

## Комбинаторные методы в радиофизике, астрономии и радиоастрономии

Л.Е.Копилович и Л.Г.Содин

*Радиоастрономический институт Национальной Академии наук Украины,  
Украина, 310002, Харьков, ул.Краснознаменная, 4.*

*Статья поступила в редакцию 10 августа 1995 г., после переработки 12 декабря 1995 г.*

Современные телескопы и интерферометры практически любых диапазонов волн (от радио- до гамма-) представляют собой многоэлементные конструкции. При синтезе таких инструментов основная задача состоит в оптимальном размещении составляющих их элементов с целью получить наилучшие соответствия предъявляемым в каждом конкретном случае требованиям: наиболее полное покрытие области пространственных частот для интерферометров, возможность точного восстановления распределения яркости в исследуемом объекте при разрушающем влиянии среды распространения, наивысшая чувствительность и т.п. В работе показано, как оптимизировать многоэлементные системы различного типа на основе использования математических методов, взятых из комбинаторики и теории чисел.

Сучасні телескопи та інтерферометри практично будь-яких діапазонів хвиль (від радіо- до гамма-) являють з себе багатоелементні конструкції. При синтезі таких інструментів основна задача полягає в оптимальному розміщенні утворюючих їх елементів з метою отримати найкращу відповідність до вимог, що мають місце у конкретному випадку: найповніше покриття області просторових частот для інтерферометрів, можливість точної відбудови розподілення яскравості в досліджуваному об'єкті, найвищої чутливості і т.п. В роботі показано, як оптимізувати багатоелементні системи на базі використання математичних засобів, що беруться з комбінаторики та теорії чисел.

### 1. Введение

Интенсивное развитие многих направлений радиофизики, радиотехники и ряда смежных с ними дисциплин дало толчок к использованию различного рода многоэлементных систем. В частности, к таковым относятся антенные решетки, радио- и оптические интерферометры, орбитальные телескопы рентгеновского и гамма-диапазонов, радиолокаторы с частотно-временным кодированием импульсного радиоизлучения и многие другие. Желание повысить основные характеристики таких систем (в первую очередь, чувствительность и разрешающую способность) привело к попыткам применить неэквидистантное размещение элементов. Такое размещение заданного числа элементов может улучшить указанные характеристики, в ряде случаев это дает возможность функционирования в крайне неблагоприятных условиях, например, когда разрушающее действие среды распространения приводит к полной неработоспособности эквидистантных систем. Так, например, удается достичь дифракционного предела разрешения в радио- и оптической астрономии при наблюдении космических

источников излучения сквозь турбулентную атмосферу, межзвездную среду и ионосферу.

При синтезе неэквидистантных систем возникают задачи оптимального размещения их элементов с целью наилучшим образом удовлетворить требованиям, определяемым назначением синтезируемых систем. Строгое решение таких задач нереально в силу их нелинейности и большого объема вычислений. Поэтому важное значение приобретает поиск квазиоптимальных решений, априорно оцениваемых как дающих "хорошие" результаты. Оказалось, что для этой цели во многих случаях удобны методы, основанные на использовании некоторых числовых комбинаторных конструкций. В качестве таковых можно применять различного рода разностные множества (РМ): как известные циклические разностные множества (ЦРМ) [1], так и введенные в [2] двумерные разностные множества (ДРМ) и некоторые другие их обобщения [3,4].

Впервые предложение об использовании ЦРМ для синтеза неэквидистантных линейных антенн-решеток (АР) с низким уровнем бокового излучения сделано Липером [5] в 1978г. Комбинаторный подход к синтезу двумерных АР с низким уровнем бокового излучения

предложен в [2] и развит в [3,6]. Использование разностных множеств для создания орбитальных рентгеновских и гамма-телескопов известно с 1976 г. [7] и развито в [8]. Можно сказать, что со второй половины 70-х годов началось широкое применение комбинаторных конструкций в самых различных радио- и оптических системах, а также в системах регистрации "жестких" излучений, причем не только в астрофизике, но и в медицине, при неразрушающем контроле и т.п.

В настоящей работе описаны результаты, полученные при применении РМ к синтезу упомянутых выше систем. Излагаются как уже опубликованные исследования, так и новые, до сих пор не публиковавшиеся.

## 2. Разностные множества: определения и основные свойства

Здесь будут рассматриваться разностные множества на одномерных (линейных) и двумерных (прямоугольных) целочисленных решетках. Циклическим разностным множеством  $(V, k, \lambda)$  [1] называется множество  $D_1 = \{d_j\}$  из  $k$  целых чисел на решетке длины  $V$ , такое, что любое целое число  $\mu$ ,  $0 < \mu < V$  имеет точно  $\lambda$  представлений в виде

$$\mu \equiv d_i - d_j \pmod{V} \quad (1)$$

Так, при  $V = 19, k = 9, \lambda = 4$  соответствующее множество таково:  $0, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16$ . Аналогично, двумерным разностным множеством  $(v_a, v_b, k, \lambda)$  [6] называется множество

$D_2 = \{(a_j, b_j)\}$  из элементов на прямоугольной решетке размера  $v_a \times v_b$ , такое, что координаты любого элемента решетки  $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$  имеют точно  $\lambda$  представлений в виде

$$\mu_1 \equiv a_i - a_j \pmod{v_a}, \mu_2 \equiv b_i - b_j \pmod{v_b}. \quad (2)$$

Эквивалентное определение РМ: это такое  $k$ -элементное множество на решетке длины  $V$  (или размера  $v_a \times v_b$ ), что при любом циклическом сдвиге по  $\pmod{V}$  (или вдоль осей координат по  $\pmod{v_a}, \pmod{v_b}$ ) полученное множество будет иметь одинаковое число  $\lambda$  совпадающих элементов с исходным. Иначе говоря, если определить характеристическое множест-

во  $\chi$  для РМ - как принимающее значение 1 в местах расположения элементов множества и 0 - в остальных узлах решетки, то циклическая автоковариационная функция  $R(\chi)$  при любом ненулевом сдвиге равна  $\lambda$  [1]. Это свойство РМ оказывается очень полезным при использовании их в задачах пространственного, временного и частотного кодирования.

Разностные множества характеризуются также тем свойством, вытекающим из общей теории [9], что для них имеют место равенства

$$\sum_{l=1}^k \exp(i l x) = k - \lambda; x = 2\pi/V, l = 0, 1, \dots, V-1. \quad (3)$$

в случае одномерных решеток и аналогично

$$\sum_{l=1}^k \exp[i(a x_l + b y_l)] = k - \lambda; \quad (4)$$

$$x_l = 2\pi l/v_a, y_m = 2\pi m/v_b,$$

для прямоугольных решеток.

Между параметрами как циклических, так и двумерных РМ существует соотношение [10]

$$k(k-1) = \lambda(V-1) \quad (5)$$

(в двумерном случае  $V = v_a v_b$ ), так что независимых параметров у них всего два, например,  $k$  и  $V$ ; иногда в качестве независимых параметров РМ удобно брать  $k$  и  $n = k - \lambda$  [1].

Разностные множества существуют не для всех пар значений  $k$  и  $V$  (это видно уже из (5), поскольку  $\lambda$  должно быть также целым числом). Исследование вопросов существования ЦРМ проведено в [1], где даны также таблицы этих множеств при всех значениях  $k \leq 100$ . Аналогичное исследование для ДРМ проведено в [11], там же имеются и таблицы ДРМ. Следует отметить, что когда числа  $v_a$  и  $v_b$  - взаимно простые, ДРМ существует одновременно с ЦРМ, имеющим те же  $k, \lambda$ , и с  $V = v_a v_b$  и координаты его элементов определяются по формулам [3]:

$$a_j \equiv d_j \pmod{v_a}, b_j \equiv d_j \pmod{v_b}. \quad (6)$$

В случаях, когда  $(v_a, v_b) > 1$ , ДРМ называются нециклическими.

В последнее время было доказано [12] существование нециклических ДРМ на решетках размеров

$$2^n \times 2^n, (3 \cdot 2^n) \times (3 \cdot 2^n), 2^n \times 2^{n-2}, (3 \cdot 2^n) \times (3 \cdot 2^{n-2}), n \geq 2, \quad (7)$$

и разработаны методы их построения.

Важное значение при использовании РМ в задачах синтеза многоэлементных систем имеет то обстоятельство, что если при заданных параметрах РМ существует, то имеется целый ансамбль этих множеств: ЦРМ с теми же параметрами являются множества, получаемые из одного (исходного) умножением всех его элементов на число, взаимно простое с  $V$  (по  $\text{mod } V$ ), или циклическим сдвигом этого множества. В двумерном случае новые ДРМ получаются также и при некоторых более сложных преобразованиях исходного множества [6]. Наличие ансамбля РМ с заданными значениями параметров позволяет решать задачу оптимизации путем подбора наилучшего РМ. Критерии оптимальности, естественно, будут разными для различных систем и далее формулируются в каждом из описываемых приложений.

Отметим, что хотя ниже рассматриваются системы не близких типов, применение к их синтезу теории разностных множеств во всех случаях дает заметное улучшение качества, что будет проиллюстрировано примерами.

### 3. Синтез линейных и плоских неэквидистантных антенных решеток

3.1. Линейные неэквидистантные антенные решетки (НАР) давно привлекают внимание [13] в связи с принципиальной возможностью уменьшения числа излучателей при сохранении разрешающей способности либо уменьшения бокового излучения при сохранении числа излучателей в антенне. Однако задача оптимизации характеристик НАР в общем случае (при различных амплитудах и фазах токов излучателей) связана не только с необходимостью обеспечения устойчивой работы НАР, но, главным образом, со сложностью ее решения даже для небольших решеток. Поэтому при исследовании линейных НАР в настоящее время обычно ограничиваются случаем изотропных равноамплитудных излучателей.

Используемый здесь критерий оптимизации НАР заключается в минимизации максимума боковых лепестков (БЛ) ее диаграммы направ-

ленности (ДН), выражение для которой может быть записано в виде [14]

$$F(x) = \left| \sum_{j=1}^k \exp(i d_j x) \right|^2, x = \frac{\omega d}{c} (\cos \theta - \cos \theta_0), \quad (8)$$

где  $d$  - наименьший интервал между вибраторами,  $\omega$  - круговая частота,  $c$  - скорость света,  $\theta$  - угол с линией размещения элементов,  $\theta_0$  - угол фазирования, а  $d_1, \dots, d_k$  - позиции излучателей на решетке. Такой выбор критерия связан с тем, что главный лепесток ДН антенных решеток при числе излучателей  $k > 20$  практически не зависит от закона распределения излучателей и определяется лишь отношением размера апертуры к длине волны, в то время, как уровень боковых лепестков (УБЛ) существенным образом зависит от этого закона.

Трудность использования этого критерия заключается в невозможности получения пригодных для анализа формул при определении НАР с наименьшим максимумом БЛ, а численные расчеты, сводящиеся к некоторому перебору вариантов, чрезвычайно громоздки и практически недоступны даже для современных ЭВМ. Из-за этого приходилось прибегать к статистическим методам анализа [15,16], где трудно надеяться на получение результатов, близких к оптимальным.

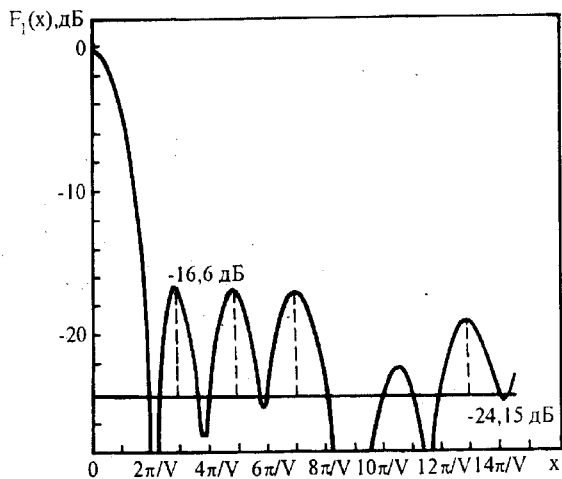
Чтобы оценить возможности использования комбинаторных методов для синтеза НАР, следует обратить внимание на идентичность (в точках  $x_l$ ) левой части формулы (3) и выражения для ДН (8). Выполнение равенств (3) в случае, когда координаты излучателей образуют ЦРМ с параметрами  $V, k, \lambda$ , означает, что ДН решетки имеет постоянное (равное  $k - \lambda$ ) значение на последовательности равноотстоящих точек, а максимум БЛ находится вблизи одной из точек  $x_l = \pi(2l + 1)/V$ . Условия (3) можно рассматривать как обобщающие чебышевский критерий оптимизации (когда максимумы всех БЛ диаграммы направленности эквидистантной АР имеют одинаковую величину) на случай НАР и обуславливающие "хорошие" свойства НАР на основе ЦРМ. Действительно, выполнение условий  $F(x) = \alpha \cos x$  на последовательности неравноотстоящих точек на интервале  $0 \leq x \leq \pi$  менее предпочтительно, поскольку между соседними точками, находящимися на большем расстоянии, имеется

возможность большего "выброса" для  $F(x)$ . К тому же  $F(x_i) < \bar{F} = k$ . ( $\bar{F}$  - среднее значение  $F(x)$  на интервале  $(0, \pi)$ ). Приведенные соображения позволяют путем перебора ЦРМ с одинаковыми  $V$  и  $k$  найти множество, близкое к оптимальному, т.е. обладающее минимальным УБЛ при заданной степени разрежения НАР, определяемой коэффициентом  $\beta = k/V$ .

В [14] был проведен обсчет НАР для случаев, когда множества  $\{d_j\}$  представляют собой ЦРМ различных типов [1,11] при  $20 < k < 150$ . Было показано, что таким путем можно синтезировать НАР с максимальным УБЛ до -18 дБ.

С ростом  $k$  происходит понижение (хотя и не монотонное) максимального УБЛ таких НАР, но при больших  $k$  темп понижения замедляется. Если ввести коэффициент превышения  $A$  максимального УБЛ над УБЛ в точках  $x_i$ , то значение этого коэффициента для НАР на основе ЦРМ в диапазоне значений  $20 < k < 150$  заключено в пределах от 3 дБ до 8 дБ, и его зависимость от  $k$  может быть описана приближенным соотношением

$$A = (4,0 + 0,02k \pm 1,0), \text{дБ} \quad (9)$$



**Рис.1.** Диаграмма направленности линейной антенной решетки на основе циклического разностного множеств с параметрами  $V=263$ ,  $k=131$ ,  $\lambda=65$ . Максимум боковых лепестков, равный -16,6 дБ, находится несколько левее точки. Средний УБЛ в точках равен -24,15 дБ (обозначен горизонтальной линией).

На рис.1 показана оптимизированная описанным способом ДН, содержащая  $k=131$

элемент на апертуре размера  $V=263$  с коэффициентом заполнения  $\beta \cong 0,5$  (использовано ЦРМ (263, 131, 65)). Максимальный боковой лепесток равен -16,6 дБ.

Для сравнения характеристик НАР, синтезируемых предлагаемым методом с описанным в литературе, можно привести такие примеры. В [17] описаны НАР с  $k=25, \beta \cong 0,25$  и с  $k=51, \beta \cong 0,5$ , оптимизированные на интервале  $0 \leq x \leq \pi/2$ : их УБЛ равен соответственно -10,5 дБ и -14,8 дБ. У аналогичных НАР на основе ЦРМ с большим интервалом оптимизации (что, вообще говоря, ухудшает результат) соответствующие УБЛ меньше: -12,1 дБ и -16,0 дБ. Различие в УБЛ возрастает с увеличением  $k$  (при одинаковых  $\beta$ ). Так, в [18] описана "случайная фрактальная" НАР с  $V=720, k=180, \beta=0,25$  и приведен ее УБЛ: -12,5 дБ. В то же время НАР на основе ЦРМ с тем же  $\beta=0,25$  и с близкими значениями  $k$  и  $V$  имеют следующие УБЛ: при  $V=677, k=169$ : -16,0 дБ; при  $V=901, k=255$ : -17,6 дБ.

В обоих случаях использование ЦРМ дает значительный выигрыш в величине БЛ.

Для оптимизации НАР могут быть использованы также обобщения ЦРМ-относительные разностные множества [4]. В ряде случаев целесообразно применять секционированные НАР, в каждой секции которых излучатели размещены по закону одного и того же ЦРМ [19].

3.2. Все вышесказанное о трудностях оптимизации линейных НАР тем более справедливо при синтезе двумерных (плоских) НАР. До сих пор не было эффективного метода получения больших НАР такого вида, а применению комбинаторных методов препятствовало отсутствие адекватного математического аппарата. Попытка Липера [5] применить для этой цели ЦРМ оказалась неудачной, так как приводила к появлению больших БЛ в главных сечениях ДН

$$F(x, y) = \left| \sum_{j=1}^k \exp[i(a_j x + b_j y)] \right|^2 \quad (10)$$

Задачу удалось решить с помощью введенных в [2] двумерных разностных множеств. Рассуждения, аналогичные приведенным в п.3.1 и использующие формулу (4) для ДРМ, показывают, что НАР на их основе должны иметь приемлемо низкие УБЛ. Обсчет с использованием ряда ДРМ с  $k < 150$  позволил получить решетки с УБЛ до -16 дБ. Пример решетки с

$v_a = v_b = 16, k = 120$  и ее ДН приведен на рис.2; максимальный УБЛ этой НАР равен -15,6 дВ. Для синтеза НАР можно использовать также двумерные обобщенные разностные множества (ДОРМ) [3].

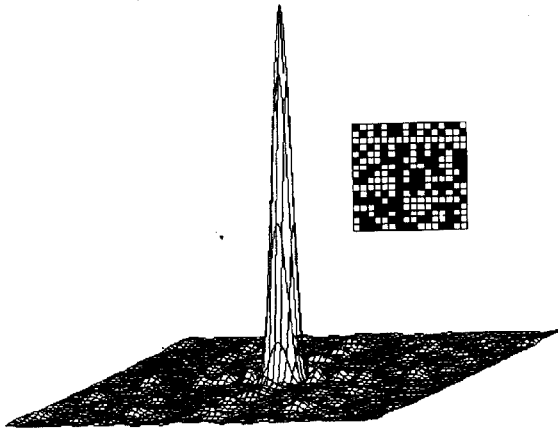


Рис.2. Неэквидистантная антенная решетка  $s = v_a = v_b = 16, k = 120$ : (а) диаграмма направленности; (б) схема размещения антенн.

#### 4. Многоэлементные радиоинтерферометры

При построении интерферометрических систем в радиодиапазоне возникает проблема такого размещения приемных антенн, которое бы обеспечивало полное или достаточно полное покрытие требуемой области пространственных частот. В зависимости от задачи, для решения которой создается система, можно различать четыре вида интерферометров:

- с небольшим числом (два-три) перемещаемых антенн (системы последовательного апертурного синтеза (АС));
- с набором фиксированных вдоль прямой неподвижных антенн, обеспечивающих покрытие области пространственных частот при вращении Земли (системы суперсинтеза);
- с двумерным размещением антенн, обеспечивающих "мгновенное" покрытие требуемой области пространственных частот (так называемый "snapshot" режим);
- промежуточный вариант, когда для полного покрытия требуется перемещение антенн в небольших пределах.

Далее рассматриваются только второй и третий случаи.

##### 4.1. Системы суперсинтеза

Оптимальное размещение антенн вдоль прямой линии в этом случае достигается путем группирования их в трех или четырех одинаковых секциях [20]. Наилучший результат, т.е. покрытие заданной области пространственных частот с минимальным числом антенн, получа-

ется при четырех секциях, расстояния между которыми равны  $l_1, 3l_1, 2l_1$ . Если используются три секции, то расстояния выбираются равными  $l_1$  и  $2l_1$ . В пределах секции размещение антенн подчиняется наиболее компактному ЦРМ  $(V, k, 1)$ , т.е. тому из эквивалентных  $(V, k, 1)$ , ЦРМ, которое имеет наименьший размах  $d_k - d_1$ . Если минимальное расстояние между антеннами (минимальная база), определяемое по максимальному размеру исследуемых космических источников, равно  $l$ , то  $l_1 = Vl$ .

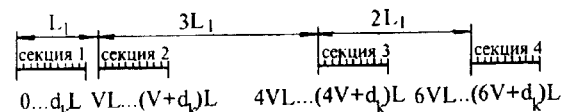


Рис.3. Схема расстановки приемных элементов в системах суперсинтеза (при четырех секциях).

Схема расстановки антенн при четырех секциях показана на рис.3. Внутри заштрихованных участков антенны размещены с интервалами  $d_1, \dots, d_k$ , длина каждой секции  $d_k l$ . Если число секций равно  $k_c$ , тогда полное число антенн в интерферометре составит  $N = k_c k$ . Число баз в интерферометре (без пропусков) следующее:

$$M = nV - (d_k - d_1) - 1 \quad (11)$$

(при  $k_c = 4, n = 7$ , а при  $k_c = 3, n = 4$ ). На самом деле наибольшая база  $M_1 = (n-1)V + (d_k - d_1)$ , но в интервале  $[M, M_1]$  есть не все базы.

Нетрудно видеть, что описанное размещение элементов дает заметный выигрыш. Так, например, кембриджский радиоинтерферометр CLFST [21] при 60 антеннах обеспечивает 776 баз. Оптимальный вариант (4 секции, внутри секции размещение в соответствии с ЦРМ  $(133, 12, 1)$ ,  $d_1 = 0, d_{12} = 85$ ) при 48 антеннах обеспечивает 845 баз. Одновременно может быть сокращена на 100 м полная длина системы. Если число антенн увеличить до 56 (использовав ЦРМ  $(183, 14, 1)$ ), то число баз составит 1153, т.е. разрешающая способность может быть увеличена в 1,47 раз сравнительно с кембриджской системой.

4.2. Двумерный мгновенный апертурный синтез

В этом случае антенны должны размещаться так, чтобы образовывались все базы от минимальной до максимальной по обеим координатам. Иначе говоря, в каждый момент времени должно быть полное покрытие  $u, v$ -плоскости в пределах заданной области. Обычно в качестве таковой выбирается квадрат или прямоугольник со сторонами, определяемыми требуемым разрешением. Классическим решением задачи является регулярное размещение антенн в виде буквы Т. Однако неэквидистантное размещение в плоскости может обеспечить лучшие результаты: полное покрытие будет достигнуто с меньшим числом антенн.

Двумерная система АС, покрывающая прямоугольную область в  $u, v$ -плоскости, может быть образована "перемножением" двух линейных систем АС. Если элементы одной из этих систем размещены на позициях  $a_1, \dots, a_{k_1}$  на апертуре, а другой - в  $b_1, \dots, b_{k_2}$ , то элементы двумерной системы размещаются на  $K = k_1 k_2$  позициях  $\{(a_i, b_j)\}$ . При наилучшем образом построенных линейных системах АС, выигрыш в числе элементов для большой двумерной системы такого типа, по сравнению с Т-системой, покрывающей ту же область  $\{|u| \leq R_1, |v| \leq R_2\}$ , может достигать 10%.

## 5. Оптические системы апертурного синтеза

5.1. В задаче восстановления изображений объектов, наблюдаемых сквозь неоднородную атмосферу [23], используются апертурные маски, представляющие собой в идеализированном случае наборы точечных субапертур - отверстий в непрозрачном экране. Для полного устранения влияния турбулентной атмосферы [24] маски должны быть безызбыточными, т.е. базовые расстояния между субапертурами должны быть попарно различны, что позволяет найти неискаженные амплитуды всех зарегистрированных компонент сигнала. В связи с этим требуется разработать методы построения безызбыточных масок (БМ) на больших двумерных (квадратных и прямоугольных) решетках. Такие методы могут быть основаны на использовании РМ с  $\lambda = 1$  [24,25]. В частности, множество [4]

$$\{(i, i^2 \bmod p)\}, i = 0, 1, \dots, p-1, \quad (12)$$

где  $p$  - простое число, является относительно простым РМ с  $\lambda = 1$ . поэтому оно образует БМ из  $p$  элементов на  $p \times p$ -решетке  $S_p$ , а значит, таковыми являются все эквивалентные РМ. Преобразуя множество (12) к такому виду, чтобы при последовательном вычеркивании из соответствующей двумерной таблицы пар нижних строк и правых столбцов из нее на каждом шаге исключался один элемент множества, мы получим возможность строить БМ из  $n$  элементов на решетках  $S_n$  при  $n = p-1, p-2, \dots$ . Этот метод позволяет строить БМ из  $k$  элементов на  $k \times k$ -решетках почти для всех значений  $k$ . Пример такого построения приведен на рис.4а (исходная таблица,  $p=19$ ) и 4б (преобразованная таблица). Из рис.4а видно также, как можно получить БМ из  $p+1$  элемента на решетке  $S_{p+1}$  (обведена штриховой линией). На рис.4б показаны БМ из  $n$  элементов при  $n = 18, 17, \dots, 10$ .

### 5.2. Вложенные маски

При мгновенном оптическом АС [26] на апертуре телескопа строится система неперекрывающихся согласованных БМ, что позволяет синтезировать изображение с использованием полного светового потока, попадающего на апертуру, т.е. по одной экспозиции. Здесь возникает вопрос о заполнении апертуры системой БМ, возможно, большего размера и таких, чтобы полнее покрыть заданную область пространственных частот. Такая система вложенных масок может быть построена следующим образом [28]. Во-первых, произведем линейную развертку квадратного экрана телескопа и подберем число вида  $V = q^2 + q + 1$ , где  $q = p^r$ , ближайшее к длине  $N$  полученной развертки (в заданном масштабе),  $V < N$ . Целочисленный отрезок длины  $V$  полученной развертки может быть заполнен системой из  $k$  неперекрывающихся БМ; первая из них представляет собой ЦРМ с параметрами  $V, k = q + 1$  и  $\lambda = 1, d_1 = 0$  и с добавлением элемента  $V$  (концевой точки отрезка), т.е. состоит из  $q + 2$  элементов, а остальные маски являются сдвигами этого ЦРМ, с исключенным нулевым элементом (т.е. состоят из  $q$  элементов каждая). Затем линейный отрезок вместе с построенной на ней системой масок сворачиваем (процедура, обратная развертке) на квадратную апертуру телескопа; при этом эле-

менты масок заполняют всю апертуру (за исключением части последней строки квадрата), а каждая БМ на отрезке переходит в БМ на квадрате. Можно показать, что отношение количества пропусков среди интервалов в соответствующей области  $u, v$ - плоскости, покрываемой такой системой масок, к числу различных интервалов на ней будет стремиться к нулю с увеличением площади апертуры.

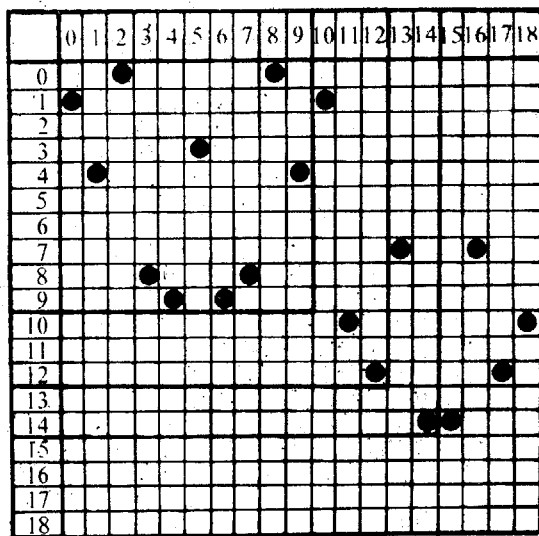
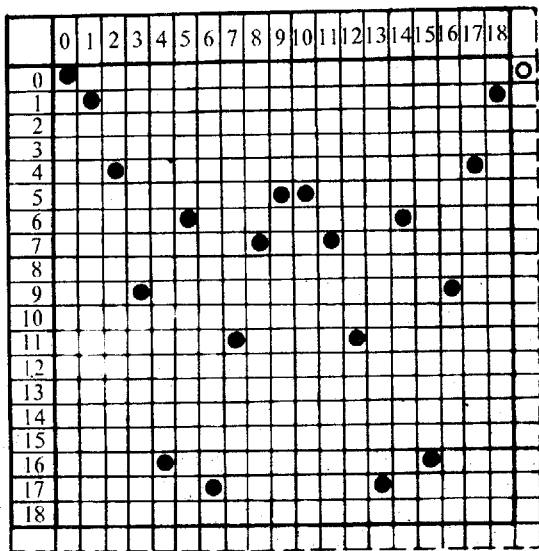


Рис.4. (а) двумерная таблица, соответствующая множеству (11) при  $p=19$  (обведена сплошной линией; места расположения элементов множества отмечены черными кружками). Дополнительный элемент (отмечен светлым кружком) вместе с элементами множества (11) образует безызыточную маску на решетке  $20 \times 20$  (обведена пунктиром). (б) Преобразованная таблица, вычеркивание из которой пар нижних строк и правых столбцов дает БМ из  $n$  элементов на решетках при  $\bar{n} = 18, 17, \dots, 10$ .

Построение системы масок можно производить, беря в качестве исходной маски любое ЦРМ с параметрами  $V, k; \lambda = 1$  и с  $d_1 = 0$ . Однако требуется еще произвести проверку системы БМ на согласованность, необходимую для возможности восстановления связи между фазами Фурье-компонент изображения, разрушенного атмосферой, методом замыкания фаз. Условие согласованности заключается в том [29], чтобы все различные треугольники, образуемые тройками элементов в масках системы, можно было выстроить в цепочку таким образом, что каждый последующий треугольник будет иметь две стороны, конгруэнтные уже встречавшимся в предыдущих треугольниках цепочки. Поскольку при больших  $q$  построенная система содержит почти все интервалы, имеющиеся на апертуре, можно ожидать, что она окажется согласованной. Если же условие согласованности не выполнено, следует построить новую систему БМ, взяв в качестве исходной маски другое эквивалентное ЦРМ и т.д.

5.3. Многолучевой оптический интерферометр, предназначенный для полного измерения функции когерентности светового потока в заданной пространственной области, имеет избыточную входную и безызыточную выходную апертуры [30,31], каждая из которых требует оптимизации. В первом случае должно быть обеспечено покрытие максимальной области пространственных частот при заданном числе субапертур, а во втором - требуется построить БМ с этим числом субапертур в области минимальных размеров на апертурной плоскости. Вторая из этих задач рассмотрена в п.5.1, а первая, как нетрудно видеть, идентична задаче построения модели двумерной системы АС. Однако задачу оптимизации входной апертуры желательно рассмотреть с учетом обеспечения повышенной надежности функционирования интерферометра, что связано с возможностью его космического базирования. Например, можно потребовать обеспечения полного покрытия заданной области  $u, v$ -плоскости при выходе из строя любого одного из элементов входной апертуры, т.е. обеспечения двукратного покрытия этой области. Системы, обеспечивающие двукратное покрытие, известны - это крест Миллса [32] и подобные ему системы. Построение конфигураций элементов, обеспечивающих тот же эффект при меньшем числе элементов, может быть осуществлено тем же способом, что и описанный в п.4.2, с использованием ЦРМ с  $\lambda = 1$  и  $\lambda = 2$ , а также ДРМ с  $\lambda = 2$ . Выигрыш по сравнению

с соответствующими крестами Миллса достигает 5% и выше для квадратных областей, а для вытянутых прямоугольных областей в  $u, v$ -плоскости он значительно больший.

### 6. Синтез кодированных масок для рентгеновских и гамма- телескопов

Ввиду невозможности создания отражающих и преломляющих систем для "жестких" излучений современные орбитальные рентгеновские [33] и гамма-телескопы [34] с целью повышения разрешающей способности и чувствительности используют в качестве входной апертуры кодированные маски типа равномерно-избыточных (URA) [8]. С их помощью удается получить безлепестковую аппаратную функцию телескопа. Фактически маски типа URA основаны на ДРМ, получаемых из ЦРМ (см. формулу (6)), и их класс может быть расширен за счет использования нециклических ДРМ, существующих, в частности, на решетках (7).

Для некоторых типов ДРМ возможно построение аппаратных функций телескопа со средним нулевым УБЛ и весьма низким максимальным УБЛ [35,36], что также делает их вполне приемлемыми для практического применения. Возможно построение кодированных масок и без использования РМ. Главное, чтобы для выбранной маски существовала так называемая "восстанавливающая матрица", дающая при свертке с кодированным изображением неискаженную карту объекта [37].

### 7. Другие применения

Методы, изложенные в предыдущих разделах, могут быть применены и для решения других задач. Так, в локационных устройствах используются зондирующие импульсные сигналы с кодированным изменением частоты [38]. Если обозначить последовательность промежутков времени, в течение которых посылаются импульсы, через  $t_1, \dots, t_m$ , а набор частот - через  $f_1, \dots, f_n$ , то переданный сигнал может быть описан матрицей  $((a_{ij}))$ , где  $a_{ij} = +1$ , если в момент времени  $t_i$  импульс посылается на частоте  $f_j$ , и  $a_{ij} = 0$  - в остальных случаях. Автокорреляционная функция  $C(i, j)$  такой матрицы (функция неопределенности сигнала [39]) представляет собой меру совпадения принятого и переданного сигналов (с учетом сдвигов по времени и частоте). Поскольку жела-

тельно, чтобы  $|C(i, j)| \leq 1$  при всех  $i, j$ , плюсовые элементы в таблице  $((a_{ij}))$  должны образовывать безизбыточную конфигурацию, т.е. мы приходим к задаче, идентичной рассмотренной в п.5.1 (при  $m=n$ ).

Для оптимизации конструкции рентгеновских томографов [40] также могут быть использованы разностные множества на двумерных (а возможно, и на трехмерных) решетках.

### Заключение

Как видно из вышеизложенного, использование многоэлементных радио и оптических систем, базирующихся на комбинаторных конструкциях, находит широкое применение в ряде важных направлений радиофизики, радиоастрономии, астрономии и техники. Описанные в работе исследования новых методов построения таких систем позволяют заметно повысить эффективность их функционирования, а также экономичность. Авторы полагают, что в дальнейшем область применения рассматриваемых конструкций расширится. В связи с этим представляет интерес поиск новых типов аналогичных комбинаторных конструкций и методов их построения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда ГКНТ Украины (проект N2.3/474).

1. Baumert L.D. Cyclic Difference Sets/Lect.Notes in Math., v.182. Berlin. Springer, 1971.
2. Копилов Л.Е., Содин Л.Г. Докл.АН УССР, Сер.А, 1986, N9, с.45.
3. Копилов Л.Е., Содин Л.Г. Радиотехн. и электрон., 1994, т.39, N3, с.380.
4. Elliott J.E.H., Butson A.T. Illinois J.Math., 1966, v.10, N4, p.517.
5. Patent USA, N4.071.848. Leeper D.C., 1978.
6. Kopilovich L.E., Sodin L.G. IEE Proc.-H, 1991, v.138, N3, p.233.
7. Gunson J., Polychronopoulos B. MNRAS, 1976, v.177, N5, p.485.
8. Fenimore E., Cannon T.M. Appl.Opt., 1978, v.17, N3, p.337.
9. Turyn R.J. Pacific J. Math. 1965, v.15, N1, p.319.
10. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
11. Копилов Л.Е. Разностные множества на двумерных прямоугольных решетках при  $k < 100$ . Харьков, ИРЭ АН УССР, 1987, 21с. Деп. в ЦНИИ "Электроника", N P4508.
12. Wild P. Electr.Lett., 1988, v.24, N14, p.845.



13. Антенные решетки / под ред. Л.С.Бененсона. М. Сов. радио, 1968.
  14. Копилов Л.Е., Содин Л.Г. Радиотехн. и электрон., 1989, т.34, N10, с.2059.
  15. Содин Л.Г. Радиотехн. и электрон., 1966, т.11, N11, с.1953.
  16. Шифрин Я.С. Вопросы статистической теории антенн. М. Сов.радио, 1970.
  17. Левин О.И. Антенны. М. Связь, 1971, Вып.11, с.15.
  18. Ким Й., Джаггард Д.Л. ТИИЭР, 1986, т.74, N9, с.124.
  19. Копилов Л.Е., Содин Л.Г. Радиотехн. и электрон., 1992, т.37, N12, с.2155.
  20. Копилов Л.Е. MNRAS, 1995, v.274, p.544.
  21. Rees N. MNRAS, 1990, v.244, p.233.
  22. Копилов Л.Е. Радиотехн. и электрон., 1988, т.33, N9, с.1918.
  23. Bruck Yu.M., Sodin L.G. Opt.Communs., 1979, v.30, N3, p.304.
  24. Ayers G.R., Northcott M.J., Daynty J.C. JOSA, 1988, v.A5, p.963.
  25. Копилов Л.Е. Радиотехн. и электрон., 1987, т.32, N7, с.1545.
  26. Kopilovich L.E. Opt.Communs., 1988, v.68, N7, p.7.
  27. Уваров В.Н. Докл. АН УССР. Сер.А, 1979, N10, с.839.
  28. Kopilovich L.E. Optica Acta, 1984, v.31, N12, p.1409.
  29. Уваров В.Н., Бычинский В.И. XIV Всесоюз. радиоастрон. конф. (Ереван, окт. 1982 г.) Тез. докл., Ереван, 1982, с.367.
  30. Корниенко Ю.В., Уваров В.Н. Докл. АН УССР Сер.А, 1987, N4, с.60.
  31. Roddier F. JOSA, 1987, v.A4, N8, p.1396.
  32. Mills B.Y. IRE Tr. Australia, 1963, v.24, N2, p.132.
  33. Roques J.R., Paul J. et al. Adv.Space Res., v.10, Pergamon Press, Oxford, p.223.
  34. Sunyaev R.A., Babichenko S.I. et al/Adv.Space Res., v.10, Pergamon Press, Oxford, p.233.
  35. Копилов Л.Е., Содин Л.Г. Письма в Астроном.журн., 1993, т.19, N12, с.380.
  36. Kopilovich L.E., Sodin L.G. MNRAS, 1994, v.266, p.375.
  37. Содин Л.Г.//Письма в Астроном.журн., 1995, т.21, N6, с.476.
  38. Костас Дж.П. ТИИЭР, 1984, т.72, N8, с.5.
  39. Голомб С.У., Тейлор Г. ТИИЭР, т.72, N9, с.44.
- Paxman R.G., Gindi H.H. In "Signal Recovery and Synthesis with Incomplete Information and Partial Constraints". Incline Village, Nevada, USA, January 12-14, 1983.

**Combinatorial Methods in Radio Physics,  
Astronomy and Radio Astronomy**

**L.E.Kopilovich and L.G.Sodin**

Modern telescopes and interferometers of any wave range (from radio up to gamma) represent multi-element systems. When synthesizing such instruments, the basic problem is to arrange optimally their elements to fit the needed requirements, such as the most complete coverage of the spatial - frequency domain (for interferometers), the possibility of exact restoring the brightness distribution in the object investigated, when the destroying influence of the propagation medium is appreciable; maximum sensibility, etc. Shown is how various multi-element systems can be optimized by using mathematical methods of combinatorics and number theory.