Обговорюються властивості, особливості, переваги та недоліки перетворення Чої–Вільямса. Показується, що застосування перетворення Чої–Вільямса є корисним у аналізі різних сигналів. Результати чої–вільямс-аналізу сигналів порівнюються з результатами вігнер-аналізу та віконного фур'є-аналізу цих самих сигналів. Як приклад досліджено деякі атомарні функції та вікна Кравченка–Рвачева. Зазначається, що чої–вільямс-, вігнер- та віконний фур'є-аналіз добре доповнюють один одного. Рекомендується спільне застосування перетворень Чої–Вільямса, Вігнера та віконного перетворення Фур'є для аналізу сигналів різної природи.

## The Choi–Williams Analysis in Digital Signal Processing

**O. V. Vishnivetsky, O. V. Lazorenko,  
and L. F. Chernogor**

The properties, peculiarities, advantages and disadvantages of Choi–Williams transform are discussed. The Choi–Williams transform application for the different signal analyses is shown to be useful. The results of Choi–Williams-analysis are compared with those calculated by using the Wigner- and short-time Fourier-analysis. As example, some atomic functions and Kravchenko–Rvachev windows are investigated. The Choi–Williams-analysis is shown to be good addition to the Wigner- and Fourier-analysis. The simultaneous application of the Choi-Williams transform, Wigner transform and Fourier transform is recommended.