

Вейвлет-анализ модельных сигналов с особенностями. 2. Аналитическое и дискретное вейвлет-преобразования

О. В. Лазоренко, С. В. Лазоренко¹, Л. Ф. Черногор²

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники,
пр. Ленина, 14, 61077, г. Харьков, Украина
E-mail: Oleg-Lazorenko@yandex.ru*

*¹Международный Славянский университет,
ул. Отакара Яроша, 9А, г. Харьков, 61086, Украина
E-mail: sergey_v@amik.ru*

*²Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: Leonid.F.Chernogor@univer.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 11 апреля 2007 г.

Предлагается использовать дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) и аналитическое вейвлет-преобразование (АВП) для изучения структуры сигналов с особенностями. С помощью аналитических и численных методов выполнен вейвлет-анализ простых вещественных моделей таких сигналов во временной области. ДВП использовано для анализа модельных сигналов с особенностями. Для каждого сигнала с помощью критерия минимизации энтропии разложения произведен выбор оптимального вейвлета при ДВП. Проведено восстановление модельного сигнала по дискретному вейвлет-спектру с использованием разного числа уровней разложения. Показано, что фазовая характеристика комплексного вейвлет-спектра, получаемая при АВП, предпочтительна при обнаружении слабовыраженных особенностей сигнала. Рекомендуется совместное применение непрерывного вейвлет-преобразования, ДВП и АВП, которые хорошо дополняют друг друга.

Введение

Настоящая статья является продолжением первой части работы [1], в которой обсуждались особенности применения непрерывного вейвлет-преобразования (НВП) для анализа сигналов с особенностями. Аналитическое вейвлет-преобразование (АВП) расширяет возможности НВП, поскольку вейвлет-спектр оказывается комплекснозначной функцией, а следовательно, наряду с анализом амплитудной возможно изучение соответствующей фазовой характеристики вейвлет-спектра.

Дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) может оказаться полезным, например, при решении задачи обнаружения сигнала с особенностью на фоне аддитивной слабокоррелированной помехи.

Целью работы является изложение результатов применения АВП и ДВП для анализа модельных сигналов с особенностями, а также рекомендаций по практическому анализу реальных временных рядов, содержащих сигналы такого рода, и описание выявленных основных возникающих закономерностей.

В качестве вещественных моделей сигналов с особенностями во временной области будем использовать модели, приведенные в [1].

1. АВП модельных сигналов

1.1. Основные понятия и определения

АВП сигнала $f(t)$, как известно (см., например, [2-10]), задается соотношением:

$$\dot{W}f(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (1)$$

где $\psi^*(t)$ – функция, комплексно сопряженная аналитическому вейвлету $\psi(t)$; a – параметр масштабирования; b – параметр сдвига.

Основное отличие АВП от НВП состоит в том, что вейвлет $\psi(t)$ является комплекснозначной функцией, а следовательно, комплекснозначной функцией является и вейвлет-спектр $\dot{W}f(a,b)$. Это позволяет дополнить традиционный для НВП анализ модуля амплитуды вейвлет-спектра $|\dot{W}f(a,b)|$ изучением фазовой характеристики $\arg \dot{W}f(a,b)$.

Существуют различия и в областях применения НВП и АВП. Первое преобразование часто применяется для выделения резких изменений сигнала, а второе – для измерения изменения во времени его мгновенных частот (см., например, [2]).

1.2. Результаты аналитических расчетов

Для получения аналитических результатов используем комплексный вейвлет Морле:

$$\psi(t) = \exp(ik_0 t) \exp(-t^2/2).$$

Комплексные вейвлет-спектры модельных сигналов имеют следующий вид.

1) Бесконечно короткий импульс:

$$\dot{W}f(a,b) = \frac{A}{a^{1/2}} \exp\left(-ik_0 \frac{t_0-b}{a}\right) \exp\left(-\frac{(t_0-b)^2}{2a^2}\right).$$

2) Импульс конечной ширины:

$$\dot{W}f(a,b) = \frac{A\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2a\epsilon}} \exp\left(-\frac{k_0^2}{2}\right) \times \left[\Phi\left(\frac{t_0+\epsilon-b}{\sqrt{2a}} + i\frac{k_0}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{t_0-\epsilon-b}{\sqrt{2a}} + i\frac{k_0}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

3) Наложение импульсной помехи на гармонический сигнал:

$$\dot{W}f(a,b) = \frac{A}{\sqrt{a}} \exp\left(-ik_0 \frac{t_0-b}{a}\right) \exp\left(-\frac{(t_0-b)^2}{2a^2}\right) + \frac{B\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{\omega_0^2 a^2 + k_0^2}{2}\right) \times [\sin(\omega_0 b) \operatorname{ch}(k_0 \omega_0 a) + i \cos(\omega_0 b) \operatorname{sh}(k_0 \omega_0 a)].$$

4) Резкий скачок амплитуды:

$$\dot{W}f(a,b) = A \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}} \exp\left(-\frac{k_0^2}{2}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{t_0-b}{\sqrt{2a}} + i\frac{k_0}{2}\right) \right].$$

5) Резкий скачок фазы гармонического сигнала:

$$\dot{W}f(a,b) = -\frac{iA\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2a}} \left\{ \exp\left(i\omega_0 b - \frac{(\omega_0 a - k_0)^2}{2}\right) \times \left[1 + e^{i\Delta\varphi} + (1 - e^{i\Delta\varphi}) \Phi\left(\frac{t_0-b}{\sqrt{2a}} - i\frac{\omega_0 a - k_0}{2}\right) \right] - \exp\left(-i\omega_0 b - \frac{(\omega_0 a + k_0)^2}{2}\right) \times \left[1 + e^{-i\Delta\varphi} + (1 - e^{-i\Delta\varphi}) \Phi\left(\frac{t_0-b}{\sqrt{2a}} + i\frac{\omega_0 a + k_0}{2}\right) \right] \right\}.$$

6) Резкий скачок частоты гармонического сигнала.

Выражение для комплексного вейвлет-спектра модели 6 из [1] не приводим из-за его крайней громоздкости.

7) Скачок производной:

$$\begin{aligned} \dot{W}f(a,b) = & Aa^{1/2} \exp\left(-\frac{k_0^2}{2}\right) \times \\ & \times \left\{ \exp\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t_0-b}{a} + \frac{ik_0}{\sqrt{2}}\right)^2\right) - \right. \\ & - \exp\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t_1-b}{a} + \frac{ik_0}{\sqrt{2}}\right)^2\right) - \\ & - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{t_1+b}{a} + \frac{ik_0}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t_1-b}{a} + \frac{ik_0}{\sqrt{2}}\right) - \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{t_0+b}{a} + \frac{ik_0}{\sqrt{2}}\right) \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t_0-b}{a} + \frac{ik_0}{\sqrt{2}}\right) - \frac{t_1-t_0}{a} \right] \right\}. \end{aligned}$$

8) Производная δ -функции:

$$\begin{aligned} \dot{W}f(a,b) = & \frac{A}{a^{3/2}} \left(ik_0 - \frac{t_0-b}{a} \right) \times \\ & \times \exp\left(-ik_0 \frac{t_0-b}{a}\right) \exp\left(-\frac{(t_0-b)^2}{2a^2}\right). \end{aligned}$$

9) Наложение производной δ -функции на гармонический сигнал:

$$\begin{aligned} \dot{W}f(a,b) = & \frac{A}{a^{3/2}} \left(ik_0 - \frac{t_0-b}{a} \right) \times \\ & \times \exp\left(-ik_0 \frac{t_0-b}{a}\right) \exp\left(-\frac{(t_0-b)^2}{2a^2}\right) + \\ & + \frac{B\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{\omega_0^2 a^2 + k_0^2}{2}\right) \times \\ & \times [\sin(\omega_0 b) \operatorname{ch}(k_0 \omega_0 a) + i \cos(\omega_0 b) \operatorname{sh}(k_0 \omega_0 a)]. \end{aligned}$$

К сожалению, вследствие сложности интеграла (1) даже для такого простого вейвлета, как комплексный вейвлет Морле, для моделей 10 – 12 из [1] не удалось получить выражения для вейвлет-спектра в аналитическом виде. Поэтому, как и в случае НВП, дальнейшие исследования будем проводить численными методами.

1.3. Результаты численных расчетов

На рис. 1 - 14 приведены результаты применения аналитического вейвлет-преобразования для анализа модельных сигналов с особенностями. В качестве базисного вейвлета использовался комплексный вейвлет Гаусса $\operatorname{sgau}1$. На каждом рисунке показан анализируемый сигнал $f(t)$ во временной области, под ним последовательно – амплитудная $|\dot{W}f(a,b)|$ и фазовая $\arg \dot{W}f(a,b)$ характеристики комплексного вейвлет-спектра. Поверхности $|\dot{W}f(a,b)|$ и $\arg \dot{W}f(a,b)$ графически на плоскости изображаются в градациях серого цвета, причем максимальному значению функции соответствует черный цвет, а минимальному – белый.

Рассмотрим особенности такого формата представления данных на примере рис. 5, где показаны результаты применения АВП к модели (5), описывающей резкий скачок фазы гармонического сигнала при $\Delta\varphi = \pi/4$. На рис. 5, а, где изображен анализируемый сигнал $f(t)$, хорошо заметен скачок фазы, произошедший в момент времени $t = 0$. На амплитудной характеристике вейвлет-спектра (рис. 5, б) гармоническому сигналу соответствует периодическая структура из одинаковых темных пятен, расположенная вдоль всей оси переменной времени t и локализованная в диапазоне $T \sim 0 \div 2$ вдоль оси периодов T . Особенность выглядит как искажение этой периодической структуры при $t = 0$, когда заостренный нижний край соответствующего темного пятна упирается в ось абсцисс, а над верхним его краем появляется небольшая более светлая область. Положение нижнего края этого тем-

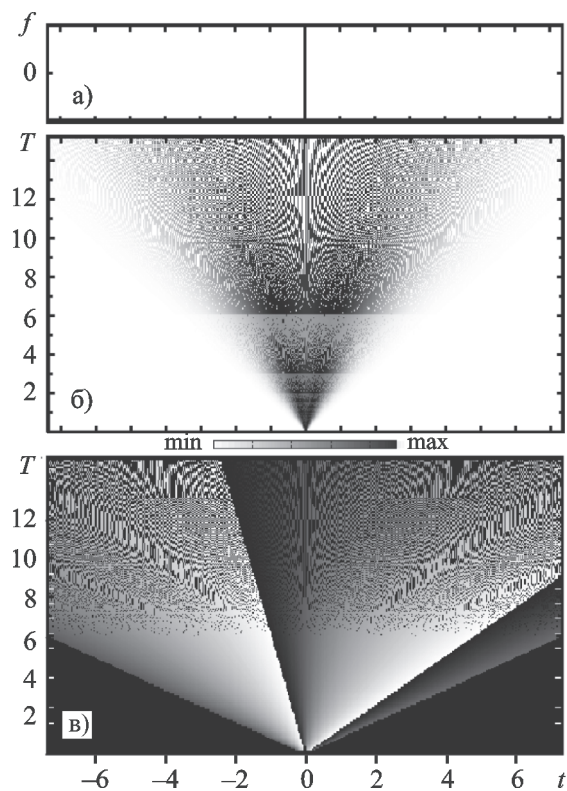


Рис. 1. АВП бесконечно короткого импульса: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|\dot{W}f(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $\arg\dot{W}f(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

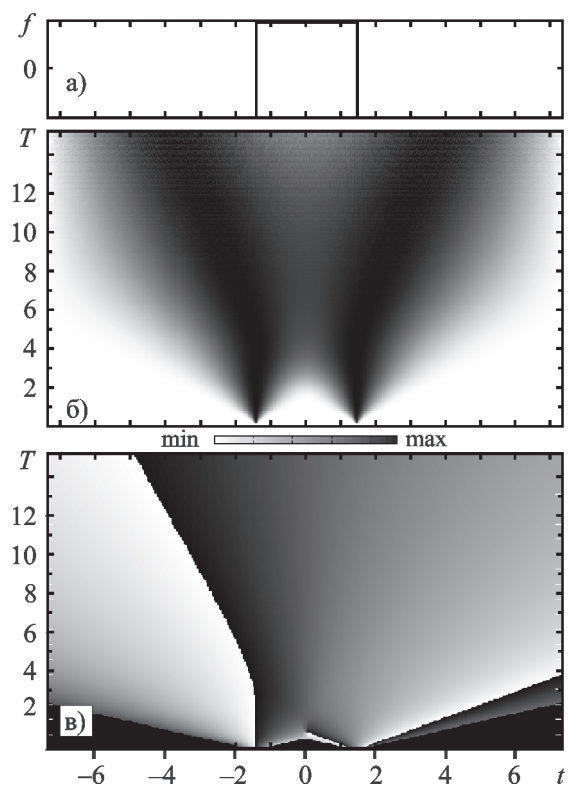


Рис. 2. АВП импульса конечной ширины: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|\dot{W}f(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $\arg\dot{W}f(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

ного пятна достаточно точно указывает положение особенности на временной оси. Как выглядит амплитудная характеристика гармонического сигнала без особенностей, можно увидеть на рис. 14, б.

На фазовой характеристике вейвлет-спектра гармоническому сигналу соответствует периодическая структура из равноотстоящих друг от друга вертикальных полос одинаковой длины (рис. 14, в). Уменьшение длины полос на краях структуры и искривление их концов к центру картинки объясняется влиянием краевых эффектов. Наличие в сигнале особенности типа “резкий скачок фазы” приводит к появлению нескольких эффектов (рис. 5, в). Во-первых, указанная периодическая структура разбивается на две час-

ти, разделенные хорошо выраженной кривой линией. Эта линия начинается на искаженной периодической структуре при малых T и пересекает по вертикали практически всю картинку. Чем больше скачок фазы $\Delta\phi$, тем более ярко выражена эта линия. Во-вторых, концы линий каждой из получившихся частей периодической структуры загибаются к центру соответствующей части, а длина линий несколько уменьшается от середины каждой части к ее краям. В-третьих, концы линий, между которыми на оси времени расположена сама особенность, направлены навстречу друг другу.

Важно отметить, что фазовая характеристика $\arg\dot{W}f(a,b)$ оказывается чувствительной к появлению особенности

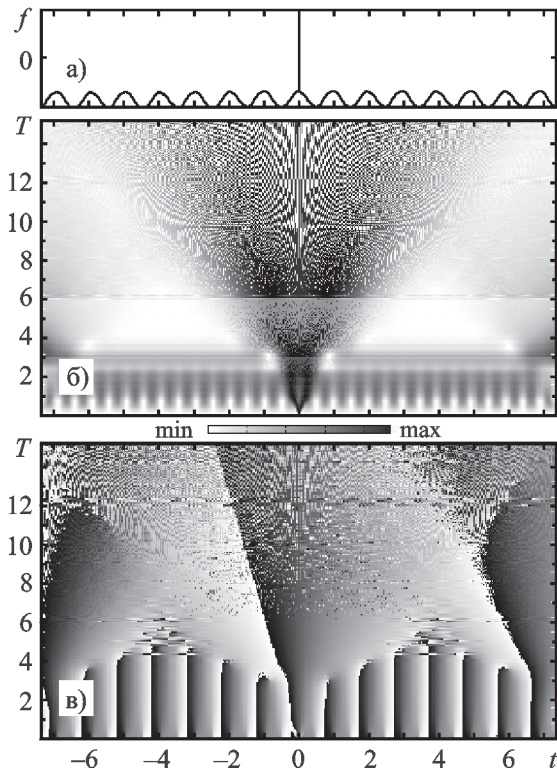


Рис. 3. АВП наложения импульсной помехи на гармонический сигнал: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|\dot{W}f(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $\arg \dot{W}f(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

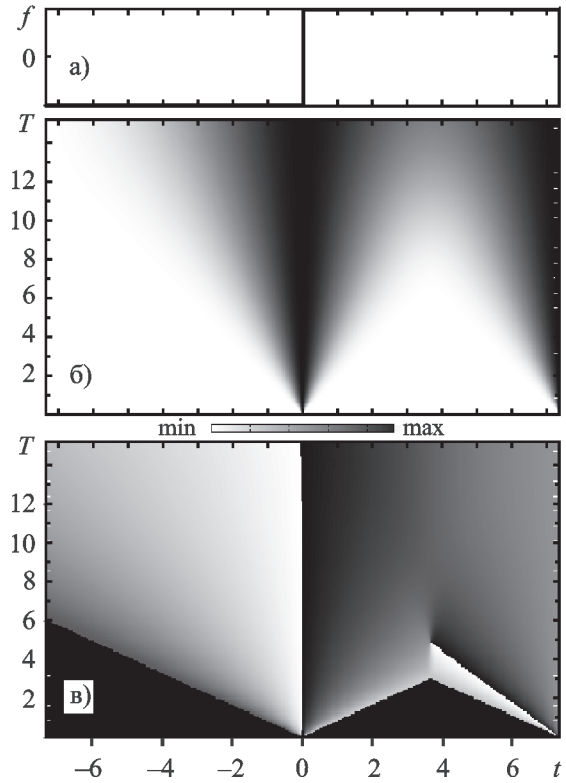


Рис. 4. АВП скачка амплитуды: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|\dot{W}f(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $\arg \dot{W}f(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

в анализируемом сигнале даже тогда, когда в амплитудной характеристике $|\dot{W}f(a,b)|$ эта особенность практически незаметна. Это демонстрируется на рис. 13, 14. При достаточно малом скачке фазы гармонического сигнала ($\Delta\varphi = \pi/64$) в модели (5) амплитудная характеристика $|\dot{W}f(a,b)|$ (рис. 13, б) неотличима от своего аналога для сигнала без этой особенности (рис. 14, б). Не видно различий между этими сигналами во временной области (рис. 13, а и рис. 14, а). В то же время фазовые характеристики $\arg \dot{W}f(a,b)$ на рис. 13, в и рис. 14, в существенно отличаются. По-прежнему, как и на рис. 5, в, просматриваются две части периодической структуры, концы линий

которой загнуты в сторону центра каждой из частей. Видна также пара линий с направленными навстречу друг другу концами, между которыми и располагается особенность. Вертикальная линия ($T \sim 2 \div 11$) на рис. 13, в просматривается хуже, к тому же часть ее накладывается на похожую линию ($T \sim 7 \div 9$), связанную с наличием краевых эффектов (рис. 14, в). Тем не менее эта линия позволяет достаточно точно определить положение особенности на оси времени.

Таким образом, при анализе сигналов с особенностями с помощью НВП целесообразно также обращаться к фазовой характеристике $\arg \dot{W}f(a,b)$ исследуемого сигнала, полученной с помощью АВП, по-

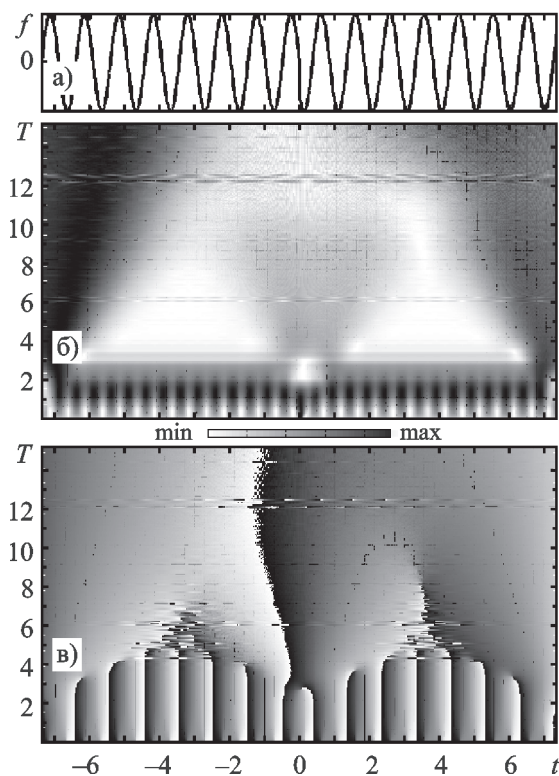


Рис. 5. АВП резкого скачка фазы гармонического сигнала при $\Delta\varphi = \pi/4$: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|\dot{W}f(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $\arg\dot{W}f(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

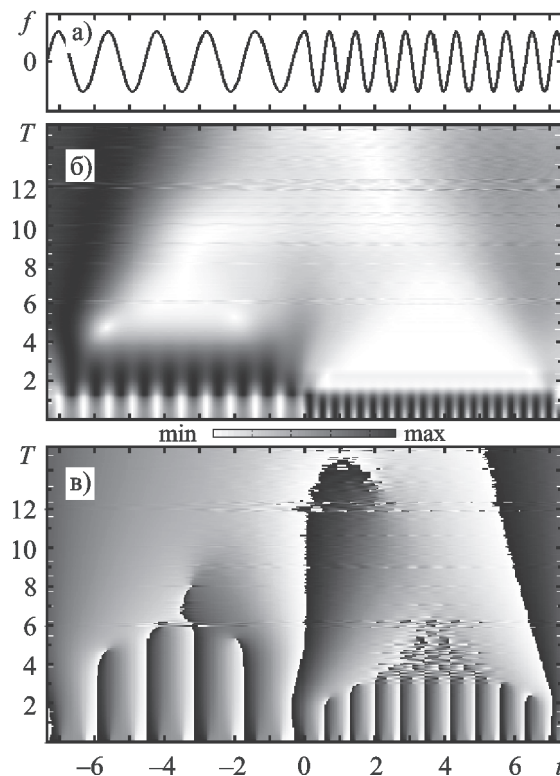


Рис. 6. АВП резкого скачка частоты гармонического сигнала: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|\dot{W}f(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $\arg\dot{W}f(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

скольку это позволяет более уверенно обнаруживать наличие у сигнала локальных особенностей.

2. ДВП модельных сигналов

2.1. Выбор оптимального вейвлетного базиса

Особый интерес представляет исследование возможности и целесообразности применения ДВП (см., например, [2-10]) для анализа сигналов с особенностями. Это определяется, в первую очередь, тем, что ДВП, в отличие от АВП, позволяет производить не только разложение анализируемого сигнала $f(t)$ по базису ортого-

нальных или биортогональных вейвлетов, но и восстановление этого сигнала по вейвлет-спектру. Более того, имеется возможность восстанавливать сигнал только по определенной части вейвлет-спектра, а следовательно, и более успешно решать задачу обнаружения сигнала на фоне помехи (см., например, [11]). Необходимо также отметить, что возможность восстановления сигнала $f(t)$ не является исключительной прерогативой ДВП. Так, в случае выполнения для базисного вейвлета условия допустимости, следующего из теоремы Кальдерона–Гроссмана–Морле (см., например, [2]), существует обратное НВП. Однако вследствие принципиальной избыточности вейвлет-спектра НВП для

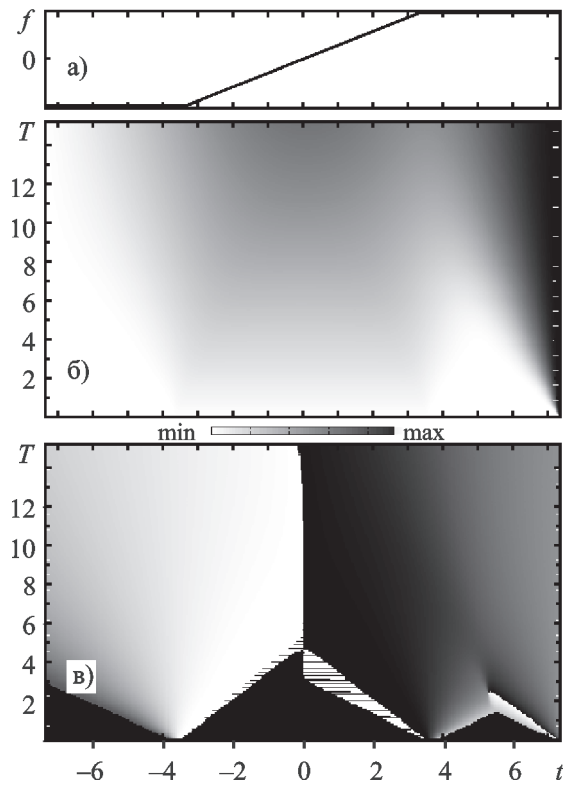


Рис. 7. АВП излома: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|\dot{W}f(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $\arg\dot{W}f(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

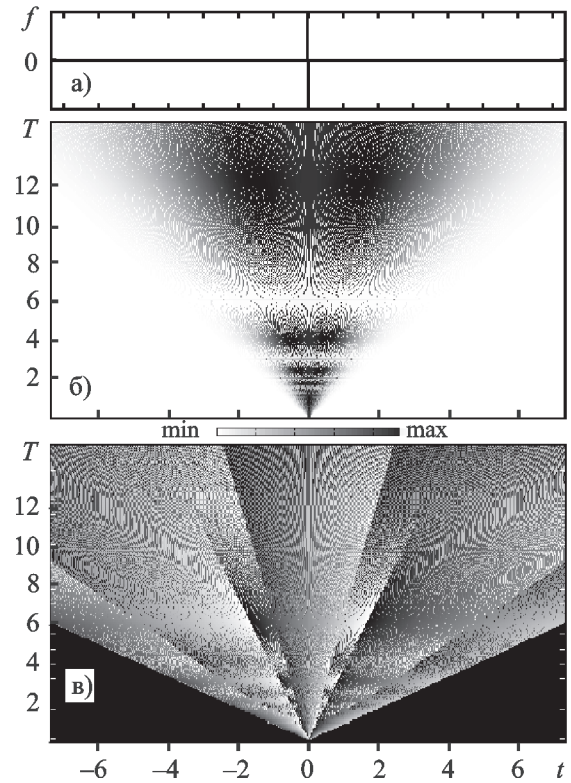


Рис. 8. АВП производной δ -функции: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|\dot{W}f(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $\arg\dot{W}f(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

восстановления сигнала требуется провести значительно больший объем вычислений, чем при ДВП.

В используемой нами в настоящей работе системе компьютерной математики MATLAB ДВП вычисляется с помощью пирамидального алгоритма Малла. При этом вейвлеты задаются с помощью соответствующего набора частотных фильтров. Коэффициенты данных фильтров однозначно определены для каждого вейвлета на каждом из уровней разложения и реконструкции. Автором большинства используемых в настоящей работе вейвлетов является И. Добеши (см., например, [2]). Важно отметить, что почти все они не имеют аналитического представления и являются результатами итерационного процесса, лежащего в основе

пирамидального алгоритма Малла. Более подробную информацию о ДВП можно найти, например, в [2, 6, 8, 10], а о его особенностях в MATLAB, – например, в [9].

Оценку оптимальности выбора вейвлетного базиса при использовании ДВП будем производить с помощью критерия минимизации энтропии M (см., например, [9]) вида

$$M = \exp\left(-\sum_{j,k} |d_{j,k}|^2 \ln |d_{j,k}|^2\right),$$

где $d_{j,k}$ – детализирующие коэффициенты разложения сигнала, задаваемые соотношением:

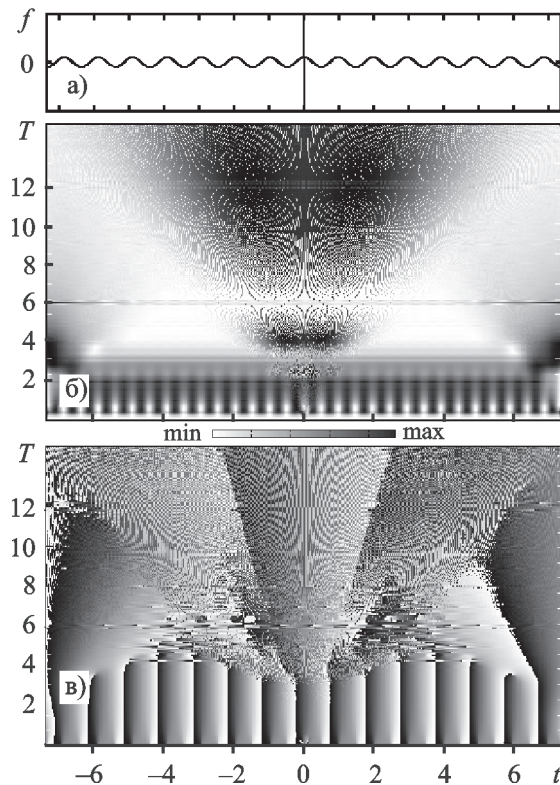


Рис. 9. АВП суммы производной δ -функции и гармонического сигнала: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|Wf(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $argWf(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

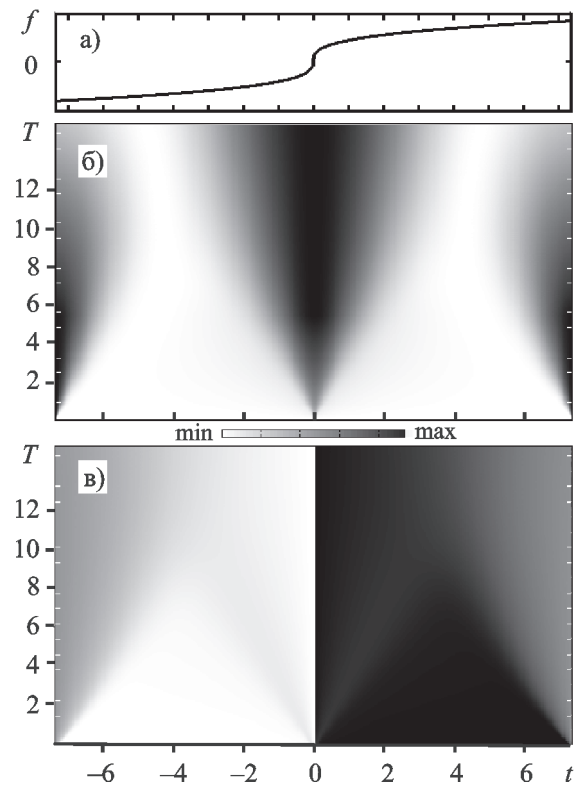


Рис. 10. АВП вертикального перегиба: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|Wf(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $argWf(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{j,k}(t)dt, \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k),$$

$$j, k \in \mathbb{Z},$$

\mathbb{Z} – множество целых чисел. Минимальное значение энтропии M составляет 1.

Результаты расчетов M для модельных сигналов с особенностями ($f_1 \dots f_{12}$) приведены в табл. 1, 2.

Базис, основанный на вейвлете Хаара (haar), оказался оптимальным для большинства аперiodических моделей, имеющих либо разрывы типа “скачок”, либо точки с вертикально расположенной касательной (импульс конечной ширины f_2 , функция Хэвисайда f_4 , производная δ -функции f_8 , вертикальный перегиб f_{10}

и шпиль f_{11}). Скорее всего, это объясняется тем, что сам вейвлет haar во многом схож с такими сигналами, поскольку имеет три разрыва непрерывности типа “скачок”. Особо следует отметить, что производная δ -функции в этом базисе определяется всего лишь одним коэффициентом ($M = 1.00$).

Вейвлет Добеши второго порядка db2 показал лучший результат при разложении моделей, имеющих разрыв типа “бесконечный скачок” на фоне гармонической функции или константы (δ -функция Дирака f_1 , наложение δ -функции Дирака f_3 и ее первой производной f_9 на гармонический сигнал). По-видимому, это связано с тем, что вейвлет db2, с одной стороны, имеет ярко выраженную

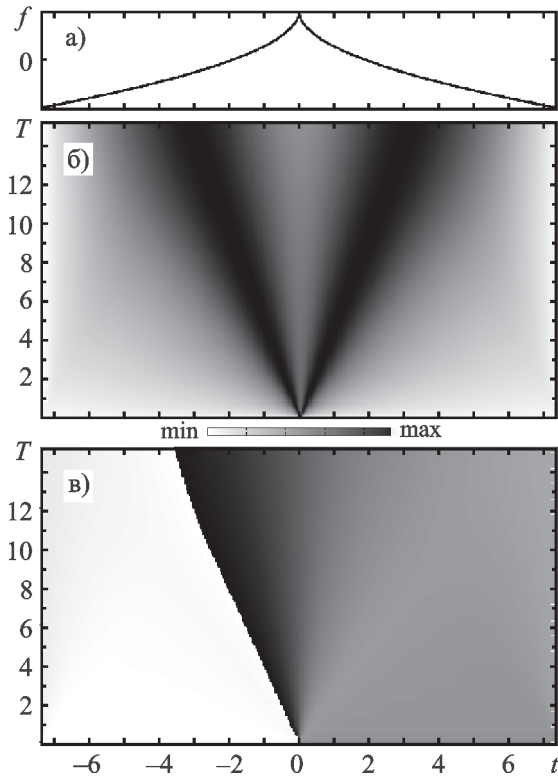


Рис. 11. АВП шпиль: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|Wf(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $argWf(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

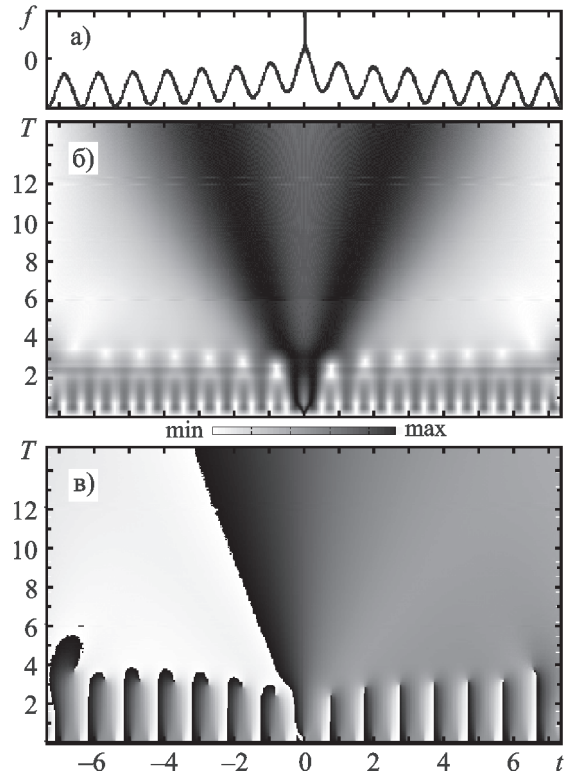


Рис. 12. АВП наложения шпиль на гармонический сигнал: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|Wf(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $argWf(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

фрактальную структуру, а с другой стороны, является двухлепестковым. Последнее свойство дает возможность достаточно удачно раскладывать гармонические сигналы.

Для непрерывной модели f_7 , имеющей два излома, наилучшие результаты показали вейвлеты db3, sym3 и db4.

Для моделей f_5 и f_6 , описывающих скачки фазы и амплитуды гармонического сигнала, наилучшими оказываются соответственно вейвлеты sym4 и sym8. Для наложения гармонического сигнала на шпиль (модель 12) наиболее удачным оказывается вейвлет coif1.

Также необходимо отметить, что для ряда моделей ($f_2, f_3, f_5, f_6, f_9, f_{11}, f_{12}$) очень хорошие результаты показывает

биортогональный вейвлет bior3.1. Его хорошо использовать в случае, если необходимо проводить только разложение анализируемого сигнала по базису вейвлетов. Если же нужно также осуществлять восстановление сигнала по его вейвлет-спектру, то bior3.1 использовать нежелательно. Это связано с тем, что при восстановлении используется не сам вейвлет bior3.1, а обратный ему биортогональный вейвлет gbior3.1, показатели которого на один-два порядка хуже.

2.2. Восстановление сигнала по вейвлет-спектру

Известно (см., например, [9]), что сигнал $f(t)$ может быть восстановлен на n -ом уровне разложения по своему дискретному вейвлет-спектру с помощью соотношения:

Таблица 1. Энтропия M моделей сигналов с особенностями $f_1(t) \dots f_6(t)$, разложенных с помощью ДВП по базисам вейвлетов Хаара, Добеши, Симлета, койфлетов, биортогональных вейвлетов и дискретного вейвлета Мейера. Выделены значения энтропии для оптимальных вейвлетов в каждом столбце

Вейвлеты	Модели сигналов с особенностями					
	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_3(t)$	$f_4(t)$	$f_5(t)$	$f_6(t)$
haar	4.00	8.62	61.63	2.00	64.64	74.43
db2	3.63	9.51	11.26	2.83	44.70	47.56
db3	3.89	9.06	12.85	2.01	48.02	47.22
db4	4.62	12.28	13.03	2.02	40.37	42.32
db5	7.71	17.56	16.12	2.45	37.05	34.77
db6	7.94	14.83	19.60	2.64	35.07	38.06
db7	9.89	14.51	22.39	2.76	32.96	35.06
db8	10.07	19.89	24.94	3.04	31.10	31.95
db9	9.86	23.06	26.95	3.46	29.42	31.57
db10	9.55	23.48	30.41	3.81	30.35	32.47
sym2	3.63	9.51	11.64	2.83	44.70	47.56
sym3	3.89	9.06	12.85	2.01	48.02	47.22
sym4	5.19	9.63	12.72	4.84	20.60	29.07
sym5	4.56	11.22	14.34	5.80	24.03	26.33
sym6	7.37	11.33	16.39	6.72	27.48	21.74
sym7	4.88	13.01	18.49	6.72	31.49	29.49
sym8	5.82	12.73	20.38	8.68	36.05	21.04
coif1	4.22	8.34	12.73	2.69	28.71	46.00
coif2	4.96	10.09	16.44	4.83	28.10	33.25
coif3	5.81	12.12	22.90	6.88	34.89	33.46
coif4	6.21	14.42	29.49	8.92	32.18	34.06
coif5	6.82	15.47	36.66	10.97	32.13	37.86
dmey	7.96	20.01	238.1	50.77	175.9	75.60
bior3.1	7.24	5.98	3.41	4.88	2.29	2.56
bior3.3	12.01	9.08	11.50	6.38	13.19	32.07
bior3.5	8.74	14.32	18.94	7.60	23.37	33.82
rbio3.1	5.80	11.60	113.1	4.36	136.0	136.5
rbio3.3	3.99	11.78	18.01	4.81	43.35	47.81
rbio3.5	4.17	13.75	17.54	6.55	36.71	27.76

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j_n,k} \varphi_{j_n,k}(t) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_k(t), \quad a_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_{j,k}(t) dt.$$

где $\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$, $\varphi(t)$ – скейлинг-функция, $a_{j,k}$ – аппроксимирующие коэффициенты,

Чтобы стал понятен смысл термина “ n -й уровень разложения”, необходимо кратко напомнить основную идею исполь-

Таблица 2. Энтропия M моделей сигналов с особенностями $f_7(t) \dots f_{12}(t)$, разложенных с помощью ДВП по базисам вейвлетов Хаара, Добеши, Симлета, койфлетов, биортогональных вейвлетов и дискретного вейвлета Мейера. Выделены значения энтропии для оптимальных вейвлетов в каждой строке

Вейвлеты	Модели сигналов с особенностями					
	$f_7(t)$	$f_8(t)$	$f_9(t)$	$f_{10}(t)$	$f_{11}(t)$	$f_{12}(t)$
haar	2.60	1.00	36.39	1.43	3.47	53.15
db2	2.12	1.56	11.31	4.22	5.19	11.84
db3	1.46	2.99	13.28	6.01	5.47	12.54
db4	1.47	4.24	13.76	8.02	6.73	13.46
db5	1.72	4.08	16.47	9.51	6.71	16.73
db6	1.97	4.09	19.97	10.64	7.19	20.44
db7	2.11	2.09	22.50	12.79	8.35	22.05
db8	2.28	2.45	24.98	15.65	10.07	24.38
db9	2.60	2.49	27.02	17.81	8.28	27.20
db10	2.92	2.66	30.53	19.05	6.68	31.39
sym2	2.12	1.59	11.31	4.22	5.19	11.84
sym3	1.46	2.99	13.28	6.01	5.47	12.54
sym4	4.43	2.02	12.86	7.91	5.39	11.97
sym5	5.46	1.51	14.43	9.61	6.55	13.99
sym6	6.30	1.95	16.45	11.73	6.27	15.85
sym7	6.20	3.44	18.80	13.03	6.85	19.23
sym8	8.26	2.45	20.54	15.66	6.81	19.90
coif1	2.31	2.27	13.09	5.77	4.10	11.13
coif2	4.43	2.47	16.65	11.98	6.79	16.23
coif3	6.44	2.63	23.09	18.01	8.56	22.90
coif4	8.45	2.75	29.70	24.03	9.34	29.60
coif5	10.46	2.80	36.83	30.05	10.07	36.89
dmey	50.39	3.18	234.3	101.7	24.82	229.4
bior3.1	2.22	7.24	4.12	4.35	2.97	2.96
bior3.3	4.05	4.06	11.53	7.29	3.81	10.86
bior3.5	6.15	5.85	19.38	10.83	6.41	17.37
rbio3.1	4.22	3.08	118.8	5.03	10.70	94.10
rbio3.3	4.70	3.62	18.05	8.36	7.84	20.71
rbio3.5	6.44	3.96	17.62	11.93	8.88	18.58

зубоугольного в настоящей работе пирамидального алгоритма Малла. Она заключается в том, что частотная область вейвлетов разбивается на низкочастотную и высокочастотную составляющие. Частота, разделяющая эти составляющие, равна половине частоты дискретизации сигнала.

Для их разделения достаточно использовать два фильтра: низкочастотный и высокочастотный. Первый дает образ для аппроксимации подаваемого на вход сигнала, а второй – для его детализации. Установлено (см., например, [9]), что коэффициенты этих фильтров и есть аппрок-

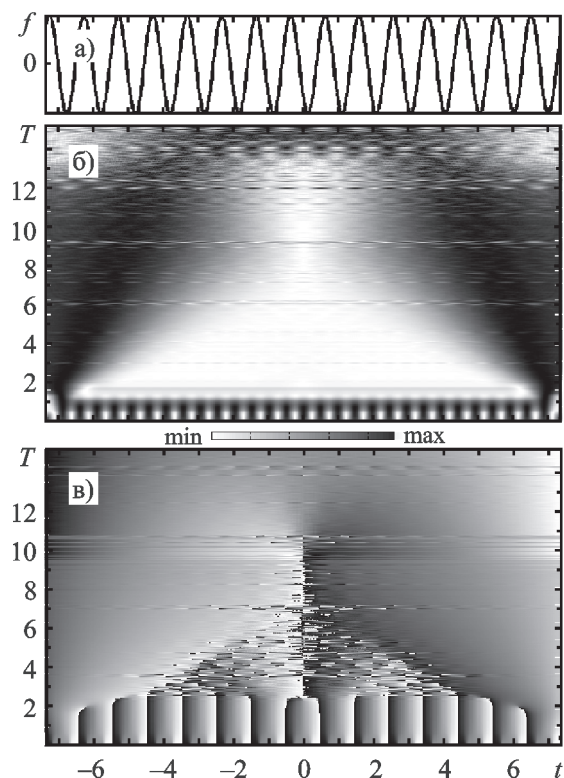


Рис. 13. АВП резкого скачка фазы гармонического сигнала при $\Delta\varphi = \pi/64$: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|\dot{W}f(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $\arg \dot{W}f(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

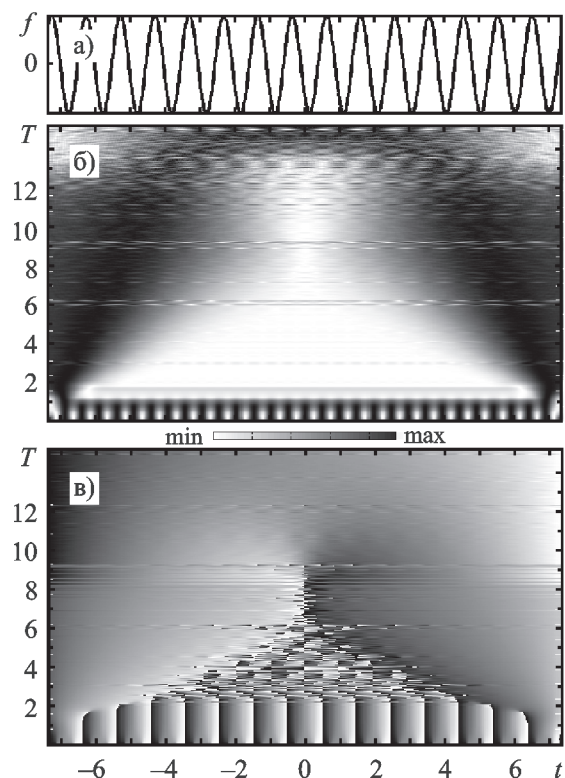


Рис. 14. АВП резкого скачка фазы гармонического сигнала при $\Delta\varphi = 0$: а) – сигнал во временной области, б) – амплитудная характеристика $|\dot{W}f(a,b)|$ вейвлет-спектра АВП, в) – фазовая характеристика $\arg \dot{W}f(a,b)$ вейвлет-спектра АВП

симирующие $a_{j,k}$ и детализирующие $d_{j,k}$ коэффициенты вейвлет-декомпозиции сигнала. Конкретный вид фильтров определяется используемым вейвлетом. Поскольку в полосу прозрачности каждого фильтра попадает только одна половина всех частотных компонент, другая половина этих компонент просто удаляется. Такая операция именуется децимацией и приводит к удалению половины отсчетов исходного сигнала. Сложение полученных на выходах обоих фильтров сигналов дает в точности исходный сигнал. Это и есть первый уровень разложения.

Низкочастотный фильтр можно снова разложить по тому же принципу на два фильтра и подвергнуть децимации. Это второй уровень разложения. Таким обра-

зом, может быть создана система вейвлет-фильтров, реализующих операцию разложения сигнала того или иного уровня, а операция последовательной разбивки низкочастотных фильтров и постепенного огрубления сигнала носит название пирамидального алгоритма Малла.

Реальный анализируемый сигнал $f(t)$ всегда оказывается задан конечным количеством точек N . Поэтому и максимальное число уровней разложения L_{\max} ($L_{\max} \in \mathbb{N}$, \mathbb{N} – множество натуральных чисел) также является ограниченным. Оно определяется соотношением $L_{\max} \leq \log_2 N$.

Проследим, как искажается восстанавливаемый сигнал при отбрасывании L первых уровней разложения в его дискретном вейвлет-спектре. Следует помнить, что уров-

ням с меньшими номерами соответствуют более высокочастотные компоненты.

Мерой качества восстановленного сигнала считаем функционал $C[f, f_L]$, предложенный в работе [11]. Он определяется соотношением

$$C \equiv C[f, f_L] = \sqrt{A^2 + (B-1)^2},$$

где

$$A \equiv A[f, f_L] = \frac{\overline{(f_L(t) - f(t))^2}}{\overline{f^2(t)}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (f_L(t) - f(t))^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt},$$

$$B \equiv B[f, f_L] = \frac{\overline{f_L(t)f(t)}}{\overline{f^2(t)}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_L(t)f(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt}.$$

Здесь f – исходный сигнал, f_L – восстановленный сигнал с отбрасыванием L первых уровней разложения в дискретном вейвлет-спектре сигнала f . Минимальное значение функционала $C=0$ соответствует полностью восстановленному сигналу.

Для примера рассмотрим восстановление сигналов f_3 и f_{12} , разложенных с помощью оптимальных вейвлетов db2 и coif1 соответственно. Результаты этого процесса приведены на рис. 15, 16. На них графики сгруппированы парами по принципу: сигнал и под ним соответствующий дискретный вейвлет-спектр. Анализируемый сигнал $f(t)$ находится в верхнем левом углу каждого рисунка. Остальные пары представляют собой восстановленные с отбрасыванием L первых уровней разложения сигналы $f_L(t)$. Пунктирной линией для сравнения показан исходный сигнал $f(t)$. На каждом графике $f_L(t)$ показано также соответствующее значение функционала $C[f, f_L]$.

Из анализа восстановления сигналов f_3 и f_{12} , разложенных с помощью оптимальных вейвлетов db2 и coif1 соответственно, установлено, что для восстановления импульсной помехи, наложенной на гармонический сигнал, требуются практически все существующие в данном случае уровни разложения ($L = L_{\max} = 10$), причем уровни со средними номерами ($L \sim 5 \div 7$) отвечают за восстановление гармонического сигнала, а с наименьшими номерами ($L \sim 1 \div 3$) – самой импульсной помехи. Аналогичная ситуация наблюдается и при анализе наложения шпилья на гармонический сигнал, хотя здесь количество необходимых для почти полного восстановления сигнала ($C \sim 0.01$) уровней разложения оказывается меньшим ($L = 6$ из возможных $L_{\max} = 10$).

3. Обсуждение результатов

АВП при анализе сигналов с особенностями интересно, в первую очередь, возможностью использования фазовой характеристики $\arg \mathcal{W}f(a, b)$. Важно, что для слабо выраженной особенности (например, при малом скачке фазы гармонического сигнала ($\Delta\phi = \pi/64$), который показан на рис. 13, а), когда на плоскости модуля вейвлет-коэффициентов (рис. 13, б) ее наличие невооруженным глазом определить уже невозможно, на фазовой характеристике (рис. 13, в) по-прежнему хорошо видно точное положение особенности на оси времени, о чем сказано выше. Именно по этой причине при обнаружении особенности с помощью НВП полезно также использовать фазовую характеристику, полученную с помощью АВП.

При восстановлении сигнала с особенностью с помощью ДВП следует учитывать, что информация о самой особенности содержится в наиболее короткопериодных (с малыми a) компонентах вейвлет-спектра, чему соответствуют уровни разложения с наименьшими номерами. В то же время на практике особенности накладываются на квазигармонические сигналы, вейвлет-спектр которых расположен относительно

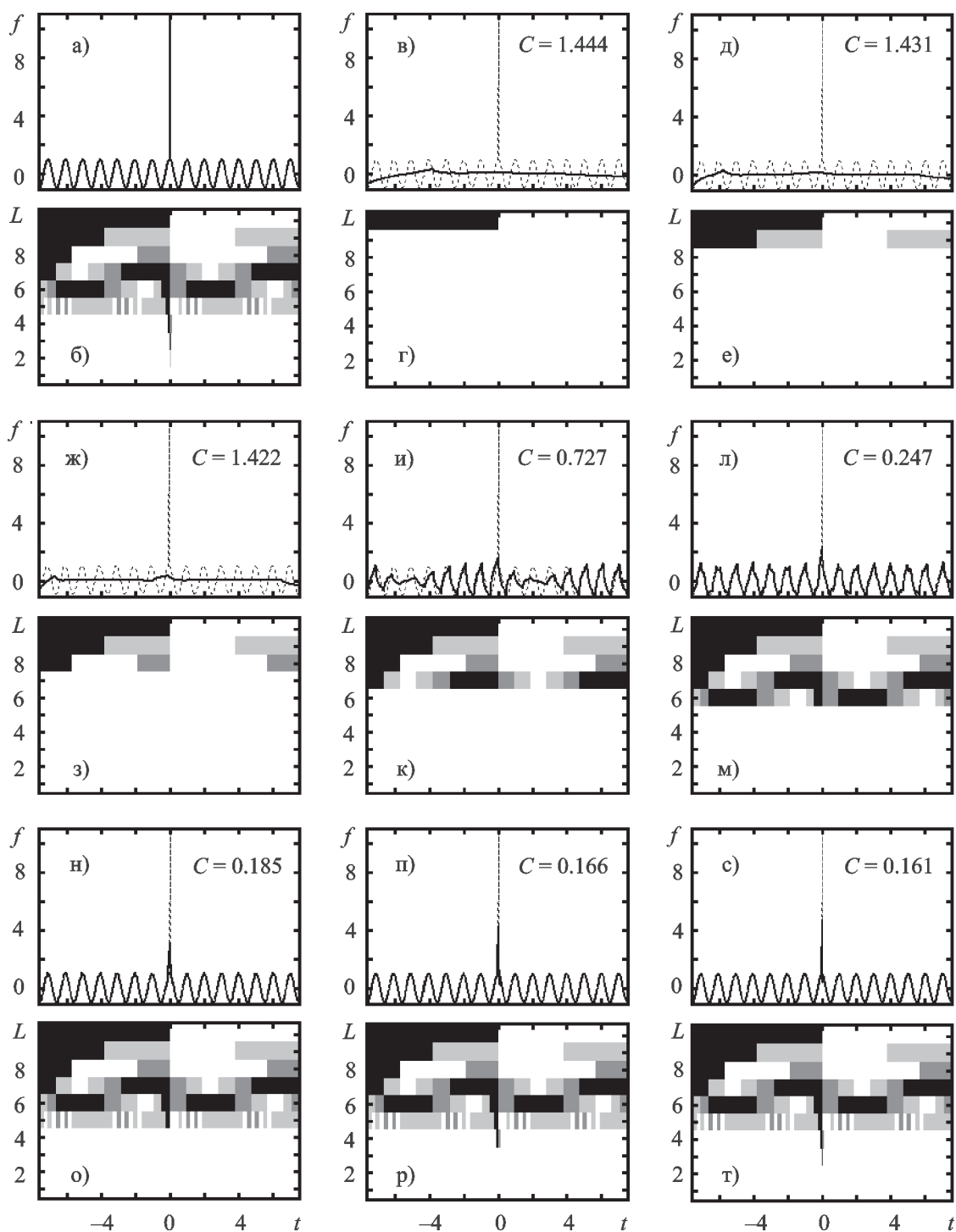


Рис. 15. Восстановление модельного сигнала f_3 , разложенного с помощью ДВП с использованием вейвлета db2: а) – модельный сигнал во временной области, б) – дискретный вейвлет-спектр сигнала. Восстановленный сигнал во временной области при отбрасывании L первых уровней разложения ($L_{max} = 10$): в) – $L = 9$, д) – $L = 8$, ж) – $L = 7$, и) – $L = 6$, л) – $L = 5$, н) – $L = 4$, п) – $L = 3$, с) – $L = 2$. На рисунках указана соответствующая каждому восстановленному сигналу величина функционала $C = C[f, f_L]$, пунктирной линией показан исходный модельный сигнал. Дискретный вейвлет-спектр восстановленного сигнала при отбрасывании L первых уровней разложения: з) – $L = 9$, е) – $L = 8$, э) – $L = 7$, к) – $L = 6$, м) – $L = 5$, о) – $L = 4$, р) – $L = 3$, т) – $L = 2$

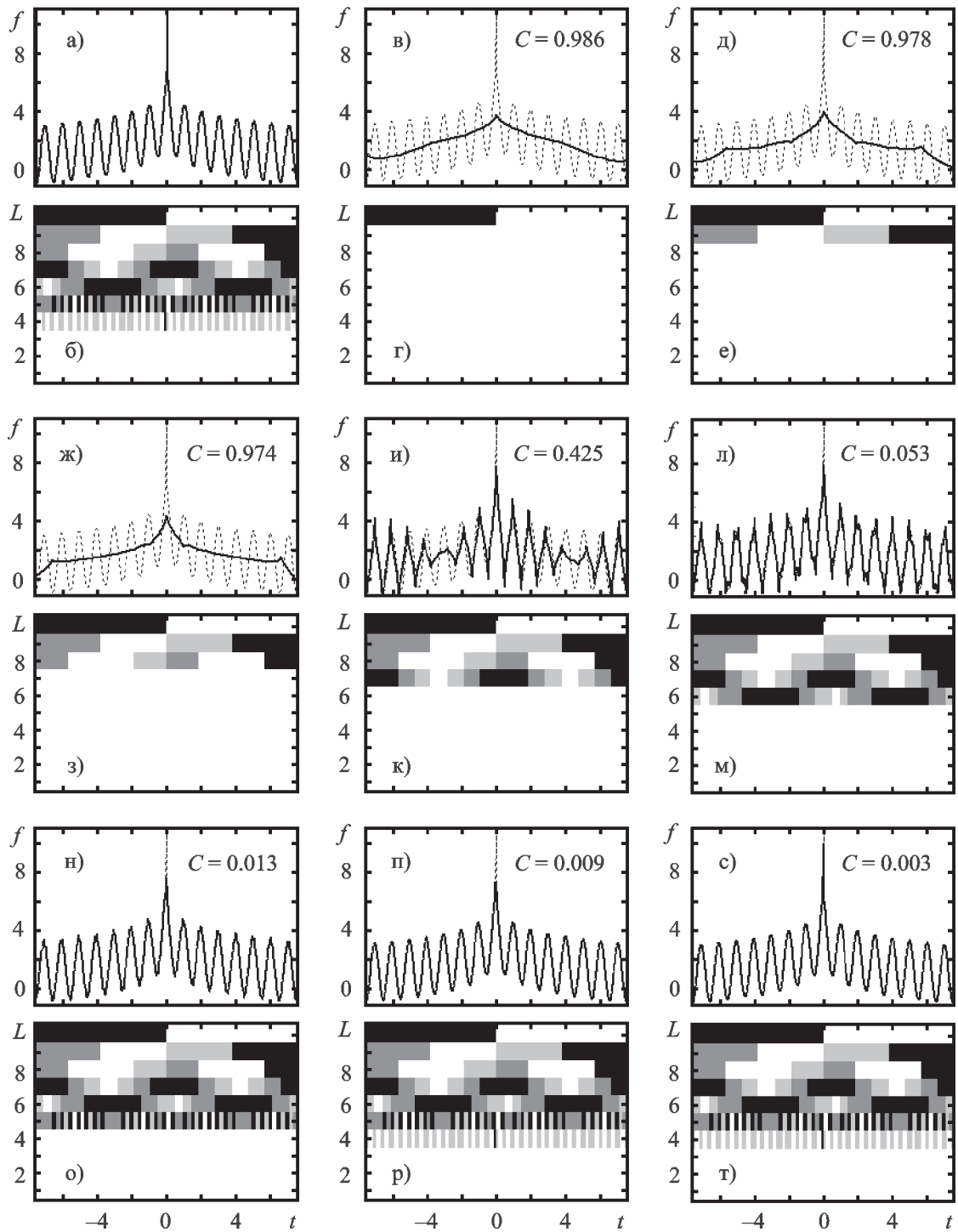


Рис. 16. Восстановление модельного сигнала f_{12} , разложенного с помощью ДВП с использованием вейвлета *coif1*: а) – модельный сигнал во временной области, б) – дискретный вейвлет-спектр сигнала. Восстановленный сигнал во временной области при отбрасывании L первых уровней разложения ($L_{\max} = 10$): в) – $L = 9$, д) – $L = 8$, ж) – $L = 7$, и) – $L = 6$, л) – $L = 5$, н) – $L = 4$, п) – $L = 3$, с) – $L = 2$. На рисунках указана соответствующая каждому восстановленному сигналу величина функционала $C = C[f, f_L]$, пунктирной линией показан исходный модельный сигнал. Дискретный вейвлет-спектр восстановленного сигнала при отбрасывании L первых уровней разложения: з) – $L = 9$, е) – $L = 8$, з) – $L = 7$, к) – $L = 6$, м) – $L = 5$, о) – $L = 4$, р) – $L = 3$, т) – $L = 2$

спектра особенности при меньших значениях a . Поэтому для адекватного восстановления большинства таких сигналов даже в оптимальном вейвлетном базисе приходится учитывать почти все уровни разложения (см. рис. 15, 16). Последнее неизбежно приводит к усложнению процедуры обнаружения сигнала с особенностью на фоне помехи, поскольку вейвлет-спектр самой помехи находится в той же самой области, что и спектр особенности. Наиболее “помехоустойчивой” особенностью в этом случае оказывается производная δ -функции (модель f_8 , энтропия $M = 1.00$), поскольку в базисе оптимального для нее вейвлета haar ее спектр ограничивается лишь одним уровнем разложения (см. табл. 2).

Объяснить этот факт можно тем, что данная модель является предельным случаем сверхширокополосного сигнала, для которого, как известно, базис вейвлетов является собственным базисом [11]. Достаточно локализованные вейвлет-спектры в оптимальном вейвлетном базисе имеют вертикальный перегиб (f_{10} , $M = 1.43$), излом (f_7 , $M = 1.46$), скачок амплитуды (f_4 , $M = 2.00$), шпиль (f_{11} , $M = 3.47$) и бесконечно узкий импульс (f_1 , $M = 3.65$). Эта информация полезна для практиков, поскольку первые три модели могут рассматриваться в качестве аппроксимаций ударных волн, а две последние – солитонов.

Полученные в работе результаты направлены, в первую очередь, на создание специалистам условий для более полной и корректной интерпретации результатов применения АВП и ДВП к анализу реальных сигналов различной природы, где в разных сочетаниях могут встречаться рассмотренные выше особенности.

Таким образом, использование разных типов вейвлет-преобразований для анализа сигналов с особенностями является целесообразным и перспективным. При этом рекомендуется совместное использование НВП, АВП и ДВП, поскольку они хорошо дополняют друг друга. НВП и АВП целесообразно применять для обнаружения особенности и ее классификации,

а ДВП – для обнаружения сигнала с особенностью на фоне помехи и очистки от нее.

Выводы

1. Для ряда простых вещественных моделей во временной области проведен вейвлет-анализ сигналов с особенностями с использованием АВП и ДВП.

2. Аналитическим и численным путем вычислены комплексные вейвлет-спектры модельных сигналов. Показано, что фазовая характеристика, полученная из комплексного вейвлет-спектра, предпочтительна при обнаружении локальных особенностей сигнала даже в случае относительной малости параметра, характеризующего особенность.

3. При анализе сигналов с особенностями рекомендуется совместное применение НВП, ДВП и АВП, которые хорошо дополняют друг друга.

4. Продемонстрирована эффективность ДВП при анализе сигналов с особенностями. На основе критерия минимизации энтропии рекомендованы оптимальные вейвлеты для каждой конкретной модели сигнала.

5. Проведено восстановление модельных сигналов по их дискретному вейвлет-спектру с учетом заданного количества уровней разложения в базисе оптимального вейвлета.

Литература

1. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Вейвлет-анализ модельных сигналов с особенностями. 1. Непрерывное вейвлет-преобразование // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, №2. – С. 182-204.
2. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. / Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
3. Короновский А. А., Храмов А. Е. Непрерывный вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Физматлит, 2003. – 176 с.
4. Астафьева Н. М. Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166, №11. – С. 1115-1180.
5. The transforms and applications handbook / Editor-in-chief, Alexander Poularikas. – USA: CRC Press, 1996. – 1335 p.

6. Holschneider M. Wavelets: An Analysis Tool. – Oxford: Calderon Press, 1995. – 423 p.
7. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – Санкт-Петербург: ВУС, 1999. – 204 с.
8. Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171, №5. – С. 465-501.
9. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории – к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.
10. Чуи К. Введение в вейвлеты. / Пер. с англ. Я. М. Жилейкина. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
11. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения кратковременных знакопеременных и сверхширокополосных процессов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2004. – Т. 9, №9-10. – С. 31-62.

Вейвлет-анализ модельных сигналов з особенностями.

2. Аналитичне та дискретне вейвлет-перетворення

**О. В. Лазоренко, С. В. Лазоренко,
Л. Ф. Черногор**

Пропонується використовувати дискретне вейвлет-перетворення (ДВП) та аналітичне вейвлет-перетворення (АВП) для вивчення структури сигналів з особливостями. За допомогою аналітичних та числових методів виконано вейвлет-аналіз простих реальних моделей таких сигналів у часовій області. ДВП використано для аналізу модельних сигналів з особливостями. Для кожного сигналу з допомогою критерію мінімізації ентропії розкладання обрано оптимальний вейвлет для ДВП. Відтворено модельний сигнал за дискретним вейвлет-спектром з використанням

різної кількості рівнів розкладання. Показано, що фазовій характеристиці комплексного вейвлет-спектру, яку отримано з АВП, слід віддавати перевагу у виявленні слабо-виражених особливостей сигналу. Рекомендується одночасне застосування безперервного вейвлет-перетворення, ДВП та АВП, що добре доповнюють одне одного.

Wavelet Analysis of the Model Signals with Peculiarities.

2. Analytical and Discrete Wavelet Transforms

**O. V. Lazorenko, S. V. Lazorenko,
and L. F. Chernogor**

The discrete wavelet transform (DWT) and the analytical wavelet transform (AWT) are proposed to use for investigating the structure of the signals with peculiarities. Wavelet analysis of the simple real models of such signals in the time domain was carried out analytically and numerically. The DWT was used for analysis of the model signals with peculiarities. Using the criterion of the expansion entropy minimization, the optimal wavelet basis for DWT was selected for each model signal. The model signal was recovered from discrete wavelet spectrum using different number of the level of expansion. The phase characteristic of the wavelet spectrum obtained during AWT was shown to be preferable for detection of weakly pronounced signal peculiarities. The continuous wavelet transform, DWT and AWT, being mutually complementary, are recommended to use simultaneously.