

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОМПАНЕЙЦА ДЛЯ УДАРНОГО ФРОНТА В СРЕДЕ С ПЛОТНОСТЬЮ, ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ПО ЗАКОНУ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТАНГЕНСА, (ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ОБЛАСТЬ И ЭВОЛЮЦИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ)

*Получено аналитическое решение уравнения Компанейца в плоско-стратифицированной среде с плотностью, изменяющейся по закону гиперболического тангенса, моделирующему границу молекулярного облака с межзвездной средой (промежуточная область ударного фронта). Полученное решение позволяет построить полное решение, восстановить весь ударный фронт и исследовать его эволюцию в реальном времени при произвольных значениях трех свободных параметров: перепада плотности, масштаба неоднородности и положения точки взрыва.*

*Ключевые слова:* остатки сверхновых, молекулярные облака, уравнение Компанейца для ударного фронта

### 1. Введение

Взаимодействие остатков сверхновых (ОСН) с молекулярными облаками (МО) представляет интерес в связи с различными физическими процессами, происходящими в области взаимодействия. Благодаря столкновительной накачке возникает мазерное излучение молекул гидроксила и других соединений [1, 2]. Переход  $F2 \rightarrow F1$  в гидроксиле на частоте 1720 МГц возникает за фронтом ударной волны в узкой области параметров при взаимодействии с МО (см. [3, 4]), и наблюдения на этой частоте позволяют непосредственно обнаруживать ОСН. Наблюдаемое гамма излучение от ОСН на границе с плотной средой представляет интерес в связи с проблемой происхождения космических лучей [5].

Неоднородность среды непосредственно влияет на форму остатка и его эволюцию. Изучение морфологии остатков и их отличие от сферической формы как в оптическом, так и в радиодиапазоне позволяют делать выводы о взаимодействии ОСН с неоднородностями межзвездной среды (МЗС) [6–8].

Для описания взаимодействия ОСН с неоднородностями МЗС, в частности, МО, удобно использовать уравнение Компанейца (УК), дающее хорошее качественное описание явления [9–14].

В работе [15] было найдено новое решение УК для среды с плотностью, изменяющейся по закону гиперболического тангенса. Полученное

решение описывает ударный фронт (УФ) в областях, прилегающих к его лидирующим точкам. Со стороны разреженной среды оно ограничено экстремальным сечением УФ и описывает нелинейную волну, распространяющуюся в сторону разреженной среды. Аналогично в области, прилегающей к другой лидирующей точке, оно описывает нелинейную волну, распространяющуюся в сторону более плотной среды. В [15] получены и исследованы выражения, описывающие движение лидирующих точек фронта, исследовано ускорение УФ при малом, но конечном значении плотности МЗС.

В настоящей работе, являющейся продолжением и развитием работы [15], получено решение УК в промежуточной области, в которой реализуется интерференция обеих волн. Это позволяет построить полное решение, восстановить весь УФ и исследовать его эволюцию для произвольных значений независимых параметров – перепада плотности, масштаба неоднородности и положения точки взрыва. Полученное решение дает возможность найти объем, ограниченный поверхностью УФ, и, соответственно, перейти от “времени” Компанейца, в котором получено предыдущее решение, к реальному времени, в котором происходит эволюция УФ.

### 2 Уравнение Компанейца для гиперболического закона изменения плотности

УК для УФ в неоднородной среде с плоской стратификацией вдоль оси  $z$  имеет вид [9]:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{\varphi(z)} \left[ \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + 1 \right] = 0, \quad (1)$$

где  $r = r(z, y)$  описывает УФ в цилиндрических координатах как функцию координаты  $z$  и “временни” Компанейца  $y$ , равного

$$y = \int_0^t dt \sqrt{\frac{E_0 \lambda (\Gamma^2 - 1)}{2 \rho_0 V(t)}}.$$

Здесь функция  $\varphi(z) \equiv \rho(z)/\rho_0$  описывает закон изменения плотности среды;  $E_0$  – энергия взрыва, произошедшего в момент времени  $t = 0$  в среде с плотностью  $\rho_0$  в точке взрыва;  $V(t)$  – объем, занимаемый УФ;  $\Gamma$  – показатель адиабаты;  $\lambda = 2 \div 3$  – безразмерный коэффициент, учитывающий пропорциональность плотности энергии на фронте ударной волны средней по объему плотности энергии. Основное предположение, заложенное в (1), состоит в том, что давление за УФ на адиабатической стадии расширения постоянно вдоль фронта. Это предположение основывается на том, что скорость УФ относительно уплотненной взрывом среды меньше скорости звука.

В соответствии с предыдущей работой [15] рассмотрим закон изменения плотности в виде (рис. 1):

$$\rho(z) = \rho_0 [a - b \text{th}(z/z_*)],$$

где  $z_*$  – масштаб неоднородности среды. Перепад плотности при переходе от МО к МЗС описывается параметром  $\gamma = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$  [15, 16]. Далее будем рассматривать безразмерные величины  $r, z$  и  $y$ , отнесенные к  $z_*$ :  $z/z_* \rightarrow z, r/z_* \rightarrow r, y/z_* \rightarrow y$ .

Данный закон изменения плотности, представляющий собой пологую ступеньку, позволяет достаточно точно описать переход от МО к МЗС.

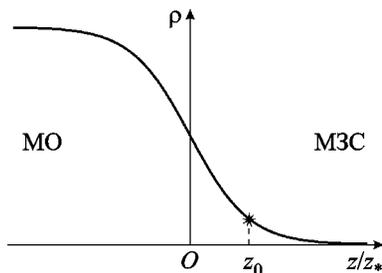


Рис. 1. Распределение плотности среды ( $z_0$  – положение точки взрыва)

Важным является то, что для него можно получить точное решение УК и исследовать эволюцию УФ.

Общий интеграл уравнения (1) можно найти методом построения огибающей частных решений, полученных методом разделения переменных [9]:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \xi, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \pm \sqrt{\xi^2 \varphi(z) - 1}, \quad (2)$$

$$r = \pm \int_{z_0}^z dx \sqrt{\xi^2 \varphi(x) - 1} + \xi y + \mu, \quad (3)$$

где  $\xi$  – постоянная разделения,  $\mu$  – постоянная интегрирования, которую далее полагаем функцией от  $\xi$ :  $\mu = \mu(\xi)$  [12, 13].

Условие построения огибающей [17]

$$dr/d\xi = 0 \quad (4)$$

преобразует  $\xi$  в функцию  $\xi = \xi(z, y)$ , которая с учетом начальных условий должна быть найдена из уравнения

$$y = \pm \int_{z_0/z}^{z/z} dx \frac{\xi \varphi(x)}{\sqrt{\xi^2 \varphi(x) - 1}} - \mu', \quad \frac{d\mu}{d\xi} \equiv \mu'. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), получаем в параметрическом виде выражение для радиуса поперечного сечения УФ, содержащее функцию  $\xi$ , которая должна быть исключена с помощью соотношения (5):

$$r = \pm \int_{z_0}^z \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 \varphi(x) - 1}} + \mu - \xi \mu'. \quad (6)$$

Решение содержит две ветви, со знаками “+” и “–”, которые будут использованы при отыскании полного решения УК.

В качестве начальных условий считаем, что при  $y \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow 0$ ), когда размеры УФ значительно меньше масштаба неоднородности плотности среды, решение (6) переходит в решение Седова для однородной среды [18]. В этом случае  $\mu(\xi) = 0$ , а УФ представляет собой сферу радиуса  $R = (E_0 t^2 / \rho_0)^{1/5}$ , в цилиндрических координатах это соответствует уравнению

$$r^2 + (z - z_0)^2 = y^2. \quad (7)$$

### 3. Решение в областях, прилегающих к лидирующим точкам ударного фронта

Решения УК в областях, прилегающих к лидирующим точкам, были получены в [15]. В этих областях функция  $\mu(\xi)$  может быть выбрана равной нулю при произвольных значениях  $y$  [12]. Как видно из (6), в лидирующих точках фронта  $z_1$  и  $z_2$ , в которых  $r(z_1) = r(z_2) = 0$ , постоянная разделения  $\xi \rightarrow \infty$ . Это существенно упрощает анализ выражений, описывающих движение лидирующих точек, так как не требуется знания функции  $\xi$  [15, 16]. В областях, прилегающих к лидирующим точкам УФ,  $\xi^2$  велико, так что подынтегральные выражения положительны:

$$\xi^2 \varphi(x) \geq 1. \quad (8)$$

Знак равенства в (8) определяет границы области применимости решения при  $\mu = 0$  [15].

Как было показано в [15], решения в областях, прилегающих к лидирующим точкам, можно записать компактно, введя обозначения:

$$S_{\pm}(z, \xi) = \frac{C_{\pm} + k(z) C_{\pm} - k(z_0)}{C_{\pm} - k(z) C_{\pm} + k(z_0)}, \quad (9)$$

$$k(z) = \sqrt{\xi^2(a - b \operatorname{th} z) - 1},$$

$$C_{\pm} = \sqrt{(a \pm b)\xi^2 - 1}.$$

Компактная форма (9) удобна; то, что отдельные множители могут быть отрицательными, не влияет на общий положительный знак  $S$  [15].

В области, прилегающей к лидирующей точке  $z_2$ , движущейся в сторону МЗС [15],

$$r(z; \xi) = \frac{1}{2} \ln \left( S_-^{C_-} S_+^{C_+} \right), \quad (10)$$

$$y(z; \xi) = \frac{\xi}{2} \ln \left( S_-^{\frac{a-b}{C_-}} S_+^{\frac{a-b}{C_+}} \right).$$

В области, прилегающей к лидирующей точке  $z_1$ , движущейся в сторону МО [15],

$$r(z; \xi) = \frac{1}{2} \ln \left( S_-^{-\frac{1}{C_-}} S_+^{\frac{1}{C_+}} \right), \quad (11)$$

$$y(z; \xi) = \frac{\xi}{2} \ln \left( S_-^{-\frac{a-b}{C_-}} S_+^{\frac{a+b}{C_+}} \right).$$

Приведенные решения, в силу неравенства (8), при  $\mu = 0$  описывают лишь часть поверхности УФ. Для того чтобы восстановить весь УФ и иметь возможность перейти к реальному времени, нужно найти решение в промежуточной области, где  $\mu \neq 0$ .

### 4. Промежуточная область

Решение для  $y$  и  $r$  в промежуточной области находится из (5), (6) при  $\mu \neq 0$ . Решение находится из условия непрерывности  $r$  на границе области, прилегающей к лидирующей точке  $z_2$  (рис. 2). Нижняя граница этой области  $z = z_+(y)$  также является верхней границей промежуточной области и соответствует плоскости, где радиус УФ максимален в данный момент времени –  $z_+ = z_{\text{extr}}$  (ср. [12, 13]). Это следует из выражения (2), если продифференцировать его по  $z$  с учетом условия (4):

$$z_{\text{extr}} = \operatorname{Arth} \left( \frac{a - \xi^{-2}}{b} \right).$$

Подставляя  $z_{\text{extr}}$  в (10), получаем выражение для  $r$  на нижней границе области, прилегающей к лидирующей точке  $z_2$  (рис. 2):

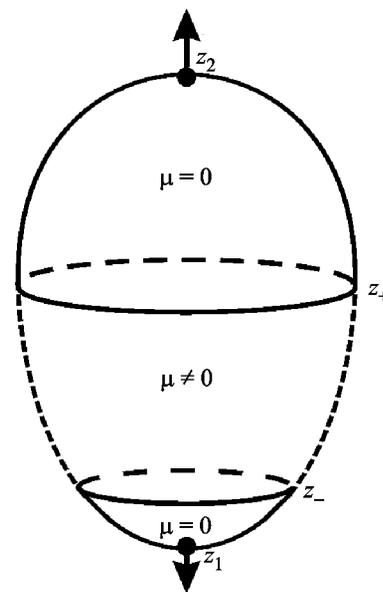


Рис. 2. Ударный фронт. Сплошная линия соответствует областям, прилегающим к лидирующим точкам, движущимся в сторону возрастания ( $z_1$ ) и убывания ( $z_2$ ) плотности, пунктирная линия – промежуточной области, в которой  $\mu(\xi) \neq 0$ ;  $z_+$  – граница области, прилегающей к лидирующей точке  $z_2$ ,  $z_-$  – граница области, прилегающей к лидирующей точке  $z_1$

$$r(z_{\text{extr}+0}) = \frac{1}{2} \ln \left[ \left( \frac{C_- - k(z_0)}{C_- + k(z_0)} \right)^{\frac{1}{C_-}} \left( \frac{C_+ + k(z_0)}{C_+ - k(z_0)} \right)^{\frac{1}{C_+}} \right]. \quad (12)$$

Для того чтобы получить выражение для  $r_{\text{extr}-0}$ , соответствующее верхней границе промежуточной области, выбираем отрицательную ветвь решения (6) с  $\mu \neq 0$  и подставляем  $z_{\text{extr}}$ :

$$r(z_{\text{extr}-0}) = \frac{1}{2} \ln \left[ \left( \frac{C_- + k(z_0)}{C_- - k(z_0)} \right)^{\frac{1}{C_-}} \left( \frac{C_+ - k(z_0)}{C_+ + k(z_0)} \right)^{\frac{1}{C_+}} \right] + \mu - \xi \mu'. \quad (13)$$

Согласно условию непрерывности при переходе от области, прилегающей к  $z_2$ , к промежуточной области [13] должно выполняться условие

$$r(z_{\text{extr}+0}) = r(z_{\text{extr}-0}).$$

Подставляя сюда (12) и (13), мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, из которого нужно найти  $\mu(\xi)$ :

$$\mu - \xi \mu' = \ln \left[ \left( \frac{C_- - k(z_0)}{C_- + k(z_0)} \right)^{\frac{1}{C_-}} \left( \frac{C_+ + k(z_0)}{C_+ - k(z_0)} \right)^{\frac{1}{C_+}} \right].$$

Решение этого уравнения может быть найдено в квадратурах. Замечательно, что, несмотря на сложный вид правой части, решение может быть выражено в элементарных функциях. Мы воспользуемся методом вариации произвольной постоянной. Находим общее решение однородного уравнения

$$\mu(\xi) = \xi C, \quad (14)$$

и частное решение неоднородного уравнения

$$-\xi^2 \frac{dC(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{C_-} \ln \frac{C_- - k(z_0)}{C_- + k(z_0)} + \frac{1}{C_+} \ln \frac{C_+ + k(z_0)}{C_+ - k(z_0)}.$$

Тогда

$$C(\xi) = -\int_0^\xi \left[ \frac{1}{\xi'^2 \sqrt{(a-b)\xi'^2 - 1}} \times \ln \frac{\sqrt{(a-b)\xi'^2 - 1} - \sqrt{(a-b\text{th}z_0)\xi'^2 - 1}}{\sqrt{(a-b)\xi'^2 - 1} + \sqrt{(a-b\text{th}z_0)\xi'^2 - 1}} \right] d\xi' -$$

$$-\int_0^\xi \left[ \frac{1}{\xi'^2 \sqrt{(a+b)\xi'^2 - 1}} \times \ln \frac{\sqrt{(a+b)\xi'^2 - 1} + \sqrt{(a-b\text{th}z_0)\xi'^2 - 1}}{\sqrt{(a+b)\xi'^2 - 1} - \sqrt{(a-b\text{th}z_0)\xi'^2 - 1}} \right] d\xi'. \quad (15)$$

Интегрируя (15) по частям и подставляя в (14), после несложных, но громоздких преобразований получаем функцию  $\mu(\xi)$ , выраженную через элементарные функции:

$$\mu(\xi) = -C_- \ln \frac{C_- - k(z_0)}{C_- + k(z_0)} - C_+ \ln \frac{C_+ + k(z_0)}{C_+ - k(z_0)}.$$

Соответственно,

$$\mu'(\xi) = -\frac{\xi(a-b)}{C_-} \ln \frac{C_- - k(z_0)}{C_- + k(z_0)} - \frac{\xi(a+b)}{C_+} \ln \frac{C_+ + k(z_0)}{C_+ - k(z_0)}.$$

Подставляя  $\mu$  и  $\mu'$  в (5) и (6), получаем искомые решения в промежуточной области, которые также можно записать компактно, введя обозначения:

$$T_\pm = \frac{C_\pm + k(z)}{C_\pm - k(z)}, \quad D_\pm = \frac{C_\pm + k(z_0)}{C_\pm - k(z_0)}.$$

$$r(z; \xi) = \frac{1}{2} \ln \left[ (T_-^{-1} D_-^{-1})^{\frac{1}{C_-}} (T_+ D_+)^{\frac{1}{C_+}} \right], \quad (16)$$

$$y(z; \xi) = \frac{\xi}{2} \ln \left[ (T_-^{-1} D_-^{-1})^{\frac{a-b}{C_-}} (T_+ D_+)^{\frac{a+b}{C_+}} \right].$$

Приведем решения для областей, прилегающих к лидирующим точкам, в новых обозначениях, чтобы увидеть связь решений:

в области, прилегающей к лидирующей точке  $z_2$

$$r(z; \xi) = \frac{1}{2} \ln \left[ (T_- D_-^{-1})^{\frac{1}{C_-}} (T_+^{-1} D_+)^{\frac{1}{C_+}} \right], \quad (17)$$

$$y(z; \xi) = \frac{\xi}{2} \ln \left[ (T_- D_-^{-1})^{\frac{a-b}{C_-}} (T_+^{-1} D_+)^{\frac{a+b}{C_+}} \right];$$

в области, прилегающей к лидирующей точке  $z_1$

$$r(z; \xi) = \frac{1}{2} \ln \left[ \left( T_-^{-1} D_- \right)^{\frac{1}{c_-}} \left( T_+ D_+^{-1} \right)^{\frac{1}{c_+}} \right], \quad (18)$$

$$y(z; \xi) = \frac{\xi}{2} \ln \left[ \left( T_-^{-1} D_- \right)^{\frac{a-b}{c_-}} \left( T_+ D_+^{-1} \right)^{\frac{a+b}{c_+}} \right].$$

Сравнивая полученные выражения (16) и (17), (18), видим, что в областях, прилегающих к лидирующим точкам фронта, они представляют собой разность,  $\pm \left[ \left( \ln D_+^{\frac{1}{c_+}} - \ln D_-^{\frac{1}{c_-}} \right) - \left( \ln T_+^{\frac{1}{c_+}} - \ln T_-^{\frac{1}{c_-}} \right) \right]$ , в то время как в промежуточной области являются суммой,  $\left( \ln D_+^{\frac{1}{c_+}} - \ln D_-^{\frac{1}{c_-}} \right) + \left( \ln T_+^{\frac{1}{c_+}} - \ln T_-^{\frac{1}{c_-}} \right)$ . То есть с ростом времени размер промежуточной области будет увеличиваться быстрее, чем размер областей, прилегающих к лидирующим точкам.

На нижней границе промежуточной области  $\mu$  обращается в 0 при  $\xi(z_-) = \frac{1}{\sqrt{a - b \operatorname{th} z_0}}$ . Подставив  $\xi(z_-)$  в (11) и (16) нетрудно убедиться, что эти выражения равны друг другу. То есть, при  $\xi = \xi_-$  решение на нижней границе промежуточной области переходит в решение для области, прилегающей к лидирующей точке  $z_1$ . Таким образом, на нижней границе промежуточной области функция  $\mu(\xi(z))$  непрерывна, тогда как на верхней терпит разрыв (рис. 3) (ср. [13]).

### 5. Восстановленный ударный фронт

Имея полное решение УК для плотности среды, спадающей по закону гиперболического тангенса, состоящего из решений в трех областях – областях, прилегающих к лидирующим точкам УФ (10) и (11), и промежуточной области (16) – мы можем восстановить весь УФ.

Фронт строится по схеме, использованной в [15]. По заданным значениям  $\xi$  и  $z$  находится соответствующее им значение времени Компанейца  $y$ . Обращая это соотношение, получаем вспомогательную функцию  $\xi(y, z)$ . Подставляя ее в выражение для радиуса поперечного сечения фронта, находим соответствующие значения  $r$  и искомую форму УФ.

Восстановив УФ, мы можем исследовать его эволюцию. Одной из характеристик, описываю-

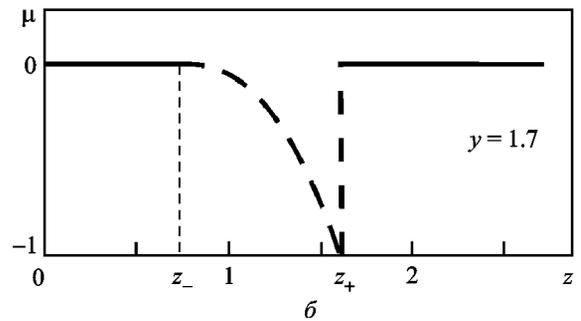
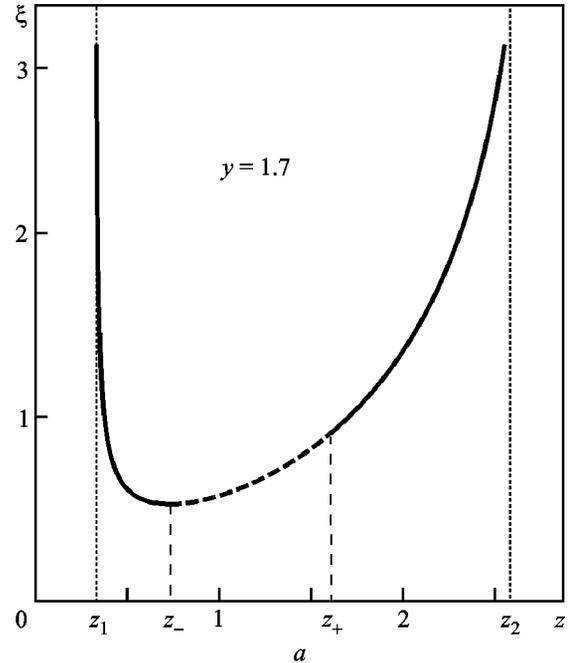


Рис. 3. Зависимости от координаты  $z$  вспомогательной функции  $\xi(z)$  (а) и константы интегрирования  $\mu(\xi(z))$  (б), построенные численно для заданного значения времени Компанейца  $y$ . Пунктирная линия соответствует промежуточной области

щих эволюцию УФ, может служить зависимость отношения его поперечного размера  $r(z_{\text{extr}})$  к продольному  $(z_2 - z_1)$  от времени Компанейца.

Как было показано в [15], здесь удобно перейти к нормированному времени Компанейца:

$$Y = y/y_\infty,$$

где  $y_\infty = \sqrt{\frac{a}{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \operatorname{th} z_0}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 - \operatorname{th} z_0}}$  – время прорыва

УФ на бесконечность при спадании плотности МЗС до нуля. Прорыв УФ на бесконечность за конечное время при спадании плотности среды до нуля соответствует результату, полученному Компанейцем для среды с экспоненциальным законом из-

менения плотности [9]. При отличной от нуля плотности МЗС прорыва не происходит, но на временах  $y \approx y_\infty$  фронт ускоряется, приобретая максимально вытянутую форму и сохраняя таким образом виртуальную память о прорыве Компанейца (рис. 4). Область ускорения УФ при спадании плотности МЗС до нуля была детально исследована в [15] по движению лидирующих точек.

Можно выделить несколько фаз эволюции фронта. На малых временах фронт расширяется равномерно и представляет собой сферу согласно начальному условию (7). На временах, близких ко времени прорыва Компанейца, фронт начинает вытягиваться вдоль оси  $z$ , что соответствует его ускорению. После фазы ускорения фронт постепенно переходит в фазу торможения, когда его поперечный размер становится больше продольного.

Положение точки взрыва существенным образом влияет на форму УФ (рис. 5, а). При малых  $z_0$  взрыв происходит в среде с достаточно большей плотностью, а так как на начальных этапах расширения (при малых  $y$  и, соответственно,  $t$ ) радиус УФ согласно решению Седова–Тейлора зависит от начальной плотности, то чем выше будет плотность, тем соответственно будет меньше радиус УФ. При смещении точки взрыва в сторону меньших  $z$  будет изменяться как перепад плотностей, так и начальная плотность, при этом радиус УФ согласно формуле Седова–Тейлора будет за то же время становиться больше.

Изменение параметра  $\gamma$ , определяющего перепад плотностей, соответствует изменению ве-

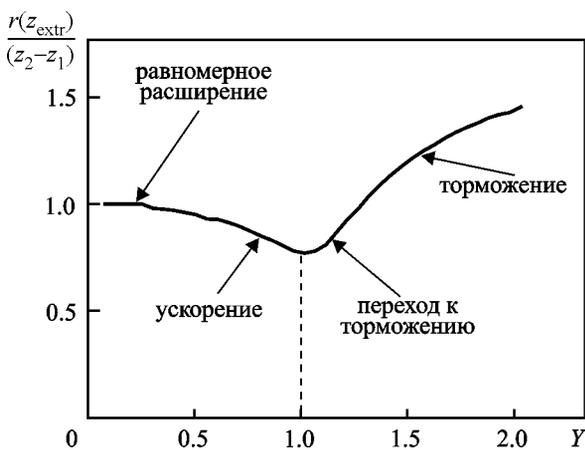


Рис. 4. Зависимость отношения поперечного сечения УФ к продольному от нормированного времени Компанейца ( $z_0 = 1$ ,  $\gamma^2 \sim 10^{-3}$ ,  $y_\infty = 1.97$ )

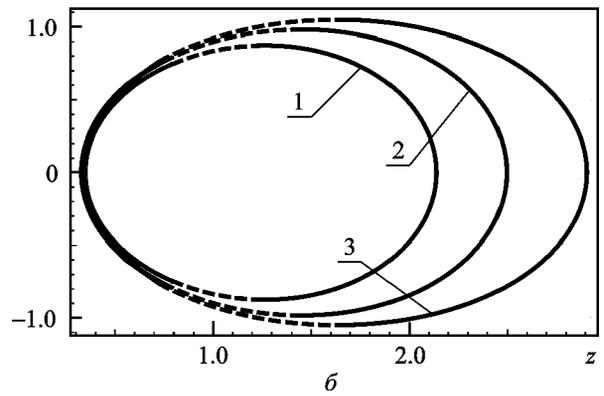
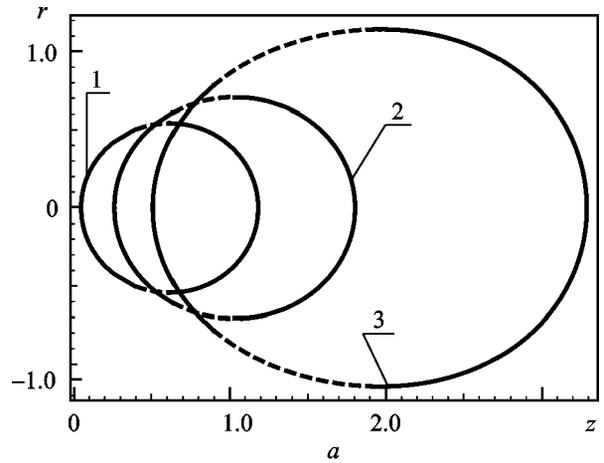


Рис. 5. Сечение УФ для разных положений точки взрыва  $z_0$  (1 –  $z_0 = 0.5$ , 2 –  $z_0 = 0.8$ , 3 –  $z_0 = 1.2$ ) при  $Y = 0.86$  и  $\gamma^2 \sim 10^{-3}$  (а) и для различных значений перепада плотностей  $\gamma$  (1 –  $\gamma^2 \sim 3 \cdot 10^{-2}$ , 2 –  $\gamma^2 \sim 8 \cdot 10^{-3}$ , 3 –  $\gamma^2 \sim 6 \cdot 10^{-4}$ ) при  $z_0 = 1$  и  $Y = 0.76$  (б). Пунктирная линия – рассчитанная форма УФ в промежуточной области

личин, описывающих среду, в которой движется УФ (рис. 5. б). Предельный случай  $\gamma = 0$  (при спадании плотности до нуля) отвечает прорыву УФ на бесконечность за конечное время [9]. При малых  $\gamma$ , отличных от нуля на временах порядка времени прорыва, у УФ появляется область ускорения. С ростом  $\gamma$  эта область уменьшается, пока мы не приходим к другому предельному случаю –  $\gamma = 1$ , который соответствует отсутствию перепада плотностей, т. е. однородной среде. В этом случае УФ будет представлять собой сферу.

Таким образом, варьируя в полученном решении свободные параметры ( $\gamma$ ,  $\Delta\rho$  и  $z_0$ ), можно в широких пределах моделировать различные физические условия, на их основании изучать эволюцию УФ и делать выводы об условиях взрыва и свойствах среды.

## 6. Эволюция ударного фронта в реальном времени

Связь времени Компанейца  $y$  с реальным временем  $t$  требует знания объема  $V$  УФ как функции времени:

$$t = h \int_0^y \sqrt{V(y)} dy,$$

где параметр  $h = \sqrt{\frac{2\rho_0}{E_0\lambda(\Gamma^2 - 1)}}$  содержит информацию о свойствах среды и энергии взрыва.

Объем УФ, используя полученное решение, находим численно для каждого интересующего нас момента времени Компанейца  $y$ . Выбирая  $\rho_0 = 300 \text{ см}^{-3}$ ,  $E_0 = 10^{50} \text{ эрг}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $z_* = 10 \text{ пк}$ ,  $\Gamma = 7/5$ , можно перейти к реальному времени  $t$  (рис. 6). В качестве характерного временного масштаба выбираем время прорыва УФ на бесконечность при спадании плотности МЗС до нуля при выбранных параметрах,  $t_\infty = 1.272 \cdot 10^{13} \text{ с}$ .

На рис. 6 хорошо видна фаза ускорения УФ, которая сменяется фазой замедления (торможения). Видно также, что восстановленный УФ качественно похож на УФ для решения Силича–Фомина, использованный в [15] для иллюстрации поведения УФ. Однако при одинаковых значениях плотности МЗС на одних и тех же временах Компанейца форма фронта будет существенно отличаться в зависимости от положения точки взрыва. На временах, при которых УФ для

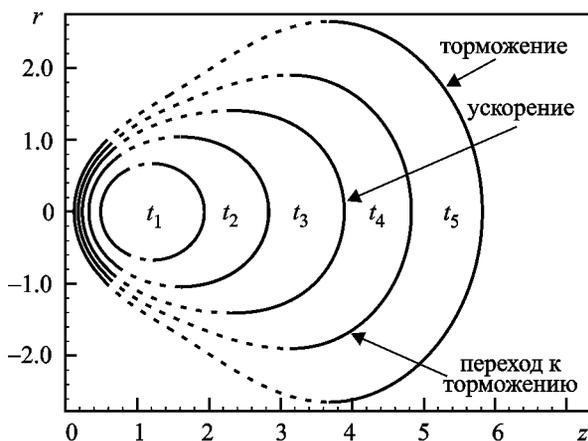


Рис. 6. Сечение УФ плоскостью симметрии в различные моменты реального времени  $t$  ( $z_0 = 1$ ;  $\gamma^2 \sim 10^{-3}$ ):  $t_1 = 0.186t_\infty$ ,  $t_2 = 0.54t_\infty$ ,  $t_3 = 1.0486t_\infty$ ,  $t_4 = 1.86t_\infty$ ,  $t_5 = 2.72t_\infty$ . Пунктирная линия – рассчитанная форма УФ в промежуточной области

решения Силича–Фомина еще будет расширяться, УФ для гиперболического закона спадания плотности уже перейдет в фазу торможения.

Приведем так же оценки объема УФ как сферы ( $V_s$ ), как цилиндра ( $V_c$ ) и численно рассчитанный объем ( $V$ ) для заданных значений нормированного времени Компанейца  $Y$  (см. табл. 1). Видно, что на малых временах  $y < y_\infty$  объем УФ можно приблизительно оценивать как объем сферы. На временах, близких ко времени прорыва Компанейца  $y \sim y_\infty$ , оценка объема УФ как сферы получается немного заниженной. В то же время, несмотря на вытянутую форму, вычисляя объем УФ как объем цилиндра, мы получаем завышенные значения. При торможении, когда поперечный размер УФ становится больше продольного, при вычислении объема фронт опять можно приближенно считать сферой.

## 7. Заключение

В работе получено полное аналитическое решение УК, описывающее эволюцию УФ в неоднородной среде с плотностью, изменяющейся по закону гиперболического тангенса от МО к МЗС, включающее промежуточную область фронта. Решение в промежуточной области находится из условия сшивки на верхней и нижней границах этой области с решениями в областях, примыкающих к лидирующим точкам фронта, полученными ранее [15].

Аналитические выражения для промежуточной области вместе с выражениями для областей, прилегающих к лидирующим точкам, полученными в [15], позволяют восстановить весь УФ и исследовать его эволюцию для различных значений

Таблица 1. Оценки объема УФ как сферы ( $V_s$ ), как цилиндра ( $V_c$ ) и численно рассчитанный объем ( $V$ ) для заданных значений нормированного времени Компанейца

	$V_s, \text{пк}^3$	$V_c, \text{пк}^3$	$V, \text{пк}^3$
$Y = 0.6$	$1.261 \cdot 10^3$	$2.04 \cdot 10^3$	$1.3 \cdot 10^3$
$Y = 0.86$	$4.7 \cdot 10^3$	$8.54 \cdot 10^3$	$5.7 \cdot 10^3$
$Y = 1.01$	$11.67 \cdot 10^3$	$22.7 \cdot 10^3$	$15.4 \cdot 10^3$
$Y = 1.11$	$28.807 \cdot 10^3$	$52.72 \cdot 10^3$	$40.1 \cdot 10^3$
$Y = 1.22$	$77.9 \cdot 10^3$	$82.29 \cdot 10^3$	$71.8 \cdot 10^3$

произвольных параметров: перепада плотности, масштаба неоднородности и положения точки взрыва. Это дает возможность в широких пределах моделировать эволюцию ОСН в различных физических условиях и таким образом делать выводы о свойствах среды.

Полученное полное решение позволяет вычислять объем, занимаемый УФ, и находить измененные формы УФ в реальном времени.

Автор выражает благодарность Е. Ю. Банниковой и проф. В. М. Конторовичу за ценные замечания и обсуждение результатов представленной работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frail D. A., Goss W. M., and Slysh V. I. Shock-excited maser emission from the supernova remnant W28 // *Astrophys. J.* – 1994. – Vol. 424, No. 2. – P. L111–L113.
2. Koralesky B., Frail D. A., Goss W. M., Claussen M. J., and Green A. J. Shock-excited maser emission from supernova remnants: G32.8-0.1, G337.8-0.1, G346.6-0.2, and the HB 3/W3 complex // *Astron. J.* – 1998. – Vol. 116, No. 3. – P. 1323–1331.
3. Elitzur M. Inversion of the OH 1720-MHz Line // *Astrophys. J.* – 1976. – Vol. 203, No. 1. – P. 124–131.
4. Elitzur M. Astronomical masers // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* – 1992. – Vol. 30. – P. 75–112.
5. Aharonian F., Akhperjanian A. G., Aye K.-M., Bazer-Bachi A. R., Beilicke M., Benbow W., Berge D., Berghaus P., Bernlöhr K., Bolz O., Boisson C., Borgmeier C., Breiting F., Brown A. M., Bussons Gordo J., Chadwick P. M., Chitnis V. R., Chounet L.-M., Cornils R., Costamante L., Degrange B., Djannati-Ataï A., Drury L. O'C., Ergin T., Espigat P., Feinstein F., Fleury P., Fontaine G., Funk S., Gallant Y. A., Giebels B., Gillissen S., Goret P., Guy J., Hadjichristidis C., Hauser M., Heinzlmann G., Henri G., Hermann G., Hinton J. A., Hofmann W., Holleran M., Horns D., de Jager O. C., Jung I., Khélifi B., Komin Nu., Konopel-ko A., Latham I. J., Le Gallou R., Lemoine M., Lemièrre A., Leroy N., Lohse T., Marcowith A., Masterson C., McComb T. J. L., de Naurois M., Nolan S. J., Noutsos A., Orford K. J., Osborne J. L., Ouchrif M., Panter M., Pelletier G., Pita S., Pohl M., Pühlhofer G., Punch M., Raubenheimer B. C., Raue M., Raux J., Rayner S. M., Redondo I., Reimer A., Reimer O., Ripken J., Rivoal M., Rob L., Rolland L., Rowell G., Sahakian V., Saugé L., Schlenker S., Schlickeiser R., Schuster C., Schwanke U., Stewert M., Sol H., Steenkamp R., Stegmann C., Tavernet J.-P., Théoret C. G., Ulaczyk M., van der Walt D. J., Vasileiadis G., Vincent P., Visser B., Völk H. J., and Wagner S. J. High-energy particle acceleration in the shell of a supernova remnant // *Nature.* – 2004. – Vol. 432, Is. 7013. – P. 75–77.
6. Bisnovatyi-Kogan G. S. and Silich S. A. Shock wave propagation in the nonuniform interstellar medium // *Revs. Mod. Phys.* – 1995. – Vol. 67, No. 3. – P. 661–712.
7. Лозинская Т. А. Сверхновые звезды и звездный ветер: Взаимодействие с газом Галактики. – М.: Наука, 1986. – 404 с.
8. Сидорчук М. А., Абраменков Е. А. Остатки вспышек сверхновых HB3, 3C58 и IC443 в декаметровом диапазоне длин волн // *Радиофизика и радиоастрономия.* – 2006. – Т. 11, №2. – С. 134–154.
9. Компанейц А. С. Точечный взрыв в неоднородной атмосфере // *Докл. АН СССР.* – 1960. – Т. 130, №5. – С. 1001–1004.
10. Korycansky D. G. An off-center point explosion in a radially stratified medium: Kompaneets approximation // *Astrophys. J.* – 1992. – Vol. 398, No. 1. – P. 184–189.
11. Коваленко И. Г. О точечном взрыве в неоднородной среде с плоскостью симметрии // *Кинематика и физика небесных тел.* – 1983. – Т. 3, №5. – С. 78–83.
12. Силич С. А., Фомин П. И. Точечный взрыв в экспоненциальной атмосфере с ненулевой асимптотой // *Докл. АН СССР.* – 1983. – Т. 268, №4. – С. 861–864.
13. Конторович В. М., Пименов С. Ф. Точное решение уравнения Компанейца для сильного точечного взрыва в среде с квадратичным законом убывания плотности // *Изв. вузов. Радиофизика.* – 1998. – Т. XLI, №6. – С. 683–698.
14. Blandford R. D. and McKee C. F. Fluid dynamics of relativistic blast waves // *Phys. Fluids.* – 1976. – Vol. 19, No. 8. – P. 1130–1138.
15. Банникова Е. Ю., Карнаушенко А. В., Конторович В. М., Шульга В. М. Новое точное решение уравнения Компанейца для ударного фронта // *Астрономический журнал.* – 2012. – Т. 89, №7. – С. 552–559.
16. Bannikova E. Yu., Karnauschenko A. V., Kontorovich V. M., and Shulga V. M. Interaction of supernova remnant with molecular cloud // *Proc. of Contributed Papers 16th Young Scientists' Conference.* – Kyiv (Ukraine). – 2009. – P. 33–36.
17. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 804 с.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.

Г. В. Карнаушенко

Радіоастрономічний інститут НАН України,  
вул. Червонопрапорна, 4, м. Харків, 61002, Україна

## РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ КОМПАНІЙЦЯ ДЛЯ УДАРНОГО ФРОНТУ В СЕРЕДОВИЩІ З ГУСТИНОЮ, ЩО ЗМІНЮЄТЬСЯ ЗА ЗАКОНОМ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТАНГЕНСА, (ПРОМІЖНА ОБЛАСТЬ ТА ЕВОЛЮЦІЯ У РЕАЛЬНОМУ ЧАСІ)

Отримано аналітичний розв'язок рівняння Компанійця у плоско-стратифікованому середовищі з густиною, яка змінюється за законом гіперболічного тангенса, що моделює границю між молекулярною хмарою та міжзоряним середовищем (проміжна область ударного фронту). Отриманий розв'язок дозволяє побудувати повний розв'язок, відновити весь ударний фронт та дослідити його еволюцію в реальному часі за довільних значень трьох незалежних параметрів: перепаду густини, масштабу неоднорідності та положення точки вибуху.

*G. V. Karнаushenko*

Institute of Radio Astronomy, National Academy  
of Sciences of Ukraine,  
4, Chervonopraporna St., Kharkiv, 61002, Ukraine

SOLUTION OF KOMPANEETS EQUATION FOR SHOCK  
FRONT IN THE INHOMOGENEOUS MEDIUM  
WITH DENSITY CHANGING IN A FORM  
OF THE HYPERBOLIC TANGENT (INTERMEDIATE  
REGION AND REAL TIME EVOLUTION)

The analytical solution of Kompaneets equation, descri-  
bing the evolution of the shock front in a planestratified me-

dium for density distribution in a form of the hyperbo-  
lic tangent modeling the boundary molecular cloud – inter-  
stellar medium was obtained (intermediate region of the shock  
front). Obtained solution allows to build the complete solu-  
tion, restore the whole shock front and investigate its evolu-  
tion in real time for arbitrary values of parameters: density  
changes, scale of inhomogeneity and position of the explo-  
sion point.

*Статья поступила в редакцию 17.02.2012*