

Дифракция собственных волн плоского волновода на периодической последовательности поперечных щелей

М. Е. Калиберда, С. А. Погарский

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: Sergey.A.Pogarsky@univer.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 25 июля 2006 г.

Рассматривается задача дифракции собственных волн плоского волновода на полубесконечной и ограниченной периодической последовательности бесконечных щелей в одной из стенок волновода. Задача решена с использованием операторного метода. Найдены коэффициенты отражения и прохождения ключевого элемента. Осуществлены расчеты зависимостей коэффициента отражения в широком диапазоне изменения параметров.

Интерес к исследованиям щелевых структур, выполненных на различного рода передающих линиях, остается непреходящим на протяжении достаточно длительного времени [1-3]. Особое внимание уделяется изучению свойств электродинамических систем с периодическим расположением щелей, поскольку на их основе возможно создание высокоэффективных функциональных устройств СВЧ диапазона, таких, как частотно-селективные узлы или экраны, антенные системы и т. п. [4, 5]. Однако практическая реализация многоэлементных функциональных структур требует, прежде всего, выбора физической модели, которая бы максимально полно описывала свойства реального устройства, учитывая механизм взаимодействия волн, распространяющихся в волноведущей структуре, с системой неоднородностей. Строгое решение электродинамической задачи о трансформации полей волноводных волн и излучении во внешнее пространство на участках волновода со щелями достаточно сложно и громоздко. Это обусловлено тем фактом, что дифрагированные поля в такого рода структурах имеют континуальный пространственный спектр,

и для их описания необходимо использовать интегральные операторы. В ряде случаев для практических приложений достаточно применять приближенные решения, которые как правило строятся в предположении пренебрежимо малого взаимного влияния поля в волноводе и излучения в свободное пространство, обусловленного неоднородностями в виде щелей. В таком приближении поле, излученное из какой-либо щели в пространство вне волновода, не оказывает обратного влияния на комплексные амплитуды волноводных волн на участках волновода с другими щелями. Погрешность решения тем меньше, чем уже щели и больше период их размещения по сравнению с длиной волны. Для построения таких решений удается использовать матричные операторы.

Ключевой задачей для исследования волноводов со щелевыми неоднородностями является задача о взаимодействии волноводной волны в плоском волноводе с бесконечной щелью, прорезанной в поперечном направлении относительно направления распространения волн.

Известен ряд работ, в которых рассматривались вопросы о возбуждении одиноч-

ной щели и периодических последовательностей щелей в плоском волноводе. По-видимому, одной из первых работ, в которой рассматривался плоский волновод со щелями, является исследование [6], где решение для одиночной щели сведено к системе парных интегральных уравнений, записанных относительно магнитных токов на щели. Полученное в [6] решение справедливо лишь в случае малости длины волны по сравнению с шириной щели. Развитием этого подхода явилась работа [7], в которой рассмотрено взаимодействие многоэлементной щелевой структуры, выполненной на плоском волноводе, с основной волной – волной типа *T*. Взаимодействие многощелевой структуры с волнами высших типов плоского волновода рассматривалось в [8]. Громоздкость представления результатов упомянутых работ является основным препятствием для их использования при исследовании периодических структур.

В этом плане операторный метод [9] отличается большей универсальностью и достаточной приспособленностью для расчета характеристик структур с произвольным числом однотипных неоднородностей. Важным элементом использования операторного метода является решение упомянутой выше ключевой задачи – граничной задачи о взаимодействии одиночной щелевой неоднородности с заданным спектром собственных волн волноведущей структуры.

Целью настоящей работы явилось построение математической модели, адекватно описывающей электродинамические свойства плоского волновода с периодическими последовательностями щелей, а также исследование многопараметрических зависимостей характеристик электрических полей от геометрических размеров структуры.

1. Алгоритм решения граничной задачи

Следуя идеям работы [10], можно построить алгоритм нахождения поля, рассеянного полубесконечной системой идентич-

ных объектов. Будем предполагать, что отдельно взятый “элементарный” объект структуры характеризуется операторами отражения \hat{r} и прохождения \hat{t} . Задача состоит в построении оператора рассеяния всей полубесконечной структуры \hat{R} и операторов рассеяния структуры, состоящей из конечного числа элементов.

Рассмотрим алгоритм решения ключевой задачи дифракции одной из H_{0p} -волн на “элементарном” объекте, представляющем собой бесконечную поперечную щель (относительно направления распространения волны), прорезанную в одной из стенок плоского волновода. Геометрия исследуемого ключевого объекта вместе с системой обозначений представлена на рис. 1. Стенки волновода предполагаются идеально проводящими и бесконечно тонкими.

Известно решение задачи дифракции волноводных волн *H*-типа на поперечной бесконечно длинной щели в плоском волноводе [11], полученное в виде интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно функций, связанных с амплитудами Фурье поля излучения. Остановимся вкратце лишь на узловых моментах решения.

Пусть одна из волн H_{0p} -типа набегают из области $y < 0$: $E_p = e^{ik\beta_p y} \sin \frac{\pi p}{h} z$, $p = 1, 2, \dots$, где $\beta_p = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi p}{kh}\right)^2}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ – длина волны. Будем искать функцию $E_x = E(y, z)$ в виде:

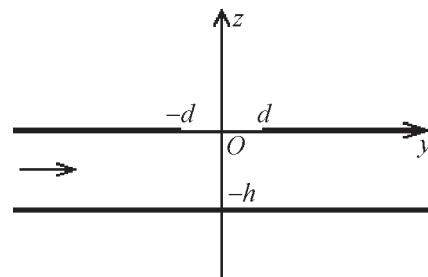


Рис. 1. Геометрия исследуемой структуры

$$E(y, z) = \begin{cases} E^+(y, z), & z > 0, \\ E_p(y, z) + E^-(y, z), & -h < z < 0. \end{cases}$$

Функции E^+ и E^- должны удовлетворять уравнению Гельмгольца при $z > 0$ и $-h < z < 0$ соответственно, граничным условиям на плоскостях волновода и на щели, а также условиям излучения на бесконечности.

Представим рассеянное поле во всем пространстве в виде разложения в интеграл Фурье по плоским волнам:

$$\begin{aligned} E^+(y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{iky\xi + ik\gamma(\xi)z} d\xi, \quad z > 0, \\ E^-(y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \frac{\sin(\gamma(\xi)k(z+h))}{\sin(\gamma(\xi)kh)} e^{iky\xi} d\xi, \quad (1) \\ &-h < z < 0, \end{aligned}$$

где $\gamma(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$, $\text{Re}\gamma \geq 0$, $\text{Im}\gamma \geq 0$, а $C(\xi)$ – неизвестная спектральная функция.

Функция $\frac{C(\xi)}{\sin(\gamma(\xi)kh)}$ является мероморфной с полюсами в точках ξ , которые соответствуют постоянным распространения волноводных волн и растут в комплексной плоскости при $\xi \rightarrow \infty$ не быстрее, чем $|\xi|^{-3/2} e^{kd|\text{Im}\xi|}$. Для того чтобы выполнялось условие излучения, путь интегрирования в (1) выбран таким образом, чтобы он совпадал с вещественной осью всюду, за исключением точек, являющихся полюсами подынтегральной функции, а полюсы обходятся на отрицательной полуоси сверху, а на положительной – снизу.

Удовлетворив граничным условиям на щели и металле, приходим к системе парных интегральных уравнений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) e^{iky\xi} d\xi = 0, \quad |y| > d, \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\xi) \frac{\gamma(\xi)}{1 - e^{2ikh\gamma(\xi)}} e^{iky\xi} d\xi = -i \frac{\pi p}{2kh} e^{iky\beta_p}, \quad |y| < d.$$

Решение парных интегральных уравнений (2), будем искать в виде [11]:

$$C(\xi) = a_0(\xi) + a_1(\xi),$$

$$a_j(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m+j-1} \phi_{2m+j-1}(\xi), \quad j = 0, 1,$$

где $a_0(\xi)$ – четная, $a_1(\xi)$ – нечетная части функции $C(\xi)$, $\phi_m(\xi) = \frac{\sqrt{2m}}{\xi} J_m(kd\xi)$, а $J_m(\xi)$ – функция Бесселя порядка m . Введя вспомогательную функцию $\varepsilon(\xi)$, убывающую, как ξ^{-2} при $\xi \rightarrow +\infty$, в виде $i\xi(1 - \varepsilon(\xi)) = \frac{\gamma(\xi)}{1 - e^{2ikh\gamma(\xi)}}$, после ряда преобразований приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов C_m :

$$\begin{aligned} C_{2m+j-1} &= b_{2m+j-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2m+j-1, 2n+j-1} C_{2n+j-1}, \quad (3) \\ j &= 0, 1, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\text{где } b_m = -\frac{\pi p}{4kh} \phi_m(\beta_p), \quad A_{m,n} = \int_0^{\infty} \phi_m(\xi) \phi_n(\xi) \xi \varepsilon(\xi) d\xi$$

После проведения ряда преобразований, связанных с исключением особенностей, обусловленных наличием полюсов, получим выражения, пригодные для вычисления матричных элементов системы уравнений (3). Проведя интегрирование в комплексной плоскости и необходимые упрощения, можно получить выражения для полей при $y > d$ (E_+), $y < -d$ (E_-):

$$E_{\pm} = E_p - \frac{2\pi^2 i}{(kh)^2} \sum_{l=1}^q C(\pm\beta_l) e^{\pm ik\beta_l y} \frac{l}{\beta_l} \sin\left(\frac{\pi l}{h} z\right). \quad (4)$$

В конечном итоге запишем выражения для коэффициентов прохождения и отражения одиночной щели:

$$t_{p,p} = 1 - \frac{2\pi^2 i}{(kh)^2} \frac{p}{\beta_p} C(\beta_p), \quad (5)$$

$$r_{p,p} = -\frac{2\pi^2 i}{(kh)^2} \frac{p}{\beta_p} C(-\beta_p), \quad p = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Точность решения оценим, сравнивая найденные коэффициенты отражения и прохождения на соответствующих шагах итераций.

Предположим, что коэффициенты C_{2m+j-1} найдены из усеченной системы линейных алгебраических уравнений вида (3) при $j=0, 1, m=1, 2, \dots, N$, а коэффициенты $A_{m,n}$, определенные выражением (4), вычислены с точностью 10^{-6} . Тогда, обозначив через t_N, r_N коэффициенты прохождения и отражения одиночной щели, определенные по формулам (5), (6), где $C(\xi) = \sum_{j=0}^1 \sum_{m=1}^N C_{2m+j-1} \phi_{2m+j-1}(\xi)$, можно найти значения относительных погрешностей получаемого решения. На рис. 2 представлены зависимости модулей разности коэффициентов прохождения $|t_{N+1} - t_N|$ и отражения $|r_{N+1} - r_N|$ от N при $kh = 6$. Сплошными кривыми показан ко-

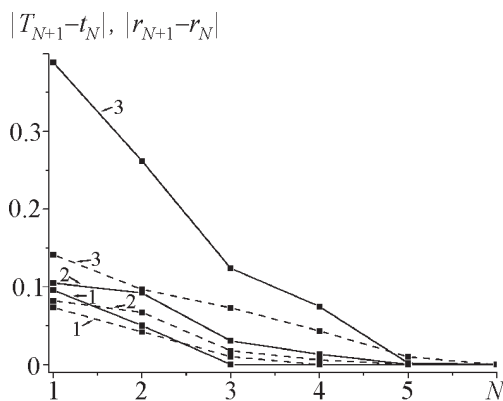


Рис. 2. Зависимость модулей разности коэффициентов прохождения и отражения от N при $kh = 6$: кривые 1 – $kd = 0.6$; кривые 2 – $kd = 3$; кривые 3 – $kd = 6$

эффициент прохождения, штриховыми – коэффициент отражения. Очевидно, что чем уже щель, тем быстрее убывает погрешность вычислений как для коэффициентов отражения, так и для коэффициентов прохождения. Причем результат с погрешность около 1 % получается уже при решении системы линейных алгебраических уравнений третьего порядка.

Найденные выражения (5), (6) позволяют осуществлять поиск значений коэффициента отражения полубесконечной последовательности щелей (в случае многомодового режима – отыскание элементов оператора отражения), используя соответствующее операторное уравнение второго рода [10].

2. Моделирование параметров щелевых структур

С помощью выражений для коэффициентов отражения и прохождения одиночной щели (5), (6) проведены расчеты значений параметров коэффициентов отражения и прохождения. На рис. 3 приведены зависимости коэффициентов прохождения $|T|^2$ (сплошные линии) и отражения $|R|^2$ (штриховые линии) H_{01} -волны плоского волновода с одной щелью от ширины щели в одно-

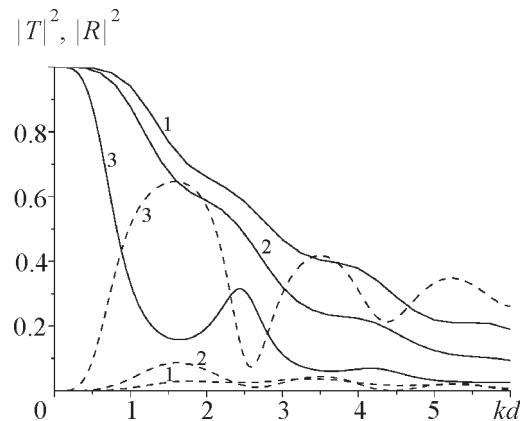


Рис. 3. Зависимость модулей коэффициентов отражения и прохождения H_{01} -волны от ширины щели: кривые 1 – $kh = 5.0$; кривые 2 – $kh = 4.0$; кривые 3 – $kh = 3.2$

модовом режиме. Они аналогичны представленным в [11] зависимостям для волновода со щелями в обеих стенках. Приведенные результаты указывают на то, что существуют некоторые значения параметров структуры, при которых отражение от неоднородности практически отсутствует. Приближение частоты к критическому значению для данного типа волны приводит к появлению крупномасштабных осцилляций в зависимостях, что свидетельствует об интенсивном взаимодействии сильно отражающих концов щели. С уменьшением ширины щели амплитуда осцилляций в таком режиме возрастает.

Найденные значения коэффициентов отражения и прохождения ключевого элемента позволяют определить коэффициент отражения полубесконечной последовательности таких элементов с использованием операторного уравнения второго рода [10]. На рис. 4 приведена зависимость коэффициента отражения структуры, состоящей из 100 щелей (достаточно близкий аналог полубесконечной последовательности), от параметра L/λ , где L – период следования неоднородностей, для волны H_{01} . Зависимость носит периодический характер с периодом $L/\lambda \approx 0.5$. Ее фрагмент, также представ-

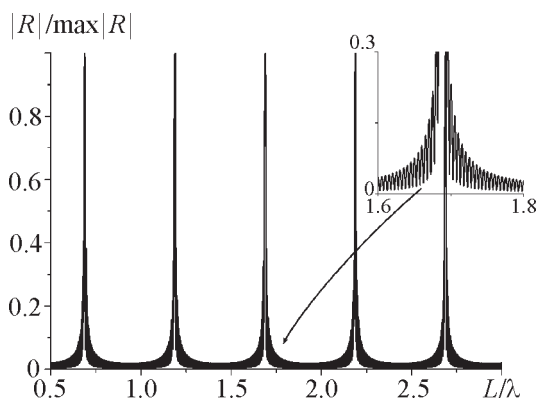


Рис. 4. Зависимость модуля коэффициента отражения для структуры из 100 щелей от параметра L/λ

ленный на рис. 4, демонстрирует факт узости зон полного запыриания: по уровню 0.2 ширина зоны прозрачности не превышает 16 % ширины зоны квазипрозрачности; по уровню 0.5 – 3 %, а по уровню 0.7 – ≈ 0.5 % соответственно. В зонах квазипропускания наблюдаются $N - 1$ мелкомасштабных осцилляций модуля коэффициента отражения, нижний уровень которых равен нулю, а среднее значение определяется волновым размером базового элемента. Физической причиной возникновения осцилляций в зонах квазипрозрачности является интерференция электромагнитной волны в областях между неоднородностями (рассеивателями). Амплитуда осцилляций убывает с ростом числа элементов. Резонансные значения коэффициента отражения соответствуют изменению его фазы на π .

Найденные значения коэффициента отражения полубесконечной последовательности позволяют провести расчеты зависимостей отражательных характеристик структуры с конечным (небольшим) числом элементов от параметра L/λ . На рис. 5 представлены зависимости модулей коэффициентов отражения структур с 4-мя и 10-ю щелями. Наличие небольшого числа неоднородностей приводит к существенному увеличению амплитуды пульсаций в зонах квази-

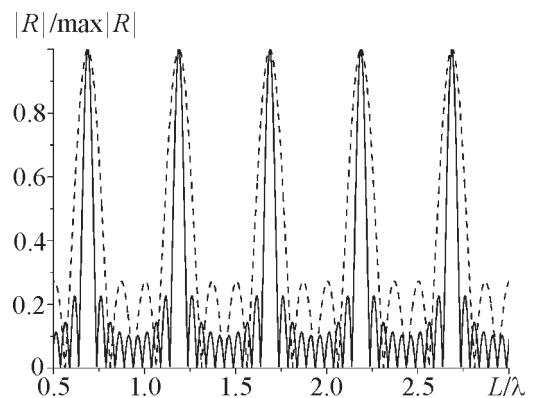


Рис. 5. Зависимость модулей коэффициентов отражения ограниченных структур, состоящих из 4-х (пунктирная кривая) и 10-ти (сплошная кривая) щелей от параметра L/λ

прозрачности. Так, для структуры с 4-мя неоднородностями амплитуда пульсаций достигает уровня 0.28, при этом в зоне квазипрозрачности не наблюдается колебаний уровня амплитуды. Увеличение числа неоднородностей приводит к существенному снижению амплитуды пульсаций вблизи центра зон квазипрозрачности (≈ 0.1) и к некоторому снижению максимального уровня мелкомасштабных пульсаций вблизи переходных зон (зон квазизапираания – квазипрозрачности). Очевидно, что в общем случае коэффициенты (операторы) отражения и прохождения являются многопараметрическими функциями с экстремальными значениями. Это создает основу для решения задач оптимизации характеристик функциональных устройств на основе такого рода структур в широком частотном диапазоне.

Заключение

Таким образом, в работе построено приближенное решение задачи дифракции одной из волноводных волн плоского волновода на периодической последовательности однотипных неоднородностей в виде бесконечных щелей в одной из стенок волновода. Полученное решение в виде матричных операторов рассеяния справедливо при выполнении условия малости щели по сравнению с длиной волны и тем точнее, чем больше период следования щелей по сравнению с длиной волны. Проведенные численные расчеты показали, что в таких структурах общей особенностью зависимостей коэффициентов рассеяния от частоты и волнового размера ключевого элемента является наличие мелкомасштабных осцилляций. С ростом числа неоднородностей характеристики полей рассеяния ограниченных и полубесконечных структур практически совпадают.

Результаты исследований могут найти применение в антенной технике и при создании новых типов функциональных элементов СВЧ диапазона.

Авторы благодарны Л. Н. Литвиненко и С. Л. Просвирнину за ценные замечания и дискуссии при анализе результатов работы.

Литература

1. Huynh T., Lee K. F. Single-layer single patch wideband microwave antenna // *Electron Letters*. – 1995. – Vol. 31. – P. 1310-1312.
2. Chen Zhi Ning. Suspended plate antennas with shorting strips and slots // *IEEE Trans. Antennas Propag.* – 2004. – Vol. 52, No. 10. – P. 2525-2531.
3. Alexopoulos N. G., Katehi P. B., Rutledge D. B. Substrate optimization for integrated circuit antennas // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* – 1983. – Vol. 31, No 7. – P. 550-557.
4. Погарский С. А. Резонансы полубесконечных периодических структур в задачах синтеза частотно-селективных устройств // Тезисы докл. 7-й межд. конф. “СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”, “КрыМиКо-97”, – Севаст. гос. тех. ун-т, Севастополь. – 1997. – Т. 1. – С. 160-161.
5. Encinar J. A. Mode-matching and point-matching techniques applied to the analysis metal-strip-loaded dielectric antennas // *IEEE Trans. Antennas Propag.* – 1990. – Vol. 38, No. 9. – P.1405-1412.
6. Millar R. E. Radiation and reception properties of a wide slot in a parallel plate transmission line I and II // *Can. J. Phys.* – 1959. – Vol. 37. – P. 144-169.
7. Auda H. A. Quasistatic characteristics of slotted parallel-plate waveguides // *IRE Proceedings. Part H. Microwaves, Antennas and Propagation.* – 1988. – Vol. 135, No. 4. – P. 256-262.
8. Lee Jong-Ig, Cho Ung-Hee, Cho Young-Ki. Analysis for dielectrically filled parallel-plate waveguide with finite number of periodic slots in its upper wall as a leaky-wave antenna // *IEEE Trans. Antennas Propag.* – 1999. – Vol. 47, No. 4. – P. 701-706.
9. Литвиненко Л. М., Резник І. І., Литвиненко Д. Л. Дифракція хвиль на напівскінченних періодичних структурах // *Доповіді АН Української РСР.* – 1991. – №6. – С. 62-66.
10. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Анализ дифракции волн на последовательности идентичных ленточных решеток. Многоволновый режим // *Радиофизика и радиоастрономия.* – 1999. – Т. 4, №3. – С. 276-286.
11. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Поперечная щель в плоском волноводе // *Радиотехника и электроника.* – 1977. – Т. 22, №7. – С.1321-1326.

**Дифракція власних хвиль плоского
хвилеводу на періодичній послідовності
поперечних щілин**

М. Є. Каліберда, С. О. Погарський

Розглядається задача дифракції власних хвиль плоского хвилеводу на напівнескінченній та обмеженій періодичній послідовності нескінченних щілин в одній зі стінок хвилеводу. Задачу розв'язано з використанням операторного методу. Знайдено коефіцієнти відбиття та проходження ключового елемента. Виконано розрахунки залежностей коефіцієнтів відбиття у широкому діапазоні зміни параметрів.

**Plane Waveguide Eigenwave Diffraction
by Periodic Sequence of Transverse Slots**

M. E. Kaliberda and S. A. Pogarsky

Plane waveguide eigenwave diffraction by semi-infinite and bounded periodic sequence of transverse slots in one of the waveguide walls has been investigated by using the operator method. The key-element reflection and transmission coefficients are found. The reflection coefficient dependencies are calculated for a wide range of parameter variation.