

## Системный спектральный анализ сигналов: теоретические основы и практические применения

О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор<sup>1</sup>

*Харьковский национальный университет радиозлектроники,  
Украина, 61077, г. Харьков, пр. Ленина, 14  
E-mail: Oleg-Lazorenko@yandex.ru*

*<sup>1</sup>Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4  
E-mail: Leonid.F.Chernogor@univer.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 5 апреля 2007 г.*

Предложен новый комплексный метод анализа сигналов – системный спектральный анализ, – основанный на совместном применении линейных и нелинейных интегральных преобразований. Системный подход впервые успешно использован для анализа сигналов различной природы. Продемонстрировано, что системный спектральный анализ позволяет проводить комплексное исследование сигнала, компенсируя недостатки одних используемых интегральных преобразований достоинствами других, поскольку каждое преобразование обладает своим уникальным набором свойств. Отмечено, что одновременное использование линейных и нелинейных преобразований дает возможность эффективного анализа сигналов в присутствии как гауссовского (линейные преобразования), так и негауссовского (нелинейные преобразования) шума. На примере анализа реальных процессов, имеющих искусственный (старт космического аппарата) или естественный (“волна-убийца”) характер, показана эффективность системного спектрального анализа как нового комплексного метода анализа сигналов.

### Введение

В конце XX – начале XXI вв. все более активное применение новых видов сигналов (фрактальных [1], ультракоротких сверхширокополосных (СШП) [2], фрактальных СШП [3], прямохаотических СШП [4] и т. п.) существенно потеснило позиции традиционных методов анализа сигналов, основанных на преобразовании Фурье, как в области теоретических исследований, так и в практических приложениях. Широкое применение получили различные виды вейвлет-анализа: непрерывное вейвлет-преобразование, вейвлет-ряды, вейвлет-фреймы, аналитичес-

кое вейвлет-преобразование, дискретное вейвлет-преобразование, стационарное вейвлет-преобразование, вейвлет-пакеты и др. (см., например, [5-13]). Появились новые модификации известных преобразований (например, адаптивное преобразование Фурье [14]). Наряду с перечисленными выше линейными преобразованиями чаще стали применяться нелинейные преобразования. Кроме традиционной спектральной программы Фурье (см., например, [5-13]), стали больше использоваться, в частности, преобразования класса Коэна [15] (преобразование Вигнера [16], преобразование Чои–Вильямса [17, 18]).

Вместе с тем каждое отдельно взятое преобразование имеет свои сильные и слабые стороны. Представляется целесообразным применение системного подхода к анализу сигналов, который позволил бы компенсировать недостатки одних преобразований достоинствами других. Этим обуславливается актуальность настоящей работы.

Целью работы является разработка комплексного метода анализа сигналов – системного спектрального анализа – и демонстрация его возможностей на реальных практических примерах.

### 1. Теоретические основы

Системный спектральный анализ базируется на совместном применении ряда время-частотных интегральных преобразований для анализа сигналов произвольной природы.

Используемые время-частотные преобразования делятся на две группы. Первую группу, группу линейных преобразований, составляют непрерывное вейвлет-преобразование (НВП), аналитическое вейвлет-преобразование (АВП), динамическое преобразование Фурье (ДПФ), адаптивное преобразование Фурье (АПФ) и преобразование Габора (ПГ). Вторая группа, груп-

па нелинейных преобразований, состоит из спектрограммы Фурье (СФ), преобразования Вигнера (ПВ), преобразования Чои–Вильямса (ПЧВ) и преобразования Борна–Жордана (ПБЖ). Кратко рассмотрим каждое из них.

#### 1.1. Непрерывное вейвлет-преобразование

Пусть задан вещественный сигнал  $f(t)$ . Тогда НВП сигнала  $f(t)$  определяется соотношением (см., например, [1-6]):

$$Wf(a,b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

где  $\psi(t)$  – вещественная вейвлетобразующая функция, часто называемая просто вейвлетом;  $a$  – параметр масштабирования;  $b$  – параметр сдвига;  $Wf(a,b)$  – вещественный вейвлет-спектр сигнала  $f(t)$ .

Параметр масштабирования  $a$  непосредственно связан с периодом  $T$  соотношением  $T = ka$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности ( $k > 0$ ), зависящий от выбранной функции  $\psi(t)$ . Значения этого коэффициента для различных вейвлетов приведены в таблице. Параметр сдвига  $b$  связан с переменной времени  $\tau$  простым соотно-

Таблица. Значения коэффициента  $k$  для различных вейвлетов

Вейвлет	$k$	Вейвлет	$k$	Вейвлет	$k$
haar (db1)	1	coif3	1.4	rbio2.2	1.67
db2	1.5	bior1.1	1	meyr	1.45
db3	1.25	bior1.3	1.25	dmey	1.5
db4	1.4	bior1.5	1.28	gaus1	5
db5	1.5	bior2.2	1	gaus2	3.3
sym2	1.5	bior2.4	1.12	gaus3	2.5
sym3	1.25	bior3.1	0.02	gaus4	2
sym4	1.4	bior3.3	0.98	gaus5	2
coif1	1.25	rbio1.1	1	mexh	4
coif2	1.37	rbio1.3	1.25	morl	1.23

шением:  $b = \tau$ . Тогда с учетом новых переменных имеем:

$$Wf(T, \tau) = |kT|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t - \tau}{kT}\right) dt.$$

Достоинствами НВП являются локализованность по времени и частоте базисных функций, автомодельность базиса, хорошее время-частотное разрешение, возможность исследования локальных особенностей сигнала, наличие большого набора разнообразных вейвлетобразующих функций. НВП особенно удобно для анализа сигналов, локализованных во временной области, в частности, СШП сигналов. Для них базис вейвлетов является собственным базисом [19, 20, 21].

К недостаткам НВП можно отнести зависимость вейвлет-спектра анализируемого сигнала от вида выбранного вейвлета и субъективность выбора вейвлета в каждом конкретном случае. Одним из возможных путей преодоления последнего недостатка может служить предложенный нами функционал качества [20]. Еще один недостаток НВП заключается в отсутствии обратного преобразования для неортогональных вейвлетов. К сожалению, часть имеющихся вещественных вейвлетов называется именно такой.

В системном спектральном анализе будем использовать модуль вейвлет-коэффициентов  $|Wf(T, \tau)|$ , его скелетон (линии локальных максимумов), а также энергограмму НВП  $E_w f(T)$  и дисперсию модуля вейвлет-коэффициентов  $D_w(T)$ , которые соответственно задаются соотношениями:

$$E_w f(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |Wf(T, \tau)|^2 d\tau,$$

$$D_w(T) = \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \times$$

$$\times \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} [ |Wf(T, \tau)| - \langle |Wf(T, \tau)| \rangle ]^2 d\tau,$$

где

$$\langle |Wf(T, \tau)| \rangle = \frac{k}{(T_{\max} - T_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times$$

$$\times \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} |Wf(T, \tau)| dT d\tau;$$

$T_{\max}$ ,  $T_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальные и минимальные значения параметров  $T$  и  $\tau$ , при использовании которых вычисляется вейвлет-спектр  $Wf(T, \tau)$ .

Заметим, что энергограмма любого из рассматриваемых нами преобразований отражает распределение энергии исследуемого сигнала по различным масштабам периода  $T$  для линейных преобразований и частоты  $\omega$  для нелинейных. Дисперсия модуля функции спектральной плотности (ФСП) линейных преобразований и среднеквадратичное отклонение ФСП нелинейных преобразований характеризует степень изменения распределения энергии сигнала на разных масштабах  $T$  и  $\omega$  соответственно. Необходимость введения  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$ ,  $T_{\max}$  и  $T_{\min}$  для линейных преобразований и  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  для нелинейных обусловлена тем, что при анализе сигнала  $f(t)$  численными методами ФСП того или иного преобразования вычисляется на конкретных конечных интервалах параметров  $\tau$ ,  $T$  и  $\omega$ . А потому упомянутые выше средние значения, дисперсии и среднеквадратичные отклонения также вычисляются на этих же интервалах. Естественно, что в рамках системного спектрального анализа все преобразования следует рассматривать на одних и тех же интервалах. В противном случае сравнение результатов разных преобразований окажется затруднительным.

### 1.2. Аналитическое вейвлет-преобразование

Вместо вещественной вейвлетобразующей функции  $\psi(t)$  можно использовать комплексную  $\dot{\psi}(t)$ . Тогда соответствующее преобразование, называемое АВП вещественного сигнала  $f(t)$ , задается выражением (см., например, [1]):

$$\dot{W}f(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \dot{\psi}^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt,$$

где  $\dot{\psi}^*(t)$  – функция, комплексно сопряженная аналитическому вейвлету  $\dot{\psi}(t)$ ;  $a$  – параметр масштабирования;  $b$  – параметр сдвига;  $\dot{W}f(a, b)$  – комплексный вейвлет-спектр сигнала  $f(t)$ .

С использованием введенных выше переменных  $T$  и  $\tau$  получаем:

$$\dot{W}f(T, \tau) = |kT|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \dot{\psi}^* \left( \frac{t-\tau}{kT} \right) dt.$$

Значения коэффициента пропорциональности  $k$  для наиболее часто употребляемых аналитических вейвлетов приведены выше в таблице.

Основное отличие АВП от НВП заключается в комплекснозначности используемого вейвлета  $\dot{\psi}(t)$ , а следовательно, и получаемого вейвлет-спектра  $\dot{W}f(T, \tau)$ . АВП наследует от НВП как все его достоинства, так и недостатки. Кроме того, полезной особенностью АВП является возможность рассмотрения не только  $\text{Re} \dot{W}f(T, \tau)$ , как при НВП, но и  $\text{Im} \dot{W}f(T, \tau)$ ,  $|\dot{W}f(T, \tau)|$ ,  $\arg \dot{W}f(T, \tau)$ , что позволяет получить дополнительную информацию об исследуемом сигнале. Вместе с тем следует отметить, что количество комплексных вейвлетов, необходимых при проведении АВП, значительно меньше количества вещественных вейвлетов, используемых в НВП.

В системном спектральном анализе будем применять фазовую характеристику

$\arg \dot{W}f(T, \tau)$ , которая, как оказалось, позволяет обнаруживать слабо выраженные особенности сигнала  $f(t)$ .

### 1.3. Динамическое (оконое) преобразование Фурье

ДПФ сигнала  $f(t)$  задается соотношением (см., например, [1-5]):

$$\dot{S}f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) w(t - \tau) \exp(-i\omega t) dt,$$

где  $w(t)$  – оконная функция,  $\dot{S}f(\omega, \tau)$  – ФСП ДПФ. Для удобства сравнения с НВП и АВП в ФСП ДПФ  $\dot{S}f(\omega, \tau)$  заменим частоту  $\omega$  на соответствующий период  $T = 2\pi/\omega$ . Тогда получаем:

$$\dot{S}f(T, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) w(t - \tau) \exp\left(-i2\pi \frac{t}{T}\right) dt.$$

ДПФ является традиционным классическим методом анализа сигналов. В 90-х гг. прошлого века НВП и АВП противопоставлялись ДПФ и рассматривались как его более удачная альтернатива. В наших исследованиях неоднократно демонстрировалось, что ДПФ целесообразно применять не вместо, а вместе с НВП и АВП [3, 19, 20]. Недостатки ДПФ, связанные с отсутствием автомодельности базиса и локализации базисных функций, проявляются в основном при анализе локальных особенностей сигнала. Главный недостаток состоит в том, что воздействие локальной особенности на вид ФСП ДПФ может быть ограничено по времени только шириной оконной функции независимо от масштаба  $T$ . При НВП и АВП область воздействия локальной особенности на ФСП, наоборот, определяется масштабом  $T$ . Кроме того, ДПФ проигрывает НВП и АВП при анализе СШП сигналов.

Тем не менее ДПФ имеет и ряд достоинств. Так, при обработке узкополосных

и широкополосных в классическом смысле сигналов предпочтительным оказывается именно применение ДПФ. Это объясняется тем, что базисные функции преобразования Фурье, как известно, являются собственными для монохроматических сигналов. К достоинствам ДПФ также следует отнести богатый выбор оконных функций и наличие обратного преобразования.

В системном спектральном анализе используем модуль ФСП ДПФ  $|\dot{S}f(T, \tau)|$ , его скелетон, а также энергограмму ДПФ  $E_S f(T)$  и дисперсию модуля ФСП ДПФ  $D_S(T)$ , задаваемые соотношениями:

$$E_S f(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}f(T, \tau)|^2 d\tau,$$

$$D_S(T) = \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \left[ |\dot{S}f(T, \tau)| - \langle |\dot{S}f(T, \tau)| \rangle \right]^2 d\tau,$$

где

$$\langle |\dot{S}f(T, \tau)| \rangle = \frac{1}{(T_{\max} - T_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times$$

$$\times \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} |\dot{S}f(T, \tau)| dT d\tau;$$

$T_{\max}$ ,  $T_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальные и минимальные значения параметров  $T$  и  $\tau$ , при использовании которых вычисляется ФСП ДПФ  $\dot{S}f(T, \tau)$ .

#### 1.4. Преобразование Габора

ПГ представляет собой разновидность ДПФ с гауссовским окном и задается соотношением (см., например, [1, 4]):

$$\dot{G}f(\omega, \tau) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-i\omega t) dt,$$

где  $\sigma$  определяет ширину окна. С заменой  $\omega$  на  $T$  получаем:

$$\dot{G}f(T, \tau) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{t}{T}\right) dt.$$

Основным достоинством ПГ является то, что оно обладает наилучшей время-частотной локализацией из всех существующих преобразований с точки зрения соотношения неопределенностей (см., например, [1]). Его базисные функции, хотя и не являются финитными, обладают хорошей локализацией как во временной, так и в частотной областях. Имеется также обратное преобразование. Вместе с тем к недостаткам ПГ относится отсутствие автомодельности базиса, когда анализируемый сигнал на разных масштабах  $T$  раскладывается фактически по разным базисным функциям, а не по одной и той же, как при НВП и АВП.

В системном спектральном анализе используем модуль ФСП ПГ  $|\dot{G}f(T, \tau)|$ , его скелетон, а также энергограмму ПГ  $E_G f(T)$  и дисперсию модуля ФСП ПГ  $D_G(T)$ , задаваемые соотношениями:

$$E_G f(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}f(T, \tau)|^2 d\tau,$$

$$D_G(T) = \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \left[ |\dot{G}f(T, \tau)| - \langle |\dot{G}f(T, \tau)| \rangle \right]^2 d\tau,$$

где

$$\langle |\dot{G}f(T, \tau)| \rangle = \frac{1}{(T_{\max} - T_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times$$

$$\times \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} |\dot{G}f(T, \tau)| dT d\tau;$$

$T_{\max}$ ,  $T_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальные и минимальные значения параметров  $T$  и  $\tau$ , при использовании которых вычисляется ФСП ПГ  $\dot{G}f(T, \tau)$ .

### 1.5. Адаптивное преобразование Фурье

АПФ сигнала  $f(t)$  определяется соотношением [14]:

$$\dot{A}_\nu f(T, \tau) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \exp\left[-i\pi\nu\left(\frac{t-\tau}{T}\right)\right] dt,$$

где  $\nu$  – коэффициент ( $\nu > 0$ ), показывающий сколько полных периодов синусоиды укладывается на ширине финитной оконной функции  $g(t)$ .

АПФ занимает промежуточное положение между ДПФ и АВП. В ряде случаев [14] АПФ сводится к АВП, но не всегда. Более того, АПФ допускает использование несимметричных оконных функций  $g(t)$ , что делает это преобразование удобным при обработке реальных сигналов, которые часто также являются несимметричными (например, модели природных СШП сигналов из [19], описывающих мощный взрыв и разряд молнии). В качестве недостатка можно отметить отсутствие обратного преобразования при произвольном виде  $g(t)$  и произвольном значении  $\nu$ .

В системном спектральном анализе используем модуль ФСП АПФ  $|\dot{A}_\nu f(T, \tau)|$ , его скелетон, а также энергограмму АПФ  $E_A f(T)$  и дисперсию модуля ФСП АПФ  $D_A(T)$ , задаваемые соотношениями:

$$E_A f(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{A}_\nu f(T, \tau)|^2 d\tau,$$

$$D_A(T) = \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \left[ |\dot{A}_\nu f(T, \tau)| - \langle |\dot{A}_\nu f(T, \tau)| \rangle \right]^2 d\tau,$$

где

$$\langle |\dot{A}_\nu f(T, \tau)| \rangle = \frac{1}{(T_{\max} - T_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} |\dot{A}_\nu f(T, \tau)| dT d\tau;$$

$T_{\max}$ ,  $T_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальные и минимальные значения параметров  $T$  и  $\tau$ , при использовании которых вычисляется ФСП АПФ  $\dot{A}_\nu f(T, \tau)$ .

### 1.6. Спектрограмма Фурье

СФ определяется как квадрат модуля ФСП ДПФ (см., например, [1-5, 15]):

$$P_S f(\omega, \tau) = \left| \dot{S}f(\omega, \tau) \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) w(t-\tau) \exp(-i\omega t) dt \right|^2.$$

СФ, как и ДПФ, является классическим методом анализа сигналов. Основным недостатком СФ – наихудшее время-частотное разрешение среди используемых обычно нелинейных преобразований. Это плата за неоспоримое достоинство – отсутствие интерференционных членов, присущих в той или иной мере остальным нелинейным преобразованиям. Кроме того, как и у ДПФ, достоинством СФ является наличие большого набора всевозможных оконных функций.

В системном спектральном анализе используем СФ  $P_S f(\omega, \tau)$ , ее хребты (ridges), а также энергограмму СФ  $E_S f(\omega)$  и среднеквадратичное отклонение СФ  $\sigma_S(\omega)$ , задаваемые соотношениями:

$$E_S f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_S f(\omega, \tau) d\tau,$$

$$\sigma_S(\omega) = \left[ \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \left[ P_S f(\omega, \tau) - \langle P_S f(\omega, \tau) \rangle \right]^2 d\tau \right]^{1/2},$$

где

$$\langle P_S f(\omega, \tau) \rangle = \frac{1}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} P_S f(\omega, \tau) d\omega d\tau;$$

$\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальные и минимальные значения параметров  $\omega$  и  $\tau$ , при использовании которых вычисляется СФ  $P_S f(\omega, \tau)$ . Следует заметить, что в отличие от линейных преобразований для квадратичных преобразований целесообразно использовать именно среднеквадратичное отклонение ФСП, а не дисперсию, поскольку именно  $\sigma_S(\omega)$  имеет размерность энергии и ее можно сравнивать с соответствующей энергограммой.

Отметим также, что для СФ и ПВ мы предлагаем использовать хребты ФСП, а не просто скелетон, как для остальных преобразований. Причина в том, что обычный скелетон, который представляет совокупность линий локальных экстремумов ФСП данного преобразования, в большинстве случаев для реальных сигналов оказывается сильно “замазанным”, поскольку при его построении не учитывается относительная амплитуда разных его составляющих. В то же время для некоторых квадратичных преобразований, в частности для СФ и ПВ, существуют специальные методы выделения наиболее важных элементов в скелетоне, называемых хребтами [18]. Именно эти хребты мы и будем применять в системном спектральном анализе.

### 1.7. Преобразование Вигнера

ПВ комплексного сигнала  $\dot{f}(t)$  задается соотношением (см., например, [1, 14, 16])

$$P_V f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}\left(\tau + \frac{t}{2}\right) \dot{f}^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt$$

и представляет собой преобразование Фурье от произведения  $\dot{f}(\tau + t/2) \dot{f}^*(\tau - t/2)$ .

Отметим, что при проведении нелинейных преобразований класса Коэна (ПВ, ПЧВ, ПБЖ и др.) в подынтегральном выражении вместо вещественного сигнала  $f(t)$  используется соответствующий аналитический сигнал  $\dot{f}(t)$ , который, как известно, строится на основе сигнала  $f(t)$  с помощью преобразования Гильберта. Важно также то, что ФСП преобразований класса Коэна являются вещественными функциями.

В системном спектральном анализе используем ФСП ПВ  $P_V f(\omega, \tau)$ , ее хребты, а также энергограмму ПВ  $E_V f(\omega)$  и среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ  $\sigma_V(\omega)$ , определяемые выражениями:

$$E_V f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_V f(\omega, \tau) d\tau,$$

$$\sigma_V(\omega) =$$

$$= \left[ \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} [P_V f(\omega, \tau) - \langle P_V f(\omega, \tau) \rangle]^2 d\tau \right]^{1/2},$$

где

$$\langle P_V f(\omega, \tau) \rangle = \frac{1}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times$$

$$\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} P_V f(\omega, \tau) d\omega d\tau;$$

$\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальные и минимальные значения параметров  $\omega$  и  $\tau$ , при использовании которых вычисляется ФСП ПВ  $P_V f(\omega, \tau)$ .

Основным достоинством ПВ является его хорошее время-частотное разрешение. К достоинствам ПВ, а также остальных преобразований класса Коэна можно отнести наличие обратных преобразований, позволяющих восстановить сигнал по известной ФСП.

В то же время ПВ присущи определенные недостатки.

Первый из них характерен для всех преобразований класса Коэна и связан с тем, что ФСП этих преобразований в некоторых областях может оказаться отрицательной, что физически корректно интерпретировано быть не может. Поэтому следует помнить, что такая ФСП не является в полном смысле функцией спектральной плотности [15].

Второй недостаток состоит в наличии в ФСП интерференционных членов для многокомпонентных сигналов. Однако существует несколько подходов, позволяющих уменьшить интенсивность этих интерференционных членов, используя определенные методы усреднения.

Одним из них является использование частотного сглаживающего окна  $h(t)$  во временной области. В результате получается так называемое псевдо-преобразование Вигнера (ППВ) [18]:

$$P_{PV} f(\omega, \tau; h) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) f\left(\tau + \frac{t}{2}\right) f^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt.$$

Платой за уменьшение уровня интерференционных членов является ухудшение частотного разрешения. Очевидно, что при  $h(t) = 1$  ППВ переходит в обычное ПВ.

Другой метод является развитием идеи первого, когда вместе с окном  $h(t)$  применяется временное сглаживающее окно  $g(t)$ . Соответствующее преобразование имеет вид

$$P_{SPV} f(\omega, \tau; h, g) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(s - \tau) f\left(s + \frac{t}{2}\right) f^*\left(s - \frac{t}{2}\right) ds \exp(-i\omega t) dt$$

и называется сглаженным псевдо-преобразованием Вигнера (СППВ). При  $g(t) = \delta(t)$  СППВ переходит в ППВ. Естественно, платой за лучшее подавление интерференции является дальнейшее ухудшение частотно-временного разрешения.

Интересно отметить, что если оба окна  $h(t)$  и  $g(t)$  являются гауссовскими, то СППВ превращается в СФ (см., например, [18]).

### 1.8. Преобразование Чои–Вильямса

ПЧВ сигнала  $f(t)$  задается следующим соотношением (см., например, [15, 17, 18]):

$$P_{CW} f(\omega, \tau) = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{|t|} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(u - \tau)^2 \sigma}{4t^2}\right) f\left(u + \frac{t}{2}\right) f^*\left(u - \frac{t}{2}\right) du dt,$$

$\sigma$  – положительный масштабный коэффициент. Изменяя значение  $\sigma$ , можно управлять уровнем возникающих интерференционных членов. При  $\sigma \rightarrow \infty$  ПЧВ переходит в ПВ. ПЧВ является альтернативным ППВ и СППВ путем снижения уровня интерференционных членов.

Основное достоинство ПЧВ – возможность управления уровнем интерференционных членов, а следовательно, и возможность выбора оптимального значения параметра  $\sigma$ , при котором время-частотное разрешение остается еще приемлемым в рамках решаемой задачи, а интерференция оказывается достаточно хорошо подавленной.

В качестве недостатка ПЧВ можно отметить несимметричность характера подавления интерференции вдоль прямых



$\omega = \text{const}$  и  $\tau = \text{const}$ . В первом случае интерференция подавляется гораздо более эффективно.

В системном спектральном анализе используем ФСП ПЧВ  $P_{CW}f(\omega, \tau)$ , ее скелетон, а также энергограмму ПЧВ  $E_{CW}f(\omega)$  и среднеквадратичное отклонение ФСП ПЧВ  $\sigma_{CW}(\omega)$ , определяемые выражениями:

$$E_{CW}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{CW}f(\omega, \tau) d\tau,$$

$$\sigma_{CW}(\omega) = \left[ \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} [P_{CW}f(\omega, \tau) - \langle P_{CW}f(\omega, \tau) \rangle]^2 d\tau \right]^{1/2},$$

где

$$\langle P_{CW}f(\omega, \tau) \rangle = \frac{1}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} P_{CW}f(\omega, \tau) d\omega d\tau;$$

$\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальные и минимальные значения параметров  $\omega$  и  $\tau$ , при использовании которых вычисляется ФСП ПЧВ  $P_{CW}f(\omega, \tau)$ .

### 1.9. Преобразование Борна–Жордана

ПБЖ сигнала  $f(t)$  определяется соотношением [15, 18]:

$$P_{BJ}f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|} \int_{\tau-|t|/2}^{\tau+|t|/2} f\left(s + \frac{t}{2}\right) f^*\left(s - \frac{t}{2}\right) ds \exp(-i\omega t) dt.$$

ПБЖ – наименее известное из всех обычно используемых преобразований. Оно, как и ПЧВ, является еще одним способом усреднения ПВ с целью снижения уровня

интерференционных членов. Подобно ПЧВ, ПБЖ также имеет несимметричность характера подавления интерференции вдоль прямых  $\omega = \text{const}$  и  $\tau = \text{const}$ . В отличие от ПЧВ ПБЖ лучше подавляет ее во втором случае. К недостаткам ПБЖ можно отнести невозможность управления величиной данного эффекта, а значит, и изменением время-частотного разрешения.

В системном спектральном анализе используем ФСП ПБЖ  $P_{BJ}f(\omega, \tau)$ , ее скелетон, а также энергограмму ПБЖ  $E_{BJ}f(\omega)$  и среднеквадратичное отклонение ФСП ПБЖ  $\sigma_{BJ}(\omega)$ , определяемые выражениями:

$$E_{BJ}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{BJ}f(\omega, \tau) d\tau,$$

$$\sigma_{BJ}(\omega) = \left[ \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} [P_{BJ}f(\omega, \tau) - \langle P_{BJ}f(\omega, \tau) \rangle]^2 d\tau \right]^{1/2},$$

где

$$\langle P_{BJ}f(\omega, \tau) \rangle = \frac{1}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} P_{BJ}f(\omega, \tau) d\omega d\tau;$$

$\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальные и минимальные значения параметров  $\omega$  и  $\tau$ , при использовании которых вычисляется ФСП ПБЖ  $P_{BJ}f(\omega, \tau)$ .

Таким образом, сочетание возможностей рассмотренных выше линейных и нелинейных преобразований, используемых для анализа сигналов различной природы, позволяет компенсировать недостатки одних преобразований достоинствами других. В этом и состоит основная идея системного спектрального анализа.

### 1.10. Представление данных

Для удобства анализа результатов применения используемых время-частотных интегральных преобразований предлагается специально разработанный формат представления данных. Он состоит из двух частей. Первая включает в себя результаты применения линейных преобразований, вторая – нелинейных. Рассмотрим их подробнее.

Первая часть содержит результаты НВП, АВП, ДПФ, АПФ и ПГ. Выбор именно такой совокупности преобразований обусловлен следующим.

НВП обладает хорошим частотно-временным разрешением, которое адаптировано к разным масштабам анализируемого сигнала. К тому же для НВП существует широкий выбор анализирующих вейвлетов, что дает возможность для каждого конкретного сигнала по заданному критерию подобрать наиболее подходящий вейвлет. Поэтому присутствие в формате модуля вейвлет-спектра сигнала и его скелетона представляется полностью оправданным.

АВП, для которого также имеется большой выбор анализирующих аналитических вейвлетов, превосходит НВП, в первую очередь, при анализе сигналов с особенностями. Поэтому выбор аргумента комплексного вейвлет-спектра АВП является дополнением представленных характеристик НВП. Модуль комплексного вейвлет-спектра АВП не используется, поскольку он во многом дублирует аналогичную характеристику НВП.

Наличие модуля ФСП ПГ обусловлено тем, что она обладает принципиально наилучшей частотно-временной локализацией среди всех существующих время-частотных преобразований.

Появление ДПФ в системном спектральном анализе в присутствии сильно разрекламированных сегодня вейвлет-преобразований также вполне логично. Хотя ДПФ в некоторых случаях уступает вейвлет-преобразованиям при анализе, например, СШП сигналов (см. [19, 20]), оно имеет пре-

имущества в случае монохроматических и узкополосных сигналов и процессов. К тому же для ДПФ имеется большой выбор спектральных окон.

Представляется полезным также использование в рамках системного спектрального анализа АПФ. В ряде случаев АПФ сводится к АВП. Однако оно имеет и самостоятельное значение [14], в частности, при использовании несимметричных оконных функций. Последние могут оказаться весьма полезными, например, при анализе СШП сигналов, возникающих при мощных землетрясениях, взрывах, в том числе и ядерных, и т. п. [14].

Выглядит также целесообразным появление в формате энергограмм и дисперсий модуля ФСП для НВП, ДПФ, АПФ и ПГ. Это дает возможность оценить вклад различных частотных компонент сигнала и сравнить результаты разных преобразований между собой.

На рисунках, изображающих ФСП, в безразмерных единицах по горизонтальной оси откладывается переменная времени  $\tau$ , а по вертикальной оси – переменная периодов  $T$ . В то же время на рисунках, содержащих энергограммы и дисперсии модуля ФСП, по горизонтальной оси откладываются соответственно энергии и дисперсии, нормированные на максимальное значение, а по вертикальной оси – та же переменная периодов  $T$ .

Вторая часть формата представления данных содержит нелинейные квадратичные преобразования класса Коэна. Набор используемых характеристик (модуль ФСП, скелетон или хребты ФСП, энергограмма и среднеквадратичное отклонение ФСП) одинаков для всех четырех преобразований. Выбор именно таких преобразований сделан по следующим причинам.

ПВ обладает очень хорошим частотно-временным разрешением, которое, в частности, превосходит возможности приведенных выше линейных преобразований. Подавление мешающей интерференции можно проводить при использовании вместо самого ПВ, например, ППВ или даже

СППВ с большим выбором сглаживающих оконных функций. Разумеется, вместе со снижением уровня интерференционных членов несколько ухудшится и частотно-временное разрешение. Поэтому выбор одного из этих преобразований определяется видом конкретного анализируемого сигнала. Более того, в ряде случаев даже интерференционные члены могут давать полезную информацию о сигнале. Например, по виду интерференционной картины можно судить о величине скачка фазы гармонического сигнала (см., например, [18]).

ПЧВ также может оказаться полезным для системного спектрального анализа, поскольку имеет в своем составе параметр, позволяющий исследователю непосредственно управлять уровнем интерференционных членов.

СФ представляет собой предельный случай усреднения ПВ по времени и частоте. Она позволяет эффективно селективировать на время-частотной плоскости структуры, связанные с упомянутыми выше интерференционными членами.

ПБЖ представляется полезным особенно при анализе нестационарных сигналов.

Формат представления данных нелинейных преобразований отличается от подробно рассмотренного выше формата для линейных преобразований тем, что вместо переменных периодов  $T$  по вертикальным осям откладывается безразмерная частота  $F$ .

Следует также отметить, что нелинейные преобразования в целом оказываются весьма эффективными при анализе сигналов в присутствии негауссовских помех. Последнее важно для практиков, поскольку во многих реальных ситуациях традиционная для линейных методов обработки гауссовская модель шума оказывается неприменимой, а сама линейная обработка – малоэффективной.

## 2. Примеры практического применения

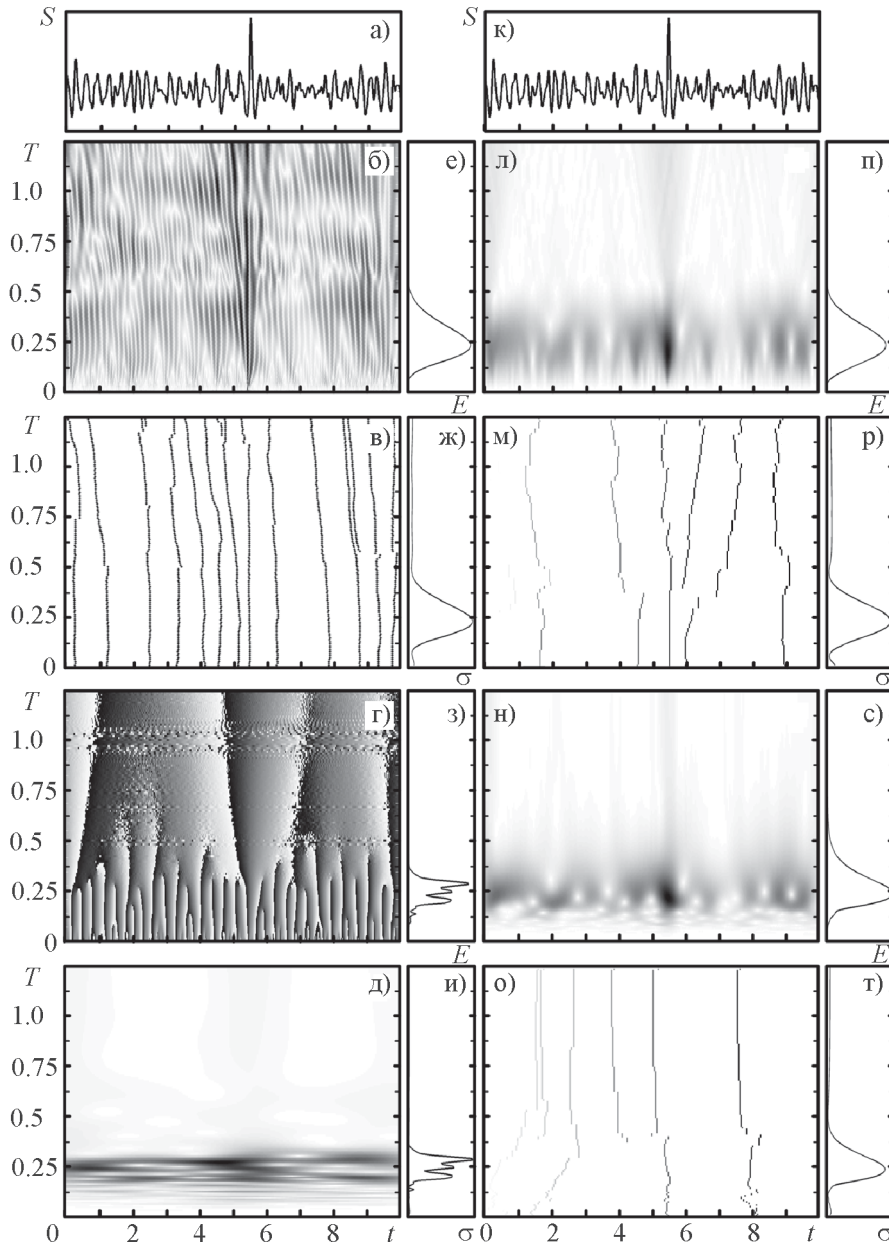
Даже для самых простых анализируемых сигналов подавляющее большинство преобразований, входящих в состав системного спектрального анализа, предполагает

использование исключительно численных методов. Поэтому при проведении системного спектрального анализа целесообразно применение систем компьютерной математики (СКМ). В частности, сами авторы предпочитают использовать в этих целях СКМ MATLAB, а также прикладные пакеты Wavelet Toolbox 3.XX, WaveLab 8.50, Time Frequency Toolbox 0.1 и др. (см., например, [18, 22, 23]).

В качестве примера приведем результаты анализа двух неординарных процессов.

**Анализ структуры волны-убийцы.** Первый процесс, процесс естественного происхождения, носит название “волны-убийцы”. Высота такой волны на воде, по-видимому, может достигать 50 м, тогда как обычные штормовые волны не превышают примерно 14 м. Эта волна представляет смертельную опасность даже для больших морских и океанских судов. Природа “волны-убийцы”, скорее всего, нелинейная [24]. Вероятно, эта волна является дальним “родственником” солитонов и ударных волн. Уникальная регистрация “волны-убийцы” высотой 26 м в Северном море, полученная в Норвегии в первый день Нового года (1 января 1995 г.), показана на рис. 1, а [24, 25]. Амплитуда штормовых волн была при этом 4 м. Результаты системного спектрального анализа данной регистрации приведены на рис. 1, 2. Единичный отрезок по горизонтальной оси времени на рис. 1, а - д, к - о и рис. 2, а - д, к - о и по вертикальной оси периодов на рис. 1, б - и, л - т соответствует 48 с. Единичный отрезок по вертикальной оси частот на рис. 2, б - и, л - т соответствует 3 Гц.

**Анализ структуры волнового цуга вариаций геомагнитного поля.** Второй пример, процесс искусственного происхождения, представляет собой реакцию околоземного космического пространства на старт космического аппарата (КА). Нами проведен системный спектральный анализ вариаций D- и H-компонент напряженности магнитного поля Земли, сопровождавших старт КА “Протон”, осуществленный с космодрома Байконур (Казахстан) 12 февраля

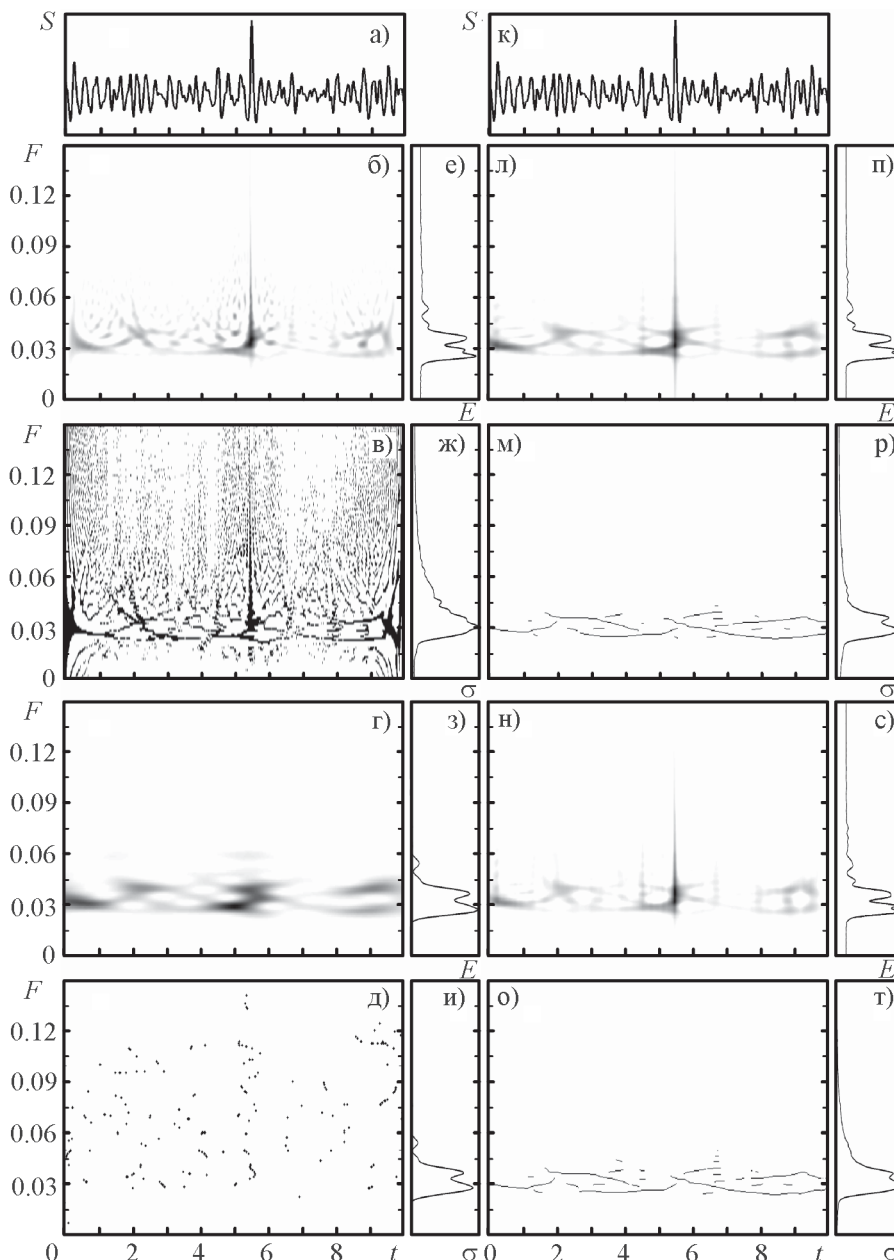


**Рис. 1.** Анализ волны-убийцы: а, к – сигнал во временной области; б – модуль ФСП НВП (вейвлет *db4*); в – скелетон ФСП НВП; г – фазовая характеристика ФСП АВП (вейвлет *sgau1*); д – модуль ФСП ПГ; е – энергограмма НВП; ж – дисперсия модуля ФСП НВП; з – энергограмма ПГ; и – дисперсия модуля ФСП ПГ; л – модуль ФСП АПФ (окно Хэмминга); м – скелетон ФСП АПФ; н – модуль ФСП ДПФ (окно Хэмминга); о – скелетон ФСП ДПФ; п – энергограмма АПФ; р – дисперсия модуля ФСП АПФ; с – энергограмма ДПФ; т – дисперсия модуля ФСП ДПФ

2000 г. Геомагнитный эффект регистрировался на расстоянии около 800 км на юг от места старта ракеты [26]. Результаты анализа D-компоненты приведены на рис. 3, 4,

Н-компоненты – на рис. 5, 6. Пунктирной линией показан момент старта КА.

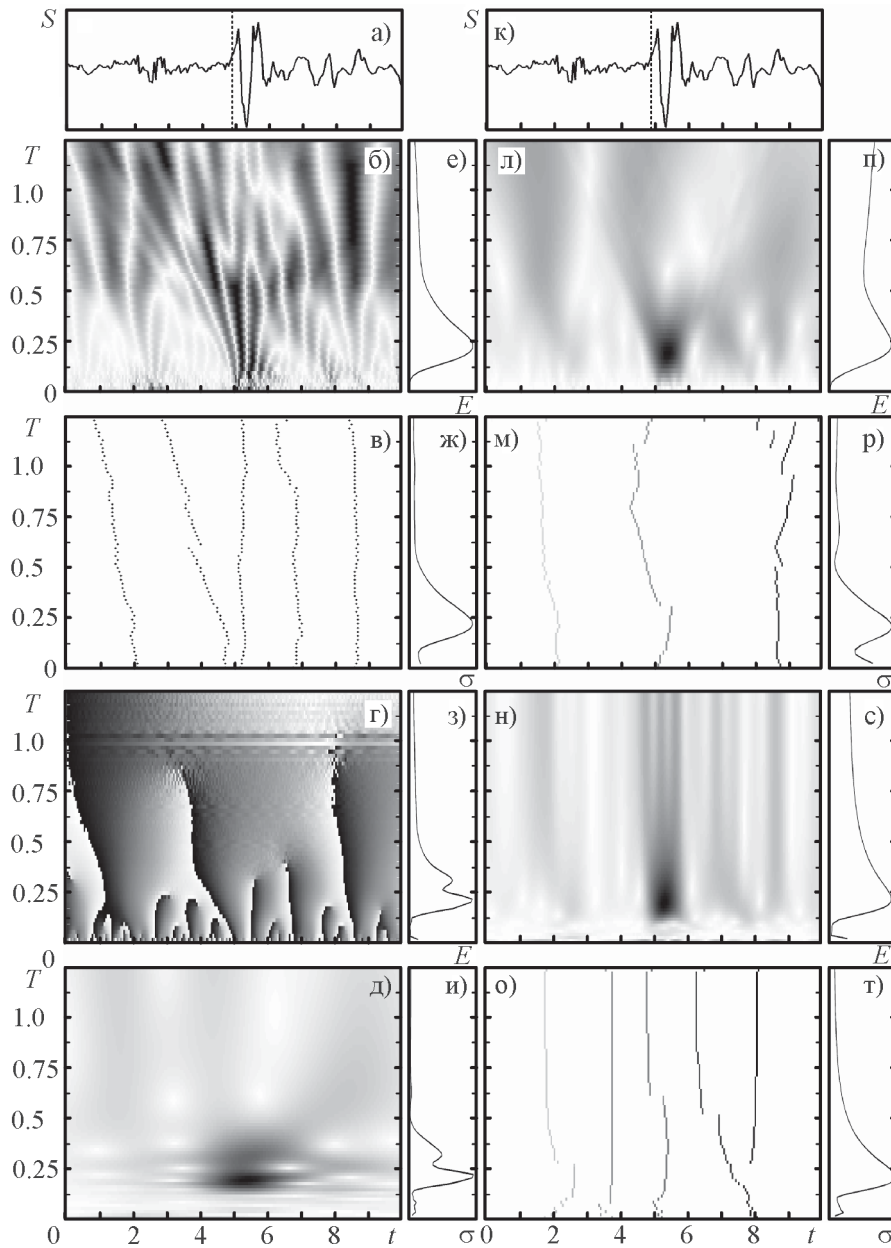
Единичный отрезок по горизонтальной оси времени на рис. 3-6, а - д, к - о соответ-



**Рис. 2.** Анализ волны-убийцы: а, к – сигнал во временной области; б – модуль ФСП ППВ; в – хребты ФСП ППВ; г – модуль ФСП СФ; д – хребты ФСП СФ; е – энергограмма ППВ; ж – среднее квадратичное отклонение модуля ФСП ППВ; з – энергограмма СФ; и – среднее квадратичное отклонение модуля ФСП СФ; л – модуль ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1$ ); м – скелетон ФСП ПЧВ; н – модуль ФСП ПБЖ; о – скелетон ФСП ПБЖ; п – энергограмма ПЧВ; р – среднее квадратичное отклонение модуля ФСП ПЧВ; с – энергограмма ПБЖ; т – среднее квадратичное отклонение модуля ФСП ПБЖ

ствует 300 с, а по вертикальной оси периодов на рис. 3, 5, б - и, л - т – 1080 с. Единичный отрезок по вертикальной оси частот на рис. 4, 6, б - и, л - т соответствует  $5 \cdot 10^{-2}$  Гц.

Таким образом, на практических примерах продемонстрированы эффективность системного спектрального анализа для исследования сигналов любой природы.

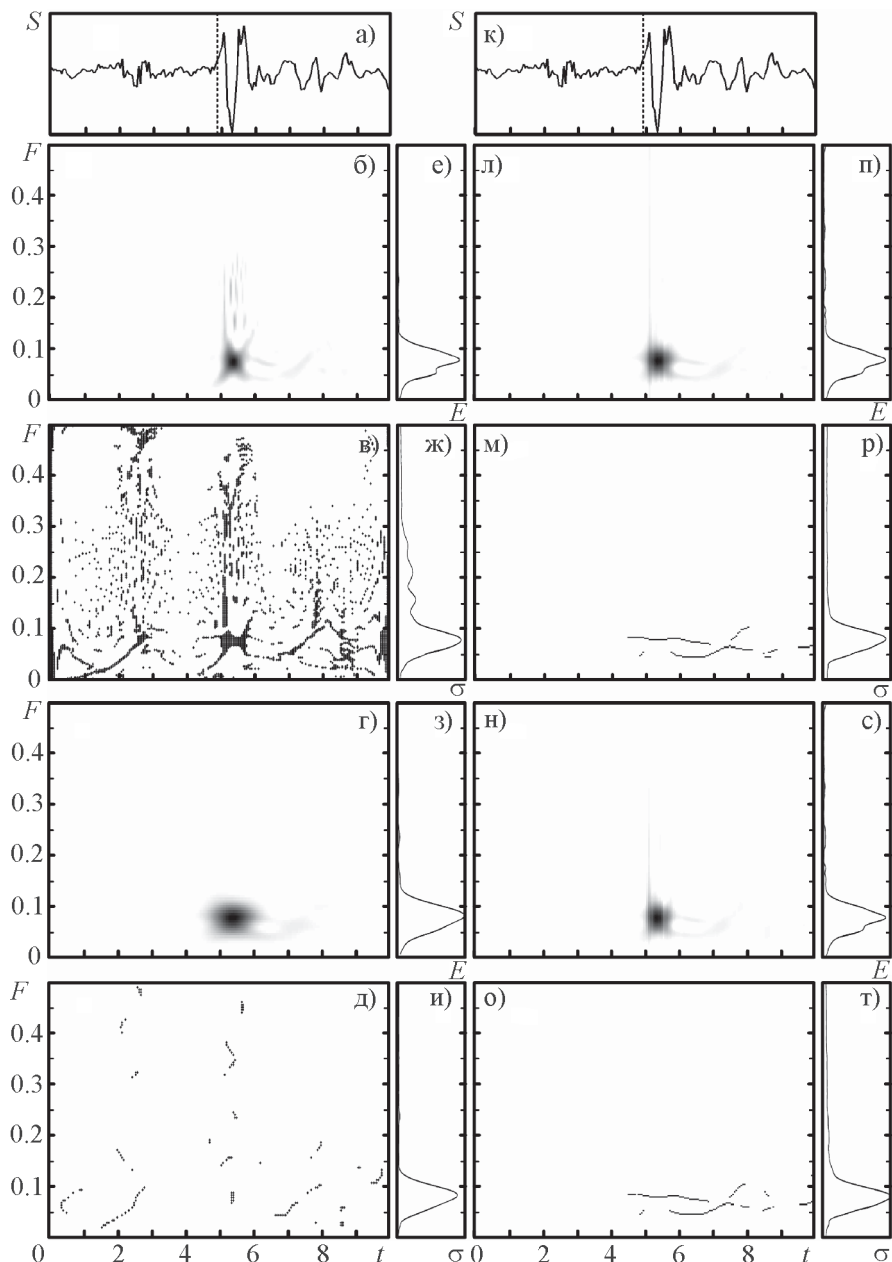


**Рис. 3.** Анализ  $D$ -компоненты магнитного поля: а, к – сигнал во временной области; б – модуль ФСП НВП (вейвлет  $db4$ ); в – скелетон ФСП НВП; г – фазовая характеристика ФСП АВП (вейвлет  $sgau1$ ); д – модуль ФСП ПГ; е – энергограмма НВП; ж – дисперсия модуля ФСП НВП; з – энергограмма ПГ; и – дисперсия модуля ФСП ПГ; л – модуль ФСП АПФ (окно Хэмминга); м – скелетон ФСП АПФ; н – модуль ФСП ДПФ (окно Хэмминга); о – скелетон ФСП ДПФ; п – энергограмма АПФ; р – дисперсия модуля ФСП АПФ; с – энергограмма ДПФ; т – дисперсия модуля ФСП ДПФ. Здесь и далее пунктирной линией показан момент старта

### 3. Обсуждение результатов

Системный спектральный анализ дает исследователю разнообразную и всестороннюю информацию об изучаемом процессе

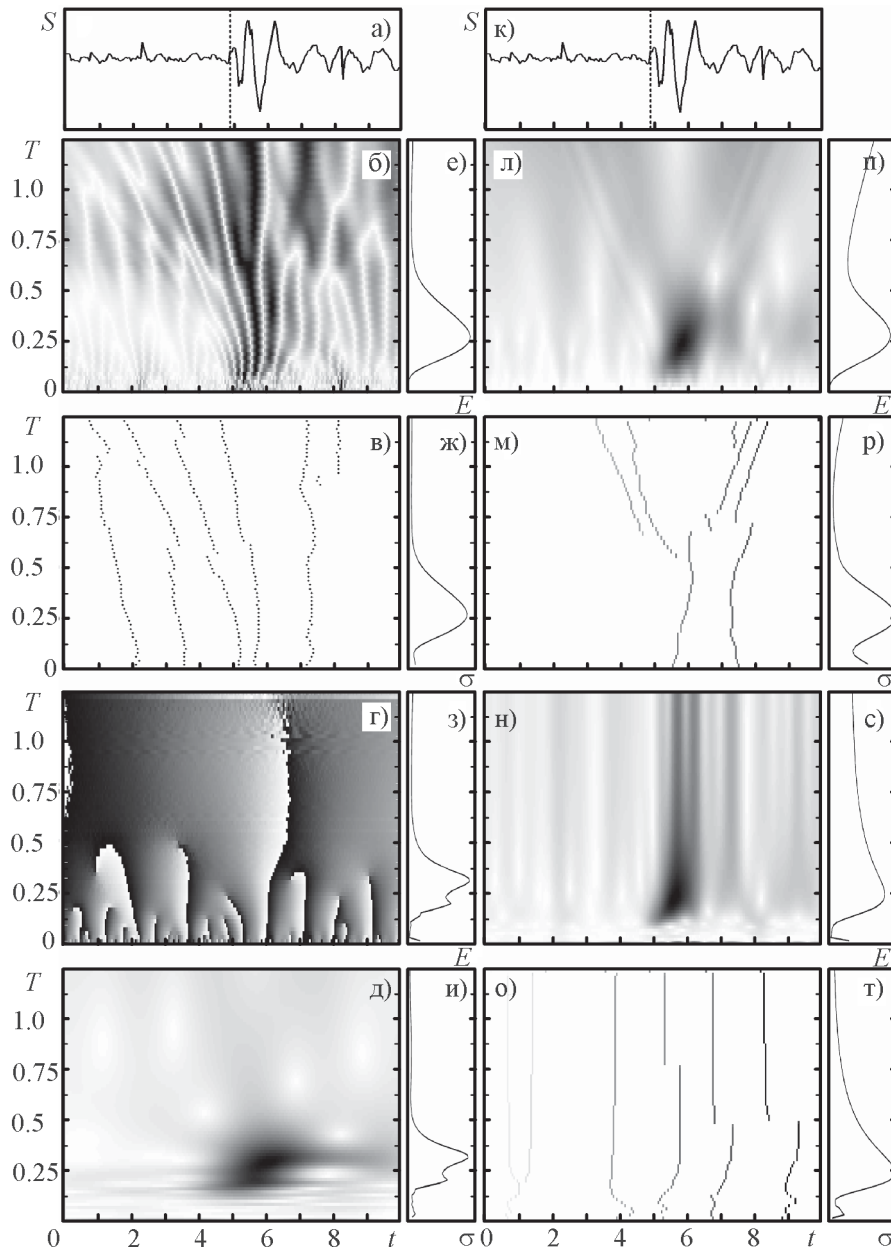
или сигнале. Продемонстрируем это на примере анализа “волны-убийцы”. АВП (рис. 1, г), представленное фазовой характеристикой комплексного вейвлет-спектра, говорит о наличии в точке максимума “вол-



**Рис. 4.** Анализ  $D$ -компоненты магнитного поля: а, к – сигнал во временной области; б – модуль ФСП ППВ; в – хребты ФСП ППВ; г – модуль ФСП СФ; д – хребты ФСП СФ; е – энергограмма ППВ; ж – среднеквадратичное отклонение модуля ФСП ППВ; з – энергограмма СФ; и – среднеквадратичное отклонение модуля ФСП СФ; л – модуль ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1$ ); м – скелетон ФСП ПЧВ; н – модуль ФСП ПБЖ; о – скелетон ФСП ПБЖ; п – энергограмма ПЧВ; р – среднеквадратичное отклонение модуля ФСП ПЧВ; с – энергограмма ПБЖ; т – среднеквадратичное отклонение модуля ФСП ПБЖ

ны-убийцы” особенности сигнала типа “шпиль” (характерная отклоняющаяся влево кривая). Энергограммы и дисперсии коэффициентов ФСП всех линейных преобра-

зований (рис. 1, е, ж, п - т), кроме ПГ, показывают, что весь исследуемый процесс имеет показатель широкополосности  $\mu \sim 1$ . Тем не менее этот процесс, по-видимому, в це-

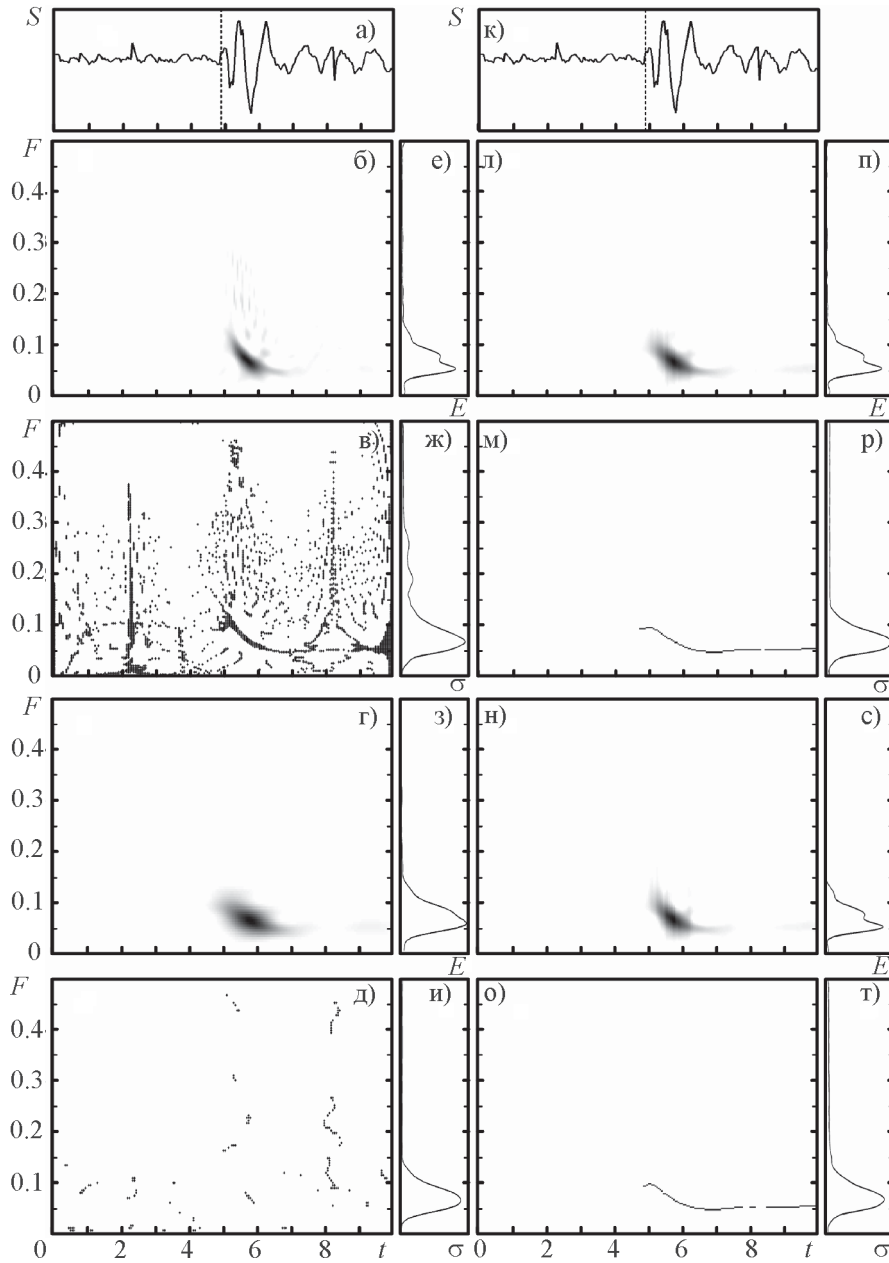


**Рис. 5.** Анализ  $N$ -компоненты магнитного поля: а, к – сигнал во временной области; б – модуль ФСП НВП (вейвлет  $db4$ ); в – скелетон ФСП НВП; г – фазовая характеристика ФСП АВП (вейвлет  $sgau1$ ); д – модуль ФСП ПГ; е – энергограмма НВП; ж – дисперсия модуля ФСП НВП; з – энергограмма ПГ; и – дисперсия модуля ФСП ПГ; л – модуль ФСП АПФ (окно Хэмминга); м – скелетон ФСП АПФ; н – модуль ФСП ДПФ (окно Хэмминга); о – скелетон ФСП ДПФ; п – энергограмма АПФ; р – дисперсия модуля ФСП АПФ; с – энергограмма ДПФ; т – дисперсия модуля ФСП ДПФ

лом не следует относить к СШП, поскольку те же характеристики для ПГ (рис. 1, з, и), а также нелинейных преобразований (рис. 2, е - и, п - т) указывают на наличие в нем

двух-трех различных масштабов. Последнее объясняется лучшим время-частотным разрешением нелинейных преобразований и ПГ. Скелетоны ФСП ВП (рис. 1, в) и ФСП





**Рис. 6.** Анализ  $H$ -компоненты магнитного поля: а, к – сигнал во временной области; б – модуль ФСП ППВ; в – хребты ФСП ППВ; г – модуль ФСП СФ; д – хребты ФСП СФ; е – энергограмма ППВ; ж – среднеквадратичное отклонение модуля ФСП ППВ; з – энергограмма СФ; и – среднеквадратичное отклонение модуля ФСП СФ; л – модуль ФСП ПЧВ ( $\sigma = 1$ ); м – скелетон ФСП ПЧВ; н – модуль ФСП ПБЖ; о – скелетон ФСП ПБЖ; п – энергограмма ПЧВ; р – среднеквадратичное отклонение модуля ФСП ПЧВ; с – энергограмма ПБЖ; т – среднеквадратичное отклонение модуля ФСП ПБЖ

АПФ (рис. 1, м) говорят об уменьшении периодов колебаний вблизи появления “волны-убийцы” (сгущение вертикальных почти параллельных линий).

Сама “волна-убийца”, скорее всего, действительно является СШП процессом ( $\mu \sim 1.3 \div 1.5$ ), о чем свидетельствуют ФСП ВП (рис. 1, а), ФСП АПФ (рис. 1, л), ФСП

ДПФ (рис. 1, н), ФСП ПВ (рис. 2, б), ФСП ПЧВ (рис. 2, л) и ФСП ПБЖ (рис. 2, н). Это соответствует модели симметричного трехлепесткового СШП сигнала (см., например, [19]).

Интересные результаты дает применение системного спектрального анализа для исследования возмущений в магнитосфере, вызванных стартами КА. Как оказалось, реакция магнитосферы представляет собой практически симметричный во времени СШП процесс ( $\mu \sim 1.3 \div 1.5$ ) для D-компоненты магнитного поля и несимметричный с изменяющимся во времени показателем широкополосности – для H-компоненты.

Таким образом, применение нового метода анализа сигналов – системного спектрального анализа – является полезным и перспективным при изучении процессов и сигналов различной природы. Данный метод сочетает в себе достоинства различных линейных и нелинейных преобразований и может быть рекомендован исследователям.

### Выводы

1. Предложен новый комплексный метод анализа сигналов – системный спектральный анализ, – в основе которого лежат линейные и нелинейные интегральные преобразования.

2. Системный подход впервые успешно применен для анализа сигналов различной природы.

3. Продемонстрировано, что системный спектральный анализ позволяет проводить комплексное исследование сигнала, компенсируя недостатки одних используемых интегральных преобразований достоинствами других, поскольку каждое преобразование обладает своим уникальным набором свойств.

4. Отмечено, что одновременное использование линейных и нелинейных преобразований дает возможность эффективного анализа сигналов в присутствии как гауссовского (линейные преобразования), так

и негауссовского (нелинейные преобразования) шума.

5. Разработан специальный формат представления данных, удобный для демонстрации результатов системного спектрального анализа.

6. На примере анализа реальных процессов, имеющих как искусственный (старт КА), так и естественный (“волна-убийца”) характер, показана эффективность системного спектрального анализа как нового комплексного метода анализа сигналов.

Авторы благодарны С. К. Хейверу (Норвегия) и С. И. Бадулину (Россия) за предоставленные регистрации “волны-убийцы”, полученные 1 января 1995 г. в Северном море у побережья Норвегии. Авторы выражают благодарность В. М. Краснову (Казахстан) за присланные регистрации вариаций магнитного поля Земли, которые сопровождали старт КА “Протон”, осуществленный с космодрома Байконур (Казахстан) 12 февраля 2000 г.

### Литература

1. О. И. Шелухин, А. М. Тенякшев, А. В. Осин. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. – М.: Радиотехника, 2003. – 480 с.
2. Л. Ю. Астанин, А. А. Костылев. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. – М.: Радио и связь, 1989. – 192 с.
3. О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. Фрактальные сверхширокополосные сигналы // Радиофизика и радиоастрономия. – 2005. – Т. 10, №1. – С. 62-84.
4. А. С. Дмитриев, Л. В. Кузьмин, А. И. Панас, Д. Ю. Пузиков, С. О. Старков. Прямохаотические системы связи // Успехи современной радиоэлектроники. – 2003. – №9. – С. 40-56.
5. С. Малла. Вэйвлеты в обработке сигналов. Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
6. А. А. Короновский, А. Е. Храмов. Непрерывный вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Физматлит, 2003. – 176 с.
7. Н. М. Астафьева. Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166, №11. – С. 1115-1180.

8. The transforms and applications handbook / Editor-in-chief, Alexander Poularikas. – USA, CRC Press, 1996. – 1335 p.
9. M. Holschneider. Wavelets: An Analysis Tool. – Oxford: Calderon Press, 1995. – 423 p.
10. В. И. Воробьев, В. Г. Грибунин. Теория и практика вейвлет-преобразования. – Санкт-Петербург: ВУС, 1999. – 324 с.
11. И. М. Дремин, О. В. Иванов, В. А. Нечитайло. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171, №5. – С. 465-501.
12. В. П. Дьяконов. Вейвлеты. От теории – к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.
13. К. Чуи. Введение в вейвлеты / Пер. с англ. Я. М. Жилейкина. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
14. О. В. Лазоренко, С. В. Панасенко, Л. Ф. Черногор. Адаптивное преобразование Фурье // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2005. – Т. 10, №10. – С. 39-50.
15. Л. Коэн. Время-частотные распределения: Обзор // ТИИЭР. – 1989. – Т. 77, №16. – С. 72-120.
16. О. В. Вишневский, В. Ф. Кравченко, О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. Преобразование Вигнера и атомарные функции в цифровой обработке сигналов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2006. – Т. 11, №6. – С. 26-38.
17. H.-J. Choi, W. J. Williams. Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels // IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. – 1989. – Т. 37, №6. – P. 862-871.
18. F. Auger, P. Flandrin, P. Goncalves, O. Lemoine. Time-Frequency Toolbox Reference Guide. – Houston, Rice University, 2005. – 180 p.
19. О. В. Лазоренко, С. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. Вейвлет-анализ модельных сверхширокополосных сигналов // Успехи современной радиоэлектроники. – 2006. – №8. – С. 47-61.
20. О. В. Лазоренко, С. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения кратковременных знакопеременных и сверхширокополосных процессов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2004. – Т. 9, №9-10. – С. 31-62.
21. О. В. Лазоренко, С. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор. Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения сверхширокополосных сигналов на фоне помех // Радиофизика и радиоастрономия. – 2002. – Т. 7, №1. – С. 46-63.
22. В. П. Дьяконов. MATLAB 6: учебный курс. – Санкт-Петербург: Питер, 2001. – 592 с.
23. В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – Санкт-Петербург: Питер, 2002. – 608 с.
24. Е. Н. Пелиновский, А. В. Слюняев, Т. Г. Тапинова, К. Хариф. Нелинейное параболическое уравнение и экстремальные волны на морской поверхности // Изв. вузов. Радиофизика. – 2003. – Т. 46, №7. – С. 499-512.
25. С. И. Бадулин, А. Ю. Иванов, А. Г. Островский. Волны-убийцы и их дистанционное зондирование // Исследование Земли из космоса. – 2006, №1. – С. 77-92.
26. О. И. Соколова, В. М. Краснов, Н. Ф. Николаевский. Изменения геомагнитного поля под влиянием запусков ракет с космодрома Байконур // Геомагнетизм и аэронавигация. – 2003. – Т. 46, №4. – С. 561-565.

**Системний спектральний аналіз  
сигналів: теоретичні основи  
та практичні застосування**

**О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор**

Пропонується новий комплексний метод аналізу сигналів – системний спектральний аналіз, – побудований на одночасному застосуванні лінійних та нелінійних інтегральних перетворень. Системний підхід вперше успішно застосовано для аналізу сигналів різного походження. Продемонстровано, що системний спектральний аналіз дозволяє проводити комплексне дослідження сигналу, компенсуючи недоліки одних використовуваних інтегральних перетворень перевагами інших, оскільки кожне перетворення має власний унікальний набір властивостей. Відзначається, що одночасне застосування лінійних та нелінійних перетворень надає можливості ефективного аналізу сигналів за наявності як гаусовської (лінійні перетворення), так і негаусовської (нелінійні перетворення) завади. На прикладі аналізу реальних процесів, що мають штучний (старт космічного апарата) або природний (“хвиля-вбивця”) характер, показано ефективність системного спектрального аналізу як нового комплексного методу аналізу сигналів.

**The System Spectral Analysis:  
Theoretical Bases and Practical  
Applications**

**O. V. Lazorenko and L. F. Chornogor**

A new complex method of signal analysis, called as the system spectral analysis, which is based on the simultaneous application of linear and non-linear integral transforms is proposed. The system approach for analyzing the signals of different nature was successfully applied. The system spectral analysis has shown to be useful for the signal integrated study. The disadvantages of some used integral transformations are compensated by the advantages of the other ones, because each transformation has its own and unique set of properties. It will be noted that the linear and non-linear transforms simultaneously used make possible to effectively analyze the signals against the background of both the Gaussian (by linear transforms) and the non-Gaussian noise (by non-linear transforms). The efficiency of the system spectral analysis as a new complex method of signal analysis is shown by the example of this on real processes having both an artificial descent (the spacecraft launch) and a natural one (the rogue wave).