

Оптимальное обнаружение и оптимальное оценивание параметров кратковременных квазипериодических процессов

С. В. Панасенко, Л. Ф. Черногор

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина МОН Украины,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: Leonid.F.Chernogor@univer.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 19 февраля 2007 г.

Изложен статистический подход к выявлению и оценке параметров кратковременных квазипериодических процессов (волновых пучков) на фоне помех, основанный на теории оптимального обнаружения и оптимального оценивания. Приведены результаты модельных и экспериментальных исследований, иллюстрирующие эффективность его применения. Проведено сравнение полученных результатов с результатами классических и современных методов спектрального оценивания.

Введение

В настоящее время значительное внимание уделяется обнаружению и оцениванию параметров квазипериодических процессов, длительность которых обычно не превышает несколько периодов (кратковременные квазипериодические процессы – ККП). Интерес к ККП обусловлен следующими причинами. Во-первых, такие колебания часто наблюдаются в природе и несут информацию о высокоэнергетических процессах, протекающих внутри Земли, на ее поверхности, в атмосфере и в геокосмосе (см., например, [1-4]). Во-вторых, ККП относятся к сверхширокополосным процессам, которые находят широкое распространение в системах дистанционного зондирования, локации и телекоммуникаций (см., например, [5, 6]).

Задачи, связанные с исследованием ККП, возникают в радиофизике, геофизике, акустике, сейсмологии, метеорологии, климатологии и т. п. Оказывается, что ККП сопровождают вхождение космических тел и аппаратов в атмосферу Земли, землетрясения и извержения вулканов, мощные

взрывы, старты ракет, прохождение погодных фронтов, ураганов, торнадо и т. п. Необходимость контроля таких процессов и вызывающих их источников требует разработки высокоэффективных методов обнаружения и оценивания параметров процессов при относительно небольших (порядка $0.1 \div 1$) отношениях сигнал/помеха.

Для обнаружения и оценивания параметров ККП на фоне помех обычно используются классические и современные методы спектрального оценивания (непрерывное, оконное и адаптивное преобразования Фурье, вейвлет-преобразование, аналитическое вейвлет-преобразование и др.) [7-13]. Однако перечисленные методы не позволяют непосредственно оценить время возникновения и длительность ККП и в ряде случаев дают существенную погрешность оценки огибающей ККП. Кроме того, решение о наличии в анализируемом процессе ККП обычно принимается либо на основе визуального анализа исходного процесса (его динамического частотного спектра), либо путем введения субъективных критериев без расчета их эффективности.

Целью настоящей работы является изложение результатов применения статистического подхода к обнаружению и оцениванию параметров ККП, основанного на теории оптимального обнаружения и оптимального оценивания параметров процессов на фоне помех.

1. Общие сведения

Модель кратковременного квазипериодического процесса. В качестве аналитической модели ККП примем следующее соотношение:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) [\theta(t - \tau) - \theta(t - \tau - t_p)], \quad (1)$$

где A , φ – соответственно огибающая и начальная фаза ККП; $\omega = 2\pi/T$; T – период ККП; τ и t_p – время возникновения и продолжительность ККП соответственно; t – текущее время; $\theta(t)$ – функция Хевисайда, имеющая вид

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

При анализе любой физической процесс $x(t)$ рассматривают на конечном интервале времени, называемом интервалом обработки. Это связано как с конечным временем наблюдения, так и с особенностями используемых методов анализа процесса. Интервал обработки имеет длительность t_0 . При этом справедливы следующие соотношения: $\tau \in [0, t_0]$, $t_p \leq t_0$.

Существуют два равноправных способа экстраполяции исследуемого процесса за границы интервала обработки. Первый из них заключается в предположении равенства $x(t)$ нулю вне интервала $[0, t_0]$, тогда исходный процесс можно представить интегралом Фурье. Во втором случае предполагается, что $x(t)$ является периодической функцией, причем $x(t) = x(t + t_0)$. Тогда анализируемый процесс можно разложить в ряд Фурье.

Далее в работе будет использоваться второй способ экстраполяции $x(t)$. При этом (1) можно представить в виде:

$$s(t) \approx R_0 + \sum_{l=1}^M R_l \cos(\omega_l t + \psi_l) = a_0 \cos(\alpha_0 + \varphi) + A \sum_{l=1}^M [a_l \cos(\omega_l t + \alpha_l + \varphi) + b_l \cos(\omega_l t - \beta_l - \varphi)],$$

где

$$\omega_l = \frac{2\pi l}{t_0}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad R_0 = a_0 \cos(\alpha_0 + \varphi),$$

$$a_0 = \frac{2}{\omega t_0} \sin\left(\frac{\omega t_p}{2}\right), \quad \alpha_0 = \omega \left(\tau + \frac{t_p}{2}\right),$$

$$a_l = \frac{1}{(\omega - \omega_l)t_0} \sin\left[(\omega - \omega_l) \frac{t_p}{2}\right],$$

$$\alpha_l = (\omega - \omega_l) \left(\tau + \frac{t_p}{2}\right),$$

$$b_l = \frac{1}{(\omega + \omega_l)t_0} \sin\left[(\omega + \omega_l) \frac{t_p}{2}\right],$$

$$\beta_l = (\omega + \omega_l) \left(\tau + \frac{t_p}{2}\right),$$

$$R_l = A \sqrt{a_l^2 + b_l^2 + 2a_l b_l \cos(\alpha_l + \beta_l + 2\varphi)},$$

$$\psi_l = \arctg\left(\frac{b_l \sin(\beta_l + \varphi) - a_l \sin(\alpha_l + \varphi)}{a_l \cos(\alpha_l + \varphi) + b_l \cos(\beta_l + \varphi)}\right).$$

Значение $M \in \mathbb{N}$ и определяет номер последнего элемента ряда Фурье. В частности, при анализе дискретных процессов максимальное значение M равно целой части отношения $t_0/(2\Delta t)$, где Δt – шаг по времени (интервал дискретизации).

Обычно процесс подвергается предварительной обработке, заключающейся в вычитании медленно меняющейся составляющей (тренда). Поэтому далее вме-

сто $s(t)$ будет анализироваться процесс $s_1(t) = s(t) - a_0 \cos(\alpha_0 + \varphi)$, т. е. процесс с исключенным трендом.

Основы теории обнаружения и оценки детерминированного сигнала. Как известно (см., например, [14, 15]), под обнаружением подразумевается принятие решения о наличии в исходном процессе $x(t)$ колебания $s(t)$. Алгоритмы оптимального обнаружения квазипериодических процессов описаны в многочисленной литературе (см., например, [16-20]), поэтому здесь будут приведены лишь основные соотношения.

Будем считать помеху аддитивным белым шумом. Функционал его плотности вероятности имеет вид [14, 15]:

$$W[w(t)] = C \exp\left(-\frac{1}{N_0} \int_0^{t_0} w^2(t) dt\right), \quad (2)$$

где $w(t)$ – помеха, C – константа, N_0 – спектральная плотность энергии белого шума. В случае аддитивного шума $x(t) = s(t) + w(t)$. Поэтому выражение (2) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} W[w(t)] &\equiv W[x(t) - s(t)] = \\ &= C \exp\left(-\frac{1}{N_0} \int_0^{t_0} (x(t) - s(t))^2 dt\right) = C_1 \exp\left(\frac{2Z - E}{N_0}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

При этом $W[x(t)]$ носит название функционала правдоподобия. Здесь

$$\begin{aligned} C_1 &= C \exp\left(-\frac{1}{N_0} \int_0^{t_0} x^2(t) dt\right), \\ Z &= \int_0^{t_0} x(t)s(t) dt, & E &= \int_0^{t_0} s^2(t) dt. \end{aligned}$$

Функция Z имеет смысл коэффициента корреляции процессов $x(t)$ и $s(t)$, а E представляет собой энергию процесса $s(t)$.

Как показано в работах [14, 15, 20], решение о наличии $x(t)$ в $s(t)$ принимается, если величина критерия обнаружения

$$L = \frac{W_w[x(t)]}{W_s[x(t)]} = \exp\left(\frac{2Z - E}{N_0}\right) > L_n, \quad (4)$$

где L_n – его пороговое значение, которое рассчитывается с учетом априорной информации об исследуемом процессе; $W_w[x(t)]$ и $W_s[x(t)]$ – функционалы правдоподобия при отсутствии процесса $s(t)$ и его наличии соответственно.

Если $s(t)$ содержит n случайных параметров $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ с известными априорными плотностями вероятности $W_0(\lambda)$, выражение для L примет следующий вид:

$$L = \int_{\lambda} \exp\left(\frac{2Z(\lambda) - E(\lambda)}{N_0}\right) W_0(\lambda) d\lambda.$$

В последнем соотношении интегрирование проводится по всему диапазону допустимых значений λ .

Вероятности принятия решения о наличии процесса $s(t)$ в случае его отсутствия (вероятность ложной тревоги) $p_{лт}$ и принятия решения об отсутствии ККП при его наличии (вероятность пропуска сигнала) $p_{нс}$ определяются из соотношений:

$$p_{лт} = \int_{L_n}^{\infty} W_w[x(t)] dt, \quad p_{нс} = \int_0^{L_n} W_s[x(t)] dt.$$

Оценку неизвестных параметров обычно проводят с использованием метода максимума правдоподобия. При этом в качестве оценки λ принимаются значения $\tilde{\lambda}$, при которых функционал (3) достигает максимума. Аналитически это можно записать в виде:

$$\left. \frac{\partial W[x(t), \lambda]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\bar{\lambda}} = 0.$$

Как показано в [15, 20], такая оценка является несмещенной, эффективной и состоятельной.

Нахождение спектральной плотности энергии и амплитуды спектральных составляющих белого шума. Дисперсия помехи σ_w^2 в полосе частот $\Delta f_w = f_{\max}$, как известно, связана с N_0 следующим соотношением [14]:

$$\sigma_w^2 = N_0 f_{\max}.$$

Здесь $f_{\max} = 1/T_{\min}$, T_{\min} – минимальный период в спектре помехи.

При известном значении дисперсии σ_w^2 в заданной полосе частот нахождение N_0 не составляет труда. При исследовании ККП в естественных условиях априорные сведения о дисперсии помехи, как правило, отсутствуют. Это вызвано как значительной нестационарностью реальных помех, так и отсутствием возможности выделить σ_w^2 из дисперсии анализируемого процесса. В таких случаях можно произвести оценку “сверху” для σ_w^2 .

Как показано в работе [21], при отсутствии в сигнале квазипериодических составляющих величина $\gamma = (mA_w^2)/(4\tilde{\sigma}_w^2)$ имеет F -распределение Фишера с 2-мя и $m-p$ степенями свободы. Здесь $A_w = \sqrt{2N_0/t_0}$ – амплитуда гармоник шума; $m = t_0/\Delta t$; $p = 2M + 1$; $\tilde{\sigma}_w^2$ – оценка σ_w^2 в предположении наличия $s(t)$ в $x(t)$, которая определяется из соотношения:

$$\tilde{\sigma}_w^2 = \tilde{\sigma}_x^2 - \frac{m}{2(m-p)} \sum_{l=1}^M R_l^2,$$

где $\tilde{\sigma}_x^2$ – несмещенная оценка дисперсии процесса $x(t)$, определяемая либо по обычной формуле $\tilde{\sigma}_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$, либо, для дискретных отсчетов, из следующего соотношения:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{m-p} \left[\sum_{l=1}^M x^2(l\Delta t) - \frac{1}{m} \left(\sum_{l=1}^M x(l\Delta t) \right)^2 \right].$$

Оценка “сверху” для A_w производится так:

$$A_w = 2\tilde{\sigma}_w \sqrt{\frac{F_{p-1, m-p}(\alpha)}{m}}.$$

Здесь $F_{p-1, m-p}(\alpha)$ – верхняя 100α -процентная точка распределения Фишера с 2-мя и $m-p$ степенями свободы [21].

В выборе значения α существует произвол. В настоящей работе значение α было выбрано равным относительной погрешности оценки $\tilde{\sigma}_w$, которая приближенно определяется соотношением $\Delta(\tilde{\sigma}_w) \approx 1/\sqrt{2m}$.

2. Задача обнаружения и оценивания параметров квазипериодических процессов

Оптимальное обнаружение квазипериодического процесса с длительностью, равной ширине интервала обработки. Вначале рассмотрим частный случай, когда $t_p = t_0$ и $\nu \in \mathbb{N}$, где $\nu = t_0/T$ – число периодов, укладывающихся на интервале обработки. В этом случае

$$s_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

и решаемая задача переходит в классическую задачу обнаружения гармонического сигнала с неизвестной начальной фазой [14, 15, 20]. При этом выражение (4) будет эквивалентно условию $\hat{Z} > \hat{Z}_n$, где $\hat{Z} = \tilde{R} = \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2}$, а \tilde{X} и \tilde{Y} – оценки амплитуд квадратурных компонент гармонического процесса, определяемые по известным формулам:

$$\tilde{X} = \frac{2A}{t_0} \int_0^{t_0} x(t) \cos \omega t dt, \quad \tilde{Y} = \frac{2A}{t_0} \int_0^{t_0} x(t) \sin \omega t dt.$$

Строго говоря, огибающая A также подлежит оцениванию, но при анализе ряда реальных процессов априорная плотность вероятности $W(A)$ часто неизвестна. Поэтому при решении задачи обнаружения будем предполагать A известной. Для нахождения порога \hat{Z}_n будем использовать критерий Неймана–Пирсона, а вероятность $p_{лт}$ определим из следующих соображений.

Будем считать, что для исследуемых ККП первоначальное отношение сигнал/помеха $q = A^2 / (2\sigma_w^2)$ должно превышать наперед известное минимальное значение q_{\min} . Введение данного ограничения эквивалентно выделению из широкого спектра квазипериодических процессов преобладающих колебаний, которые часто и являются предметом исследования (см., например, [1, 4]). При этом значение вероятности ложной тревоги можно определить, минимизируя вероятность $p_{ош} = p_{лт} + p_{пс}$, т. е. используя критерий идеального наблюдателя.

Значения $p_{лт}$ и $p_{пс}$ можно найти по формулам [14, 15, 20]:

$$p_{лт} = \exp(-k_A^2), \quad p_{пс} = \Theta(k_A \sqrt{2}, \sqrt{mq}),$$

где

$$k_A = \frac{\hat{Z}}{A_w},$$

$$\Theta(u, v) = \int_0^u \xi \exp\left(-\frac{\xi^2 + v^2}{2}\right) I_0(\xi v) d\xi,$$

I_0 – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Зависимость k_A , $p_{лт}$ и $p_{пс}$ от разных значений q и m приведены в табл. 1. Из таблицы видно, что $p_{лт}$ резко уменьшается с ростом m . Уже при $m = 15$ она составляет 4.8 % и уменьшается более чем на четыре порядка при $m = 90$. Для $q = 0.1 \div 0.3$ вероятность $p_{пс}$ велика и составляет 31.8 ÷ 99.5 %. Для $q \geq 1$ значение $p_{пс}$ существенно уменьшается при увеличении m . Заметим, что скорость ее убывания сильно увеличивается с ростом q . Так, если при $m = 6$ $p_{пс}(q=1)/p_{пс}(q=2) \approx 5.5$, то уже при $m = 60$ это отношение составляет $2 \cdot 10^8$. Величина k_A находится в пределах 1.3 ÷ 5.3 и плавно возрастает с увеличением m .

Оптимальное обнаружение цуга колебаний произвольной длительности. В общем случае, при произвольных значениях τ , t_p и T задача обнаружения может быть решена лишь численно. Однако если вместо процесса $s_1(t)$ рассматривать процесс $s_2(t)$, определяемый рядом:

$$s_2(t) = \sum_{l=1}^M a_l \cos(\omega_l t + \alpha_l + \varphi), \quad (5)$$

Таблица 1. Зависимость отношения k_A и вероятности ложной тревоги $p_{лт}$ от числа сегментов m , а также вероятности пропуска сигнала $p_{пс}$ от m и отношения сигнал/помеха q . Здесь $t_p = t_0$, $\nu = 3$, $q_0 = 1$

m	k_A	$p_{лт}, \%$	$p_{пс}, \%$			
			$q = 0.1$	$q = 0.3$	$q = 1$	$q = 2$
6	1.344	16.4	74.9	58.8	21.5	3.9
15	1.74	4.8	82.5	54.5	5.8	$8 \cdot 10^{-2}$
30	2.238	0.7	88.8	50.0	0.8	10^{-4}
60	2.981	10^{-2}	94.6	44.2	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-10}$
90	4.066	$3 \cdot 10^{-4}$	97.2	40.1	$3 \cdot 10^{-4}$	0
120	4.509	$7 \cdot 10^{-6}$	98.5	36.9	$7 \cdot 10^{-6}$	0
150	4.911	10^{-7}	99.2	34.1	$2 \cdot 10^{-7}$	0
180	5.283	$3 \cdot 10^{-9}$	99.5	31.8	$3 \cdot 10^{-9}$	0

для него, как и в предыдущем подразделе, можно получить аналитические выражения для характеристик обнаружения.

На рис. 1, а приведены временные зависимости процессов $s_1(t)$, $s_2(t)$ и $s_3(t)$, а на рис. 1, б – соответствующие им спектрограммы. Процесс $s_3(t)$ также определяется выражением (5), в котором $M = 2v$. При таком выборе M ширина спектра $s_3(t)$ равна ширине по нулевому уровню главного лепестка спектра колебания с длительностью $t_0 = T$. Как видно из этих рисунков, все три сигнала подобны, а их спектры различаются незначительно. Коэффициент корреляции $s_1(t)$ и $s_2(t)$ – не менее 0.97, а $s_1(t)$ и $s_3(t)$ – не менее 0.92 (рис. 1, в). Относительное различие энергий $\epsilon(s_1, s_2) = [E(s_1) - E(s_2)]/E(s_1)$ процессов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, а также $\epsilon(s_1, s_3) = [E(s_1) - E(s_3)]/E(s_1)$ для $s_1(t)$ и $s_3(t)$ при $m \geq 15$ составило не более 0.05 и 0.09 соответственно (рис. 1, г). Поэтому все три процесса можно считать неразличимыми и для

них применять одинаковые критерии обнаружения.

При обнаружении процесса (5) выражение (4) также эквивалентно условию $\hat{Z} > \hat{Z}_n$, но при этом \hat{Z} можно найти из следующего соотношения:

$$\hat{Z} = \sqrt{\hat{X}^2 + \hat{Y}^2},$$

где

$$\hat{X} = \sum_{l=1}^M a_l (\tilde{X}_l \cos \alpha_l - \tilde{Y}_l \sin \alpha_l),$$

$$\hat{Y} = \sum_{l=1}^M a_l (\tilde{X}_l \sin \alpha_l + \tilde{Y}_l \cos \alpha_l).$$

Здесь считается также, что параметры A , τ и t_p нам известны.

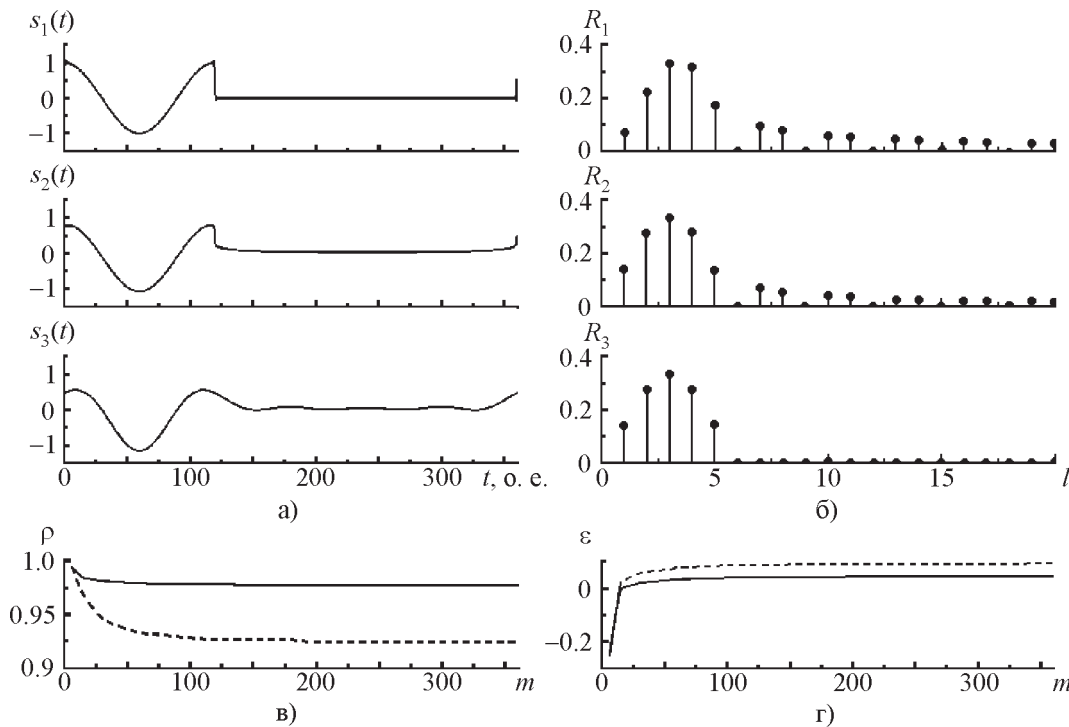


Рис. 1. Сравнение временных зависимостей s_1 , s_2 , s_3 (а) и их амплитудных спектров R_1 , R_2 , R_3 (б), а также зависимости от числа сегментов m коэффициента корреляции ρ (в) и относительного различия энергий ϵ (г) процессов s_1 и s_2 (сплошные линии) и s_1 и s_3 (штриховые линии)

Выражения для $p_{лт}$ и $p_{пс}$ имеют следующий вид:

$$p_{лт} = \exp(-\mu k_A^2), \quad p_{пс} = \Theta\left(k_A \sqrt{2}, \sqrt{\frac{\mu}{mq}}\right),$$

где $\mu = 1 / \sum_{l=1}^M a_l^2 = t_0 / t_p$.

Примеры значений k_A , $p_{лт}$ и $p_{пс}$ для различных m и q приведены в табл. 2. Здесь наблюдаются те же тенденции изменения $p_{лт}$ от m и $p_{пс}$ от m и q , как и в случае, когда $t_p = t_0$ (см. табл. 1). Однако значения этих вероятностей уже существенно больше. Так, при $m \leq 15$ вероятность $p_{лт}$ изменяется от 19.8 до 31.4 %, а $p_{пс}$ лежит в пределах 7.2 ÷ 48.9 % при $q = 1 \div 2$. При $m = 6$ отношение вероятностей $p_{пс}(q=1) / p_{пс}(q=2) \approx 1.4$, а при $m = 60$ их отношение составляет 165. Эти значения на порядок и на шесть порядков меньше, чем соответствующие им отношения вероятностей пропуска сигнала при $t_p = t_0$, что указывает на более слабую

зависимость $p_{пс}$ от q . Значение k_A плавно растет от 0.5 до 2.2.

Увеличение вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала вызвано рассогласованием времени обработки и длительностью процесса, что эквивалентно ухудшению исходного отношения сигнал/помеха в μ раз.

3. Задача оценивания параметров ККП

Оптимальное оценивание огибающей, времени возникновения и длительности. Запишем функционал правдоподобия для случая, когда ККП имеет неизвестные время возникновения и длительность:

$$W[x(t)] = C_1 \exp\left(-\frac{2A\hat{Z}(\tau, t_p) \cos(\hat{\phi} - \varphi) - A(t_p)/\mu}{N_0}\right), \quad (6)$$

где $\hat{\phi} = \arctg(\hat{Y}/\hat{X})$. Из (6) видно, что максимум W по φ достигается при $\tilde{\varphi} = \hat{\phi}$, где $\tilde{\varphi}$ – оценка начальной фазы.

Таблица 2. То же, что в табл. 1 для $t_p = T$

m	k_A	$p_{лт}, \%$	$p_{пс}, \%$			
			$q = 0.1$	$q = 0.3$	$q = 1$	$q = 2$
6	0.489	31.4	66.4	62.1	48.9	34.3
15	0.707	19.8	73.0	59.6	26.8	7.2
30	0.843	10.3	78.5	56.9	12.9	0.9
60	1.058	2.9	84.6	53.1	3.3	$2 \cdot 10^{-2}$
90	1.232	0.8	88.3	50.4	0.9	$3 \cdot 10^{-4}$
120	1.383	0.2	90.9	48.2	0.3	$5 \cdot 10^{-6}$
150	1.518	$7 \cdot 10^{-2}$	92.8	46.3	$8 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-8}$
180	1.641	$2 \cdot 10^{-2}$	94.3	44.7	$2 \cdot 10^{-2}$	0
210	1.755	$6 \cdot 10^{-3}$	95.4	43.2	$6 \cdot 10^{-3}$	0
240	1.861	$2 \cdot 10^{-3}$	96.3	41.9	$2 \cdot 10^{-3}$	0
270	1.962	$5 \cdot 10^{-4}$	97.0	40.6	$6 \cdot 10^{-4}$	0
300	2.058	$2 \cdot 10^{-4}$	97.5	39.5	$2 \cdot 10^{-4}$	0
330	2.149	$5 \cdot 10^{-5}$	98.0	38.4	$5 \cdot 10^{-5}$	0
360	2.236	10^{-5}	98.3	37.5	$2 \cdot 10^{-5}$	0

Оценка огибающей \tilde{A} по максимуму W имеет вид:

$$\tilde{A} = \mu \hat{Z}.$$

После замены в (6) A и φ их оценками выражение для W существенно упрощается:

$$\begin{aligned} W[x(t)] &= C_1 \exp\left(-\frac{1}{N_0} \mu(t_p) \hat{Z}^2(\tau, t_p)\right) = \\ &= C_1 \exp\left(-\frac{\Lambda(\tau, t_p)}{N_0}\right). \end{aligned}$$

Задача оценки τ и t_p теперь сводится к нахождению максимума функции двух переменных $\Lambda(\tau, t_p)$. Эта задача может быть решена численными методами.

Предельная точность оценки параметров квазипериодического процесса. Как известно [14-20], предельная точность определяется погрешностью, обусловленной наличием помехи. Эта погрешность является принципиально неустранимой и определяет предельную (потенциальную) точность оценки параметров ККП.

В работах [14, 15] показано, что величину погрешностей можно оценить в предположении о нормальном законе распределения $W[x(t), \lambda] = W(\lambda)$. Тогда этот функционал можно представить в виде:

$$\begin{aligned} W(\lambda_i) &= C_1 \exp\left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(\tilde{\lambda}_i)}{\partial \lambda_i^2} (\lambda_i - \tilde{\lambda}_i)^2\right] = \\ &= C_1 \exp\left[-\frac{(\lambda_i - \tilde{\lambda}_i)^2}{2\sigma^2(\lambda_i)}\right], \end{aligned}$$

где $\tilde{\lambda}_i$ – оценка λ_i ; $i \in \mathbb{N}$; $\sigma(\lambda_i)$ – среднее квадратическое отклонение параметра λ_i , принимаемое за абсолютную погрешность его оценки и определяемое из соотношения

$$\sigma(\lambda_i) = \left(-\frac{\partial^2 J(\tilde{\lambda}_i)}{\partial \lambda_i^2}\right)^{-1/2},$$

$J(\lambda_i) = J_s(\lambda_i) + J_w(\lambda_i)$, причем

$$J_s(\lambda_i) = \frac{2}{N_0} \int_0^{t_0} x(t, \lambda_{i0}) s(t, \lambda_i) dt - \frac{E(\lambda_i)}{N_0},$$

$$J_w(\lambda_i) = \frac{2}{N_0} \int_0^{t_0} w(t) s(t, \lambda_i) dt.$$

Здесь λ_{i0} – известное значение параметра. Обычно при нахождении минимальной погрешности предполагается выполнение неравенства $J_s \gg J_w$. Поэтому для оценки σ можно использовать соотношение:

$$\sigma(\lambda_i) \approx \left(-\frac{\partial^2 J_s(\tilde{\lambda}_i)}{\partial \lambda_i^2}\right)^{-1/2}. \quad (7)$$

Из (7) можно получить выражения для относительных погрешностей оценки A , τ и t_p :

$$\Delta(A) = \frac{\sigma(A)}{A} = \sqrt{\frac{\mu}{mq}},$$

$$\Delta(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{t_p} = \frac{1}{\omega t_p} \sqrt{\frac{\mu}{mq}},$$

$$\Delta(t_p) = \frac{\sigma(t_p)}{t_p} \approx \sqrt{\frac{\mu}{mq}}.$$

Поскольку функция $J_c(t_p)$ не имеет производных при $t_p = t_{p0}$, где t_{p0} – истинное значение длительности ККП, для оценки $\Delta(t_p)$ она аппроксимировалась параболической функцией $\tilde{J}_c(t_p)$, причем $\tilde{J}_s(t_{p0}) = J_s(t_{p0})$ и $\tilde{J}_s(0) = J_s(0) = 0$. Заметим, что $\Delta(A) \approx \Delta(t_p)$.

Примеры расчетов относительных погрешностей приведены в табл. 3. Из таб-

Таблица 3. Значения погрешностей оценки огибающей $\Delta(A)$, длительности $\Delta(t_p)$ и времени начала $\Delta(\tau)$ квазипериодического процесса в зависимости от m , μ и q

m	$\mu = 1.5$				$\mu = 3$			
	$q = 1$		$q = 3$		$q = 1$		$q = 3$	
	$\Delta(A), \%$ $\Delta(t_p), \%$	$\Delta(\tau), \%$	$\Delta(A), \%$ $\Delta(t_p), \%$	$\Delta(\tau), \%$	$\Delta(A), \%$ $\Delta(t_p), \%$	$\Delta(\tau), \%$	$\Delta(A), \%$ $\Delta(t_p), \%$	$\Delta(\tau), \%$
6	56	4.4	32	2.5	90	14.3	52	8.3
15	32	2.6	19	1.5	46	7.4	27	4.3
30	23	1.8	13	1.1	33	5.2	19	3.0
60	16	1.3	9	0.8	22	3.7	13	2.1
90	13	1.0	8	0.6	19	3.0	11	1.7
120	11	0.9	7	0.5	16	2.6	9	1.5
150	10	0.8	6	0.4	15	2.3	8	1.3
180	9	0.7	5	0.4	13	2.1	8	1.2

лицы видно, что относительная погрешность оценки A и t_p велика при малых значениях m . Для $m \leq 15$ и разных q и μ она составляет от 19 до 90%. Значения $\Delta(\tau)$ для тех же значений m существенно меньше и составляют 1.5 ÷ 14.3%. С ростом m и q , а также с уменьшением μ значения относительных погрешностей параметров ККП уменьшаются. При $m = 180$, $q = 3$ и $\mu = 1.5$ значения $\Delta(A)$, $\Delta(t_p)$ и $\Delta(\tau)$ достигают 5.5 и 0.4% соответственно.

4. Результаты модельных и экспериментальных исследований

Результаты модельных исследований. Для проверки работоспособности предложенного подхода было проведено сравнение полученных результатов с результатами оконного преобразования Фурье (ОПФ) и адаптивного преобразований Фурье (АПФ) [12, 22, 23] для ряда модельных и экспериментально наблюдаемых квазипериодических процессов. Модельная помеха, распределенная по нормальному закону, и ККП были сгенерированы в пакете MathCAD. Задачи обнаружения и оценивания решались совместно. Вначале по мак-

симуму функции Λ оценивались параметры τ и t_p , которые затем использовались для нахождения \hat{Z} . В случае, когда $t_p < T$, считалось, что ККП отсутствует, и задача обнаружения не решалась.

При вычислении ОПФ и АПФ использовалось окно Хемминга и применялся критерий значимости для огибающих квазипериодических процессов, описанный в работах [22, 23].

На рис. 2, 3 изображены результаты применения ОПФ, АПФ и алгоритмов теории обнаружения и оценивания (ТОО) к смоделированной помехе, а также к модельному ККП длительностью один период ($T = 50$) для различных отношений сигнал/помеха. Как видно из рис. 2, а, сгенерированная помеха является квазибелым шумом: на отдельных интервалах обработки она содержала квазипериодические составляющие.

При отношении $q = 0.3$ ни один из методов не позволяет выделить ККП (рис. 2, а). При $q \geq 1$ квазипериодический процесс обнаруживается уверенно (рис. 3). При этом применение ТОО позволяет достичь значительно лучшего разрешения как по времени, так и по периоду по сравнению с результатами использования ОПФ и АПФ.

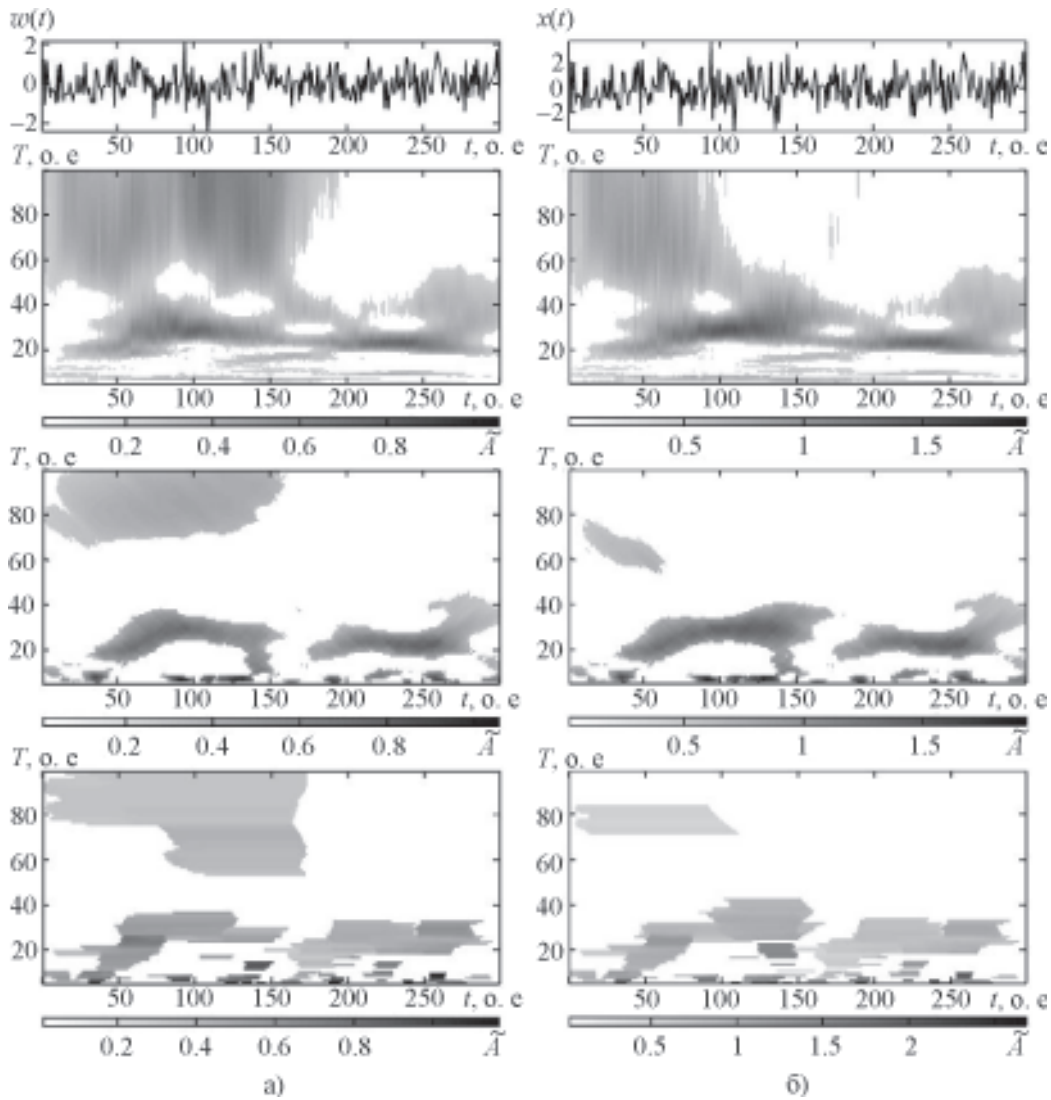


Рис. 2. Графический формат представления данных для сгенерированных помехи $w(t)$ (а) и процесса $x(t)$ (б) с отношением сигнал/помеха $q = 0.3$: временные зависимости помехи и процесса (первая панель); результаты применения к $w(t)$ и $x(t)$ ОПФ (вторая панель), АПФ (третья панель) и алгоритмов на основе ТОО (четвертая панель), представляющие собой зависимости оцениваемой амплитуды \tilde{A} от времени t и периода T

Рис. 4, а иллюстрирует результаты применения ОПФ, АПФ и ТОО к одиночному выбросу конечной длительности, который аналитически также может быть описан выражением (1), где $t_p \approx T/2$, но при этом такой процесс уже не является квазипериодическим. Из рис. 4, а видно, что применение ТОО позволяет отфильтровывать подобные выбросы, которые на практике обычно связаны с импульсными помехами. В то же время на спектрограммах ОПФ

и АПФ выброс проявляется в виде локализованного во времени широкополосного процесса.

Результаты применения ОПФ, АПФ и ТОО к смеси помехи и трех ККП с периодами 20, 50 и 80, длительностями $3T$, T и $2.5T$ и отношениями сигнал/помеха 2, 1.5 и 1 соответственно приведены на рис. 4, б. Видно, что ТОО позволяет значительно лучше, чем ОПФ и АПФ, локализовать эти ККП на время-периодной сетке. При этом

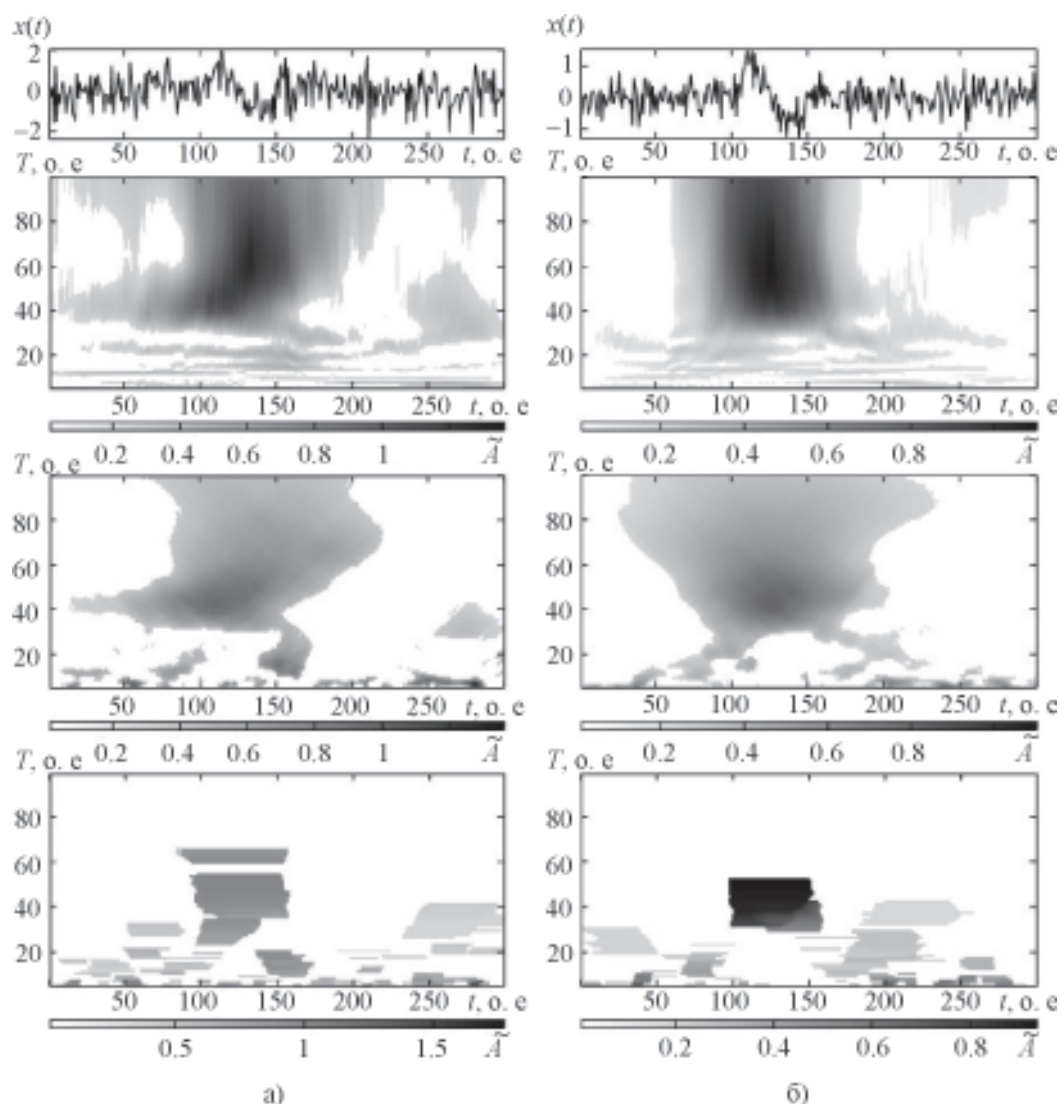


Рис. 3. То же, что на рис. 2, для процесса с $q=1$ (а) и $q=3$ (б)

использование АПФ и ТОО дает возможность выделить все три процесса, в то время как применение ОПФ не позволяет выделить ККП с $T=50$.

Результаты экспериментальных исследований. На рис. 5 представлены результаты применения ОПФ, АПФ и ТОО к реальным квазипериодическим процессам (волновым возмущениям), имеющим место в мезосфере. Вариации $x(t)$ были получены активным (рис. 5, а) и пассивным (рис. 5, б) методами [22, 23] на основании данных среднечастотного ($f \approx 2 \div 3$ МГц) радара, расположенного в Радиофизической обсер-

ватории Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина. Из рис. 5 видно, что применение ТОО к регистрации 10 ноября 2004 г. позволило выявить два ККП с периодами около 80 и 60 мин и длительностями примерно 80 и 120 мин соответственно (рис. 5, а), а к 7 – 8 июня 2000 г. – существование двух преобладающих ККП с периодами около 85 и 50 мин и длительностями не менее 4 и примерно 1 ч соответственно. Результаты ОПФ и АПФ дают более грубую оценку периодов и длительностей преобладающих квазипериодических процессов.

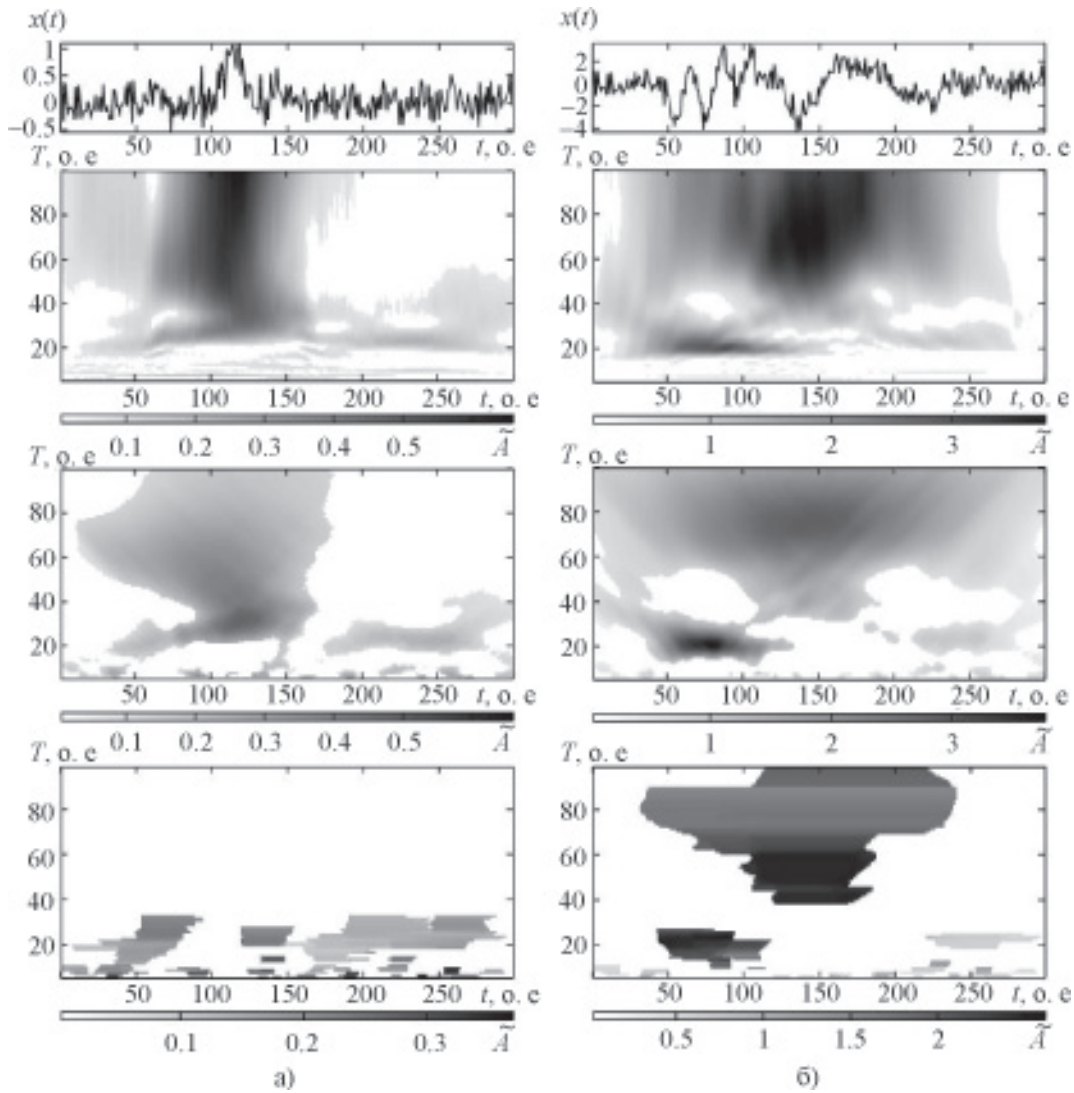


Рис. 4. То же, что на рис. 2, для сгенерированных одиночного выброса (а) и для суммы квазипериодических процессов с различными периодами, длительностями и отношениями сигнал/помеха (б)

5. Обсуждение

Алгоритмы ТОО давно и успешно используются для обнаружения и оценки параметров радиосигналов. В настоящей работе эти алгоритмы были адаптированы к ККП. Для рассмотренных квазипериодических процессов отношение t_p/T составляет единицы, в то время как для радиосигналов его значение достигает 10^3 и более. Поэтому вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала для ККП значительно больше, чем для радиосигналов, при равных значениях отношения сигнал/помеха. Соответственно

и предельная точность оценки параметров ККП существенно ниже.

При оценке огибающей ККП с применением ТОО имеет место лишь случайная погрешность оценки. При использовании ОПФ и АПФ возникает еще систематическая погрешность, связанная с занижением значения A по сравнению с истинным. В табл. 4 приведены значения систематической погрешности для различных μ при использовании ряда окон [13]. Из таблицы видно, что погрешность отсутствует, если $\mu = 1$, и существенно возрастает, когда это

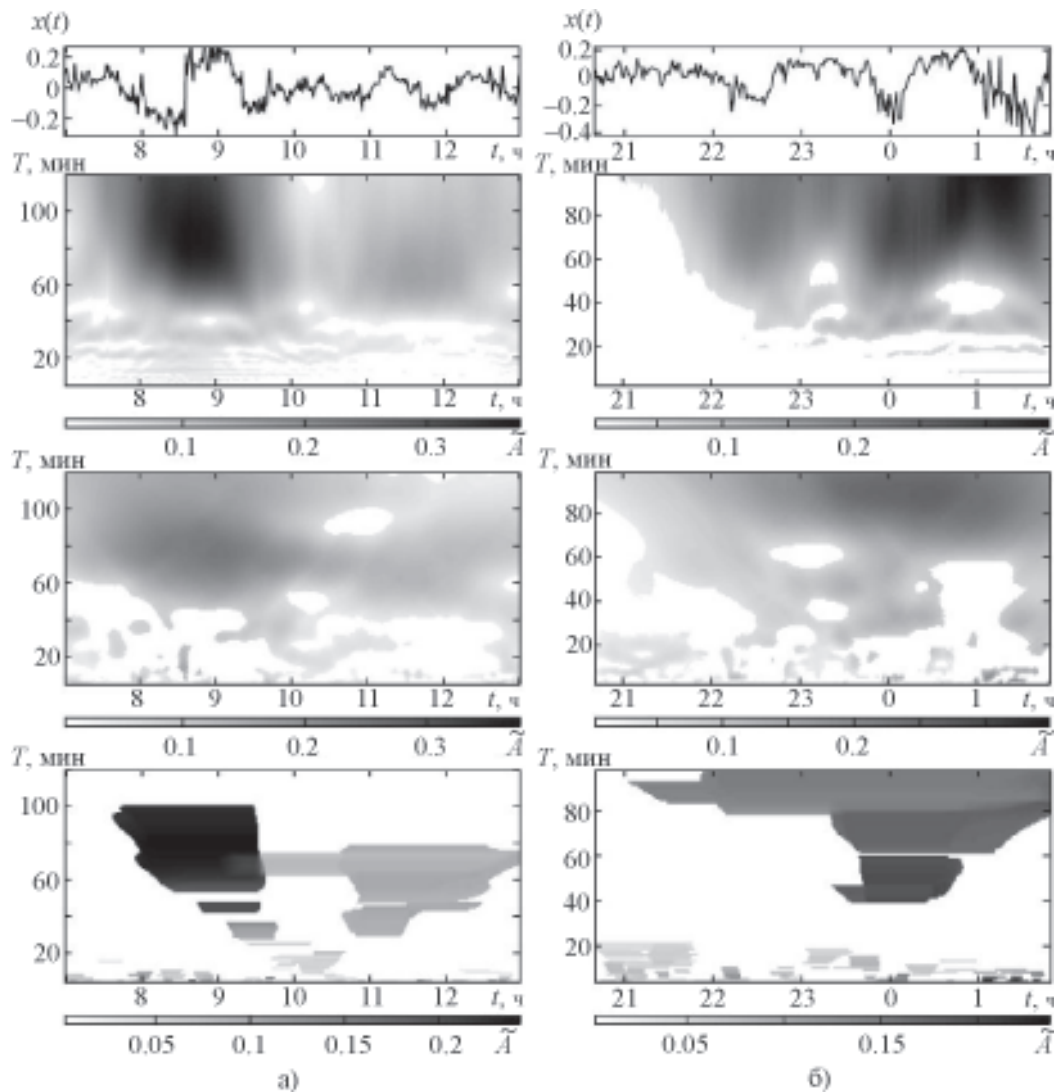


Рис. 5. То же, что на рис. 2, для наблюдающихся в мезосфере квазипериодических процессов 10.11.2004 г. (а) и 07–08.06.2000 г. (б)

Таблица 4. Значения систематической погрешности (в процентах), возникающей при оценке огибающей квазипериодического процесса с использованием ОПФ и АПФ в зависимости от отношения μ для ряда временных окон

Окно	$\mu = 1$	$\mu = 1.2$	$\mu = 1.5$	$\mu = 2$	$\mu = 3$	$\mu = 6$
Прямоугольное, треугольное	0	16.7	33.3	50.0	66.7	83.3
Хемминга	0	3.1	9.9	22.3	43.2	69.8
Гаусса	0	2.5	8.4	20.1	39.7	67.3
Ханна	0	0.8	5.8	18.2	39.1	67.4
Натолла	0	0.1	1.4	7.5	24.4	56.4

отношение увеличивается. Длительность реальных ККП обычно априори неизвестна, что затрудняет учет систематической погрешности в случае применения ОПФ и АПФ.

При расчете погрешностей оценки параметров ККП считалось, что они вызваны лишь смещением основного максимума функционала $W[x(t), \lambda]$, и не учитывалось возможное появление ложных максимумов этого функционала, вызывающих аномальные ошибки [15]. Вероятность появления аномальных ошибок рассчитана в работе [15]. Кроме того, при $q=1$ условие $J_s \gg J_w$, строго говоря, не выполняется, поэтому полученные для такого отношения сигнал/помеха значения погрешностей можно считать лишь грубой (по порядку величины) оценкой предельной точности. При оценке параметров дискретных ККП следует учитывать погрешность дискретизации, которая часто и определяет потенциальную точность оценки.

Как видно из табл. 3, для уменьшения погрешностей оценки ККП следует уменьшать μ , т. е. сокращать интервал обработки. Однако при этом будет ухудшаться относительное разрешение по периоду $\Delta(T)$, которое оценивается выражением [12]:

$$\Delta(T) \approx \frac{v}{v^2 - 1}.$$

Таким образом, величину интервала обработки следует выбирать как с учетом допустимой погрешности оценки параметров, так и с учетом допустимого разрешения по периоду или частоте.

Выводы

1. Обосновано, что для обнаружения и оценки параметров кратковременных квазипериодических процессов целесообразно применять статистический подход, основанный на теории оптимального обнаружения и оптимального оценивания.

2. На основе алгоритмов оптимального обнаружения определены условия оптимального обнаружения, вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала для волновых цугов различной длительности. Показано, что при $t_p = T$, $q = 1$ значения $p_{лт}$ составили $10^{-5} \div 31.4\%$, а значения $p_{пс}$ лежали в пределах от $2 \cdot 10^{-5}$ до 48.9% .

3. Разработан алгоритм совместной оценки огибающей, времени возникновения и продолжительности квазипериодического процесса. Рассчитаны минимальные погрешности оценки этих параметров. Для $\mu = 3$, $q = 3$ значения $\Delta(A)$ и $\Delta(t_p)$ составили $8 \div 52\%$, в то время как значения $\Delta(\tau)$ изменялись от 1.2 до 8.3% .

4. Проведено сравнение результатов применения теории оптимального обнаружения и оптимального оценивания с результатами применения оконного и адаптивного преобразований Фурье. Определены систематические погрешности оценки огибающей кратковременного квазипериодического процесса. Их значения при $\mu = 3$ для различных окон равнялись $24.4 \div 66.7\%$. Показано, что предложенный подход дает возможность улучшить время-периодную локализацию квазипериодического процесса. Он также позволяет избежать появления систематической погрешности, возникающей при оценке огибающей процесса с использованием оконного или адаптивного фурье-преобразований.

Литература

1. Бурмака В. П., Таран В. И., Черногор Л. Ф. Результаты исследования волновых возмущений в ионосфере методом некогерентного рассеяния // Успехи современной радиоэлектроники. – 2005. – №3. – С. 4-35.
2. Панасенко С. В., Черногор Л. Ф. Радарные методы наблюдения квазипериодических процессов в мезосфере. 2. Методика и результаты наблюдения // Радиофизика и радиоастрономия. – 2005. – Т. 10, №1. – С. 38-49.
3. Григорьев Г. И. АГВ в атмосфере Земли (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. – 1999. – Т. 42, №1. – С. 3-10.

4. Ямпольский Ю. М., Зализовский А. В., Литвиненко Л. Н., Лизунов Г. В., Гровс К., Молдвин М. Вариации магнитного поля в Антарктиде и сопряженном регионе (Новая Англия), стимулированные циклонической активностью // Радиофизика и радиоастрономия. – 2004. – Т. 9, №2. – С. 130-151.
5. Астанин Л. Ю., Костылев А. А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. – М.: Радио и связь, 1989. – 191 с.
6. Вопросы подповерхностной радиолокации / Под ред. А. Ю. Гринева. – М.: Радиотехника, 2005. – 408 с.
7. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 672 с.
8. Holschneider M. Wavelets: An Analysis Tool. – Oxford.: Calderon Press, 1995. – XIII, 423 p.
9. The transforms and applications handbook / Editor-in-chief, Alexander Poularikas. – USA: CRC Press, 1996. – 1335 p.
10. Жуков А. И. Метод Фурье в вычислительной математике. – М.: Наука, 1992. – 176 с.
11. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения кратковременных знакопеременных и сверхширокополосных процессов // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2004. – Т. 9, №9–10. – С. 31-61.
12. Лазоренко О. В., Панасенко С. В., Черногор Л. Ф. Адаптивное преобразование Фурье // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2005. – Т. 10, №10. – С. 39-49.
13. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
14. Лезин Ю. С. Введение в теорию и технику радиотехнических систем. – М.: Радио и связь, 1986. – 280 с.
15. Радиотехнические системы / Ю. П. Гришин, В. П. Ипатов, Ю. М. Казаринов и др. / Под ред. Ю. М. Казаринова. – М.: Высшая школа, 1990. – 496 с.
16. Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория / Под ред. Я. Д. Ширмана. – М.: Радиотехника, 2006. – 512 с.
17. Амиантов И. Н. Избранные вопросы статистической теории связи. – М.: Советское радио, 1971. – 416 с.
18. Вопросы перспективной радиолокации / Под ред. А. В. Соколова. – М.: Радиотехника, 2003. – 512 с.
19. Бакулев П. А. Радиолокационные системы. – М.: Радиотехника, 2004. – 320 с.
20. Перов А. И. Статистическая теория радиотехнических систем. – М.: Радиотехника, 2003. – 400 с.

21. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976. – 760 с.
22. Панасенко С. В., Черногор Л. Ф. Результаты радиофизических исследований волновых возмущений в нижней ионосфере // Успехи современной радиоэлектроники. – 2005. – №7. – С. 38-56.
23. Панасенко С. В., Черногор Л. Ф. Выявление волновых возмущений в мезосфере с помощью СЧ – ВЧ – радара // Геомагнетизм и аэрономия. – 2006. – Т. 46, № 4. – С. 525 – 535.

Оптимальне виявлення та оптимальне оцінювання параметрів короткочасних квазіперіодичних процесів

С. В. Панасенко, Л. Ф. Черногор

Викладено статистичний підхід до виявлення та оцінки параметрів короткочасних квазіперіодичних процесів (хвильових цугів) на фоні завад, котрий ґрунтується на теорії оптимального виявлення та оптимального оцінювання. Наводяться результати модельних і експериментальних досліджень, що ілюструють ефективність його застосування. Виконано порівняння отриманих результатів з результатами класичних і сучасних методів спектрального оцінювання.

Optimal Detection and Optimal Estimation of the Parameters of Short-Term Quasi-Periodic Processes

S. V. Panasenko and L. F. Chernogor

The statistical approach for detection and estimation of the parameters of short-term quasi-periodic processes (wave trains) against noise background which is based on the theory of optimal detection and optimal estimation is proposed. Model and experimental investigations which display the efficiency of its application are shown. The results obtained are compared with those of classical and modern methods of spectral estimation.