

Сравнение двух методов локализации источника магнитного поля в задачах магнитокардиологии

А. Ю. Бутрым, Ю. В. Дурнева, С. Н. Шульга

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: Sergey.N.Shulga@univer.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 13 сентября 2006 г.

Сравниваются два метода решения обратной задачи магнитостатики – известный численно-аналитический метод, основанный на теории собственных векторов и преобразовании Фурье, и численный метод, использующий алгоритм глобальной нелинейной оптимизации PSO. Показаны преимущества и недостатки каждого из решений.

Введение

Создание магнитометрических приборов на основе сквидов (сверхпроводящих квантовых интерферометрических датчиков), обладающих уникальной чувствительностью и точностью, послужило стимулом к исследованию задач пространственного анализа слабых магнитных полей [1].

Сущность магнитометрических исследований заключается в получении определенной информации об источнике измеренного магнитного поля (а именно его пространственной локализации и магнитном моменте) при обработке измеренных данных.

Магнитные поля сердца человека изменяются во времени с периодичностью около 1 с. На практике измерения проводят в течение ~90 с, после чего отфильтровываются помехи, проводится усреднение по кардиоциклам. В результате получается набор магнитных карт (обычно с шагом 2 мс) по кардиоциклу. Далее задача состоит в том, чтобы по этим магнитным картам, соответствующим фиксированным моментам времени, определить положение эффективного источника в виде магнитного диполя в соответствующие моменты времени.

В настоящее время исследования магнитных полей, возбуждаемых биологичес-

кими источниками (так называемый биомагнетизм) нашли широкое применение в медицине. Современные сквид-градиометры и магнетометры позволяют регистрировать слабые магнитные поля, возбуждаемые сердцем человека, его мозгом, мускулами [2]. Интерпретация измеренных данных требует разработки методов и алгоритмов, позволяющих облечь полученную информацию в форму, пригодную для дальнейшего физического анализа.

В настоящей работе приведено сравнение двух методов локализации источника биоэлектрической активности сердца в виде магнитного диполя: численно-аналитического метода, основанного на методе собственных векторов с применением преобразования Фурье, и метода нелинейной оптимизации.

Постановка задачи

Магнитные поля сердца человека обусловлены электрической активностью миокарда. Распространение в сердце волны деполяризации может быть достаточно эффективно представлено моделью движущегося источника в виде магнитного или электрического диполя. Магнитный диполь является более простой моделью, т. к. на индукци-

рованное им поле не влияет присутствие неоднородных проводящих тел (торса, сердца) и оно может быть рассмотрено как поле в свободном пространстве.

Поле в произвольной точке пространства, возбуждаемое дипольным магнитным источником с магнитным моментом \vec{M} , задается формулой:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{M} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{R}, \quad (1)$$

где R – расстояние от точки наблюдения до источника поля, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость вакуума. Относительная магнитная проницаемость биологических тканей $\mu = 1$.

Обратная задача состоит в определении параметров источника поля (положения диполя и вектора его магнитного момента) по измеренному распределению магнитного поля в пространстве. Пусть магнитометрическая система, состоящая из измерительной решетки 6×6 сенсоров (расстояние между магнетометрами 4 см), измеряет только B_z -компоненту магнитного поля (см. рис. 1). Так как вектор магнитной индукции линейно связан с вектором магнитного момента \vec{M} , то B_z -компоненту на i -м магнетометре можно представить в следующем виде:

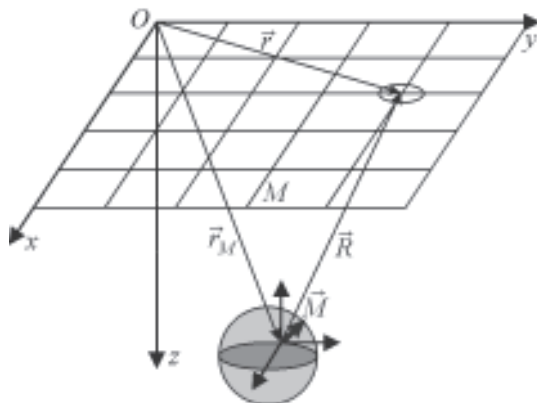


Рис. 1. Геометрия задачи

$$B_{zi} = \int \vec{L}_i(\vec{r}) \cdot \vec{M}(\vec{r}) dV, \quad (2)$$

где $\vec{L}_i(\vec{r})$ – так называемое ведущее поле (Lead Field), зависящее только от положения магнитного диполя относительно магнетометра.

Выражение для ведущего поля из (2), может быть получено из принципа суперпозиции для магнитного поля $B_{zi} = B_{zi}(\vec{M}, \vec{r})$, возбуждаемого диполем \vec{M} в положении \vec{r}_M . Пусть магнитный источник \vec{M} в точке \vec{r}_M представляется в виде $\vec{m}(\vec{r}) = \vec{M} \delta(\vec{r} - \vec{r}_M)$. Подставляя это распределение дипольных моментов в выражение (2), получаем

$$B_{zi}(\vec{M}, \vec{r}_M) = \vec{L}_i(\vec{r}_M) \cdot \vec{M}. \quad (3)$$

Данное соотношение позволяет найти все три компоненты $\vec{L}_i(\vec{r}_M)$ для любого \vec{r}_M . Ведущее поле имеет вид:

$$\vec{L}_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{R}_{Mi} \cdot \vec{z}_0) \vec{R}_{Mi} - (\vec{R}_{Mi} \cdot \vec{R}_{Mi}) \vec{z}_0}{|\vec{R}_{Mi}|^5}. \quad (4)$$

Как видно из формул (3–4), задача является нелинейной по координатам и линейной по компонентам магнитного момента. Поиск шести параметров $(x, y, z; M_x, M_y, M_z)$ очень трудоемок, поэтому в литературе было предложено несколько численно-аналитических методов [3].

Методы решения

1. Метод собственных векторов с применением преобразования Фурье (FTM)

Кратко опишем схему данного метода. Для произвольной векторной функции $\vec{B}(\vec{R})$ величина

$$\hat{D} = \nabla \vec{B}(\vec{R}) \quad (5)$$

представляет собой диадную функцию той же пространственной переменной [4].

В декартовой системе формула (5) имеет вид:

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Поддействовав оператором ∇ на правую часть формулы (1), получим явные выражения для компонент диады \hat{D} [4, 5] через компоненты магнитного момента и направляющие косинусы $N_{p,q,r}$ ($p, q, r = x, y, z$):

$$D_{pq} = \tilde{M}_q N_p + \delta_{qp} \tilde{M}_r N_r + \tilde{M}_p N_q - 5\tilde{M}_r N_r N_p N_q, \quad (p, q, r = x, y, z). \quad (7)$$

В формуле (7) $\tilde{M}_{p,q,r} = (3\mu_0 / (4\pi R^4)) M_p$ являются скалярными компонентами вектора магнитного момента, а δ_{qp} – символ Кронекера.

Формулы (6) и (7) представляют замкнутую задачу по нахождению магнитных моментов и направляющих косинусов (соответственно и координат диполя).

Поскольку диада \hat{D} симметрична (это следует из уравнений Максвелла), в задаче на собственные векторы и собственные значения имеется три взаимно ортогональных собственных вектора с соответственно тремя собственными значениями матрицы \hat{D} [6].

Для определения локализации источника магнитного поля нам необходимо иметь в распоряжении z -компоненту вектора магнитной индукции и компоненты матрицы первых производных (6), которые можно получить, например, с помощью тригонометрической интерполяции, применяя преобразование Фурье [3].

Использование преобразования Фурье предполагает знание распределения B_z -ком-

поненты измеренного поля не только на измерительной решетке конечных размеров, но и на значительном удалении от нее (порядка утроенного размера решетки), где поле спадает практически до нуля. Поэтому в методе ФТМ необходимо провести экстраполяцию измеренного поля до границ области, где $B_z \rightarrow 0$. Это приводит к значительным ошибкам в локализации источника поля.

2. Метод нелинейной оптимизации

Как известно, решение обратной задачи заключается в нахождении параметров источника, который возбуждает на заданной измерительной сетке поле, наиболее близкое к измеренному. Решение задачи будем проводить с помощью метода наименьших квадратов, который заключается в минимизации суммы квадратичных отклонений между измеренным и рассчитанным (3) полем. Будем минимизировать среднеквадратичную невязку вида

$$\chi^2(\vec{r}_M, \vec{M}) = \sum_{i=1}^N (B_{zi}^{measured} - B_{zi}^{model}(\vec{r}_M, \vec{M}))^2. \quad (8)$$

Существует множество методов решения этой задачи [3], среди которых можно выделить как наиболее часто применяемый метод Левенберга–Марквардта, который, являясь градиентным методом, не всегда приводит к достоверному результату из-за наличия множества локальных минимумов вблизи глобального минимума функции (8).

Поэтому мы используем метод, предназначенный для глобальной оптимизации, – Particle Swarm Optimization (PSO), метод оптимизации с помощью “роящихся частиц”, – с дальнейшим уточнением решения симплексным методом (Simplex Downhill) [3, 7]. PSO требует наличия нескольких начальных приближений (обычно используется около нескольких десятков частиц – точек в многопараметрическом пространстве области определения функции). В качестве начального приближения можно было бы выбрать случайно взятые точки, но, используя эври-

стические подходы к их выбору, можно добиться большей устойчивости метода и более быстрой сходимости. В связи с этим для получения хороших начальных приближений мы на первом этапе используем метод Minimum Norm Estimate (MNE) [2], основная идея которого описана ниже.

Введем функциональное подпространство \mathcal{F} , которое содержит квадратично-интегрируемые распределения магнитного момента в области G тестовых точек (в дальнейшем выбираемой в виде шара, соизмеримого с размерами сердца человека), причем тестовые точки зададим в узлах кубической решетки с шагом 0.8 см. Скалярное произведение $\vec{m}_1 \in \mathcal{F}$ и $\vec{m}_2 \in \mathcal{F}$ зададим в этом подпространстве выражением

$$\langle \vec{m}_1, \vec{m}_2 \rangle = \sum_G \vec{m}_1(\vec{r}_G) \cdot \vec{m}_2(\vec{r}_G),$$

а норму –

$$\|\vec{m}\|^2 = \langle \vec{m}, \vec{m} \rangle = \sum_G |\vec{m}(\vec{r}_G)|^2.$$

Идея MNE заключается в том, что заданное распределение поля на датчиках может быть создано распределением источников, расположенных в области G (в выбранном дискретном наборе тестовых точек). При этом могут быть такие распределения токов, которые не создадут никакого сигнала на датчиках. Таким образом, решение обратной задачи (нахождение распределения диполей) определено с точностью до произвольной линейной комбинации источников, которые не создают сигналов. Поэтому при решении мы ограничиваем область поиска подпространством распределений диполей, которое ортогонально к описанному выше подпространству распределений, не создающих сигналов. Математически это выражается в том, что решение для распределения диполей \vec{m}^* ищется в виде линейной комбинации ведущих полей датчиков:

$$\vec{m}^* = \sum_{j=1}^n \omega_j \vec{L}_j, \tag{9}$$

где ω_j – неизвестные скалярные весовые функции, n – количество датчиков на измерительной сетке. Из того факта, что \vec{m}^* является приближенным распределением источников, генерирующих заданное поле B_z на магнетометрах, следует

$$\langle \vec{L}_i, \vec{m}^* \rangle = B_{z_i}. \tag{10}$$

Из формулы (10) получим систему линейных алгебраических уравнений, которая в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{w}. \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{B} = (B_{z_1}, \dots, B_{z_n})^T$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$, а \mathbf{P} – матрица с размерами $n \times n$, элементы которой представляют собой скалярные произведения ведущих полей, $P_{ij} = \langle \vec{L}_i, \vec{L}_j \rangle$. Учитывая это, выражение (11) можно компактно записать как $\vec{m}^* = \mathbf{w}^T \vec{\mathbf{L}}$, где $\vec{\mathbf{L}} = (\vec{L}_1, \dots, \vec{L}_n)^T$.

В численном эксперименте выбираем тестовые точки в пределах сердца, моделируемого однородным шаром радиуса $R_h = 5.7$ см. С целью ускорения обработки данных ведущие поля в этих точках вычисляем один раз и сохраняем в промежуточный файл. Для обеспечения одинаковой чувствительности во всех тестовых точках нормируем ведущие поля в каждой точке на сумму квадратов сигналов, создаваемых в каждом магнетометре. Используя метод SVD (Solve Vector Decomposition) [3], находим псевдообратную матрицу \mathbf{P}^{-1} для (11), с помощью которой по измеренным сигналам датчиков определяем коэффициенты разложения по нормированным ведущим полям. Амплитуды токов для всех тестовых точек получаем из (9).

Далее, найдя распределение магнитных диполей на выбранном наборе тестовых точек, мы можем определить все локальные максимумы амплитуд диполей, которые используем в дальнейшем в качестве начальных точек для алгоритма PSO.

Метод PSO, предложенный в [8], оказался эффективным для решения различных задач оптимизации. Первым шагом алгоритма (см. рис. 2) является случайная ини-

Численные результаты

Для сравнения двух методов локализации источника магнитного поля генерируем магнитное поле на сенсорах измерительной системы магнитным диполем единичной амплитуды $|\vec{M}|=1$ для различных значений радиус-вектора $\vec{r}_M=(x;y;z)^T$, отсчитываемого от угла измерительной решетки. Численные эксперименты будем проводить при нескольких уровнях шумов на сенсорах. Для исследования влияния шумов к сигналу с каждого сенсора добавлялась случайная величина с максимальной амплитудой, определяемой как заданный процент от максимального по всем датчикам сигнала.

В табл. 1 представлены параметры диполя, расположенного строго по центру измерительной решетки на расстоянии 15 см от нее: $\vec{r}_M=(10;10;15)^T$, найденные сравниваемыми методами. Причем магнитный момент $\vec{M}=(M_x;M_y;M_z)^T$ в данном численном эксперименте не имеет z -компонен-

ты: $\vec{M}=(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2;0)^T$. Из таблицы видно, что оба метода дают достоверные результаты для уровня шумов от 0 до 10 %.

В табл. 2 представлены параметры диполя, смещенного относительно центра решетки и расположенного на расстоянии 18.5 см от нее: $\vec{r}_M=(9;4;18.5)^T$. Как и в предыдущем случае $M_x=M_y=\sqrt{2}/2$, $M_z=0$. Точность локализации дипольного источника методом PSO для данных параметров источника гораздо выше, чем точность метода, основанного на преобразовании Фурье. Даже в отсутствие шумов метод ФТМ дает значительную погрешность как в определении координат локализуемого источника, так и его момента.

Следует подчеркнуть, что метод PSO работает даже в том случае, когда z -компонента магнитного момента диполя отлична от нуля (метод ФТМ в такой ситуации неприемлем вследствие сложности проведения адекватной экстраполяции измеренного поля).

Табл. 3 иллюстрирует возможности предложенного метода PSO по определению ис-

Таблица 1.

Уровень шума, %	$\vec{r}_M, \text{ см}$		$\vec{M}, \text{ А} \cdot \text{ м}^2$	
	ФТМ	PSO	ФТМ	PSO
0	$(10.10;10.10;15.02)^T$	$(10.00; 10.00; 15.00)^T$	$(0.71; 0.71; 0.01)^T$	$(0.71; 0.71; 0.00)^T$
5	$(9.64; 10.16; 15.20)^T$	$(10.01; 9.89; 15.09)^T$	$(0.71; 0.71; 0.00)^T$	$(0.73; 0.72; 0.03)^T$
10	$(10.16; 9.65; 15.22)^T$	$(9.66; 9.73; 15.13)^T$	$(0.66; 0.75; 0.01)^T$	$(0.73; 0.73; 0.06)^T$

Таблица 2.

Уровень шума, %	$\vec{r}_M, \text{ см}$		$\vec{M}, \text{ А} \cdot \text{ м}^2$	
	ФТМ	PSO	ФТМ	PSO
0	$(10.64;5.64;18.80)^T$	$(9.00; 4.00; 18.50)^T$	$(0.75; 0.63; 0.18)^T$	$(0.71; 0.71; 0.00)^T$
5	$(10.83; 5.28; 19.26)^T$	$(8.87; 4.09; 18.16)^T$	$(0.78; 0.60; 0.18)^T$	$(0.67; 0.65; 0.04)^T$
10	$(11.21; 5.55; 20.14)^T$	$(9.00; 4.22; 18.06)^T$	$(0.79; 0.59; 0.15)^T$	$(0.65; 0.63; 0.02)^T$

Таблица 3.

Уровень шума, %	$\vec{r}_M, \text{ см}$	$\vec{M}, \text{ А} \cdot \text{ м}^2$
0	$(10.000;10.000;15.000)^T$	$(0.577; 0.577; 0.577)^T$
5	$(9.893; 9.902; 15.327)^T$	$(0.608; 0.607; 0.653)^T$
10	$(10.111; 9.702; 15.479)^T$	$(0.645; 0.590; 0.692)^T$

комых параметров источника, имеющего вертикальную компоненту вектора магнитного момента $\vec{M} = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})^T$ и радиус-вектор $\vec{r}_M = (10; 10; 15)^T$.

Выводы

Предложенные в статье алгоритмы обработки магнитометрической информации являются достаточно быстрыми методами решения обратных задач магнитостатики. Однако, как показали численные эксперименты, более точным и достоверным методом локализации точечного источника магнитного поля в форме магнитного диполя является метод наименьших квадратов, заключающийся в минимизации суммы квадратичных отклонений между измеренным и рассчитанным полями. В случае, когда диполь расположен вблизи центра апертуры датчиков (максимум и минимум поля попадают на измерительную сетку) хорошо работают оба метода: метод собственных векторов с применением преобразования Фурье и метод нелинейной оптимизации. Если же источник расположен на краю апертуры, либо вне ее – метод наименьших квадратов дает гораздо лучшие результаты. Необходимо также отметить, что метод собственных векторов применим только для ситуации, когда магнитный момент ориентирован строго в плоскости измерительной решетки. При наличии достаточно сильных шумов в датчиках измерительной решетки метод наименьших квадратов с использованием алгоритма глобальной оптимизации PSO всегда позволяет находить источник магнитного поля правильно.

Разработанный алгоритм PSO является отправным шагом в решении обратных задач магнитокардиологии, позволяющим находить одновременно несколько источников магнитного поля в виде как магнитного, так и электрического диполей. Влияние шумов при рассмотрении источников в виде совокупности как минимум двух маг-

нитных или электрических диполей, естественно, возрастает. Но даже для случая локализации двух электрических диполей, когда приходится учитывать проводимость торса и сердца, т. е. решать граничную задачу, предложенный нами метод позволяет решить задачу нелинейной оптимизации источников по 12 параметрам (6 координат и 6 моментов электрических диполей) с достаточной точностью для уровня шумов на сенсорах порядка 5%. Соответствующий материал планируется к опубликованию в дальнейшем.

Литература

1. Wikswo J. P. SQUID Magnetometers for Biomagnetism and Nondestructive Testing: Important Questions and Initial Answers // IEEE Trans. Appl. Supercon. – 1995. – Vol. 5, No. 2. – P. 74-120.
2. Hamalainen M., Hari R., Ilmoniemi P. J., Uutila J. K., Lounasmaa O. V. Magnetoencephalography – theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain // Rev. Mod. Phys. – 1995. – Vol. 65, No. 2. – P. 413-497.
3. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, Second Edition. – Cambridge University Press, 1992. – 996 p.
4. Семенов В. Г. Решение обратной задачи для источника физического поля дипольной или квадрупольной модели // Методы и средства точных магнитных измерений: Тр. Всесоюз. н.-и. ин-та метрологии. – Ленинград, 1980. – С. 3-19.
5. Bagatskaya O. V., Butrym Yu. V., Durnyeva Yu. V., Shulga S. N. An analytical method for localization of the dipole magnetic field source an reconstruction of the current flow in the human heart // Bulletin of V. N. Karasin Kharkov National University. – 2004. – No. 646. – P. 160-165.
6. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1984. – 832 с.
7. Rahmat-Samii Y., Geis D., and Robinson J. Particle Swarm Optimization (PSO) // Radio Science Bulletin. – 2003. – No. 305. – P. 14-22.
8. Kennedy J., Eberhart R. C. Particle Swarm Optimization // Proc. the 1995 IEEE Int. Conf. Neural Networks. – Perth (Australia). – 1995. – Vol. IV. – P. 1942-1948.

**Порівняння двох методів локалізації
джерела магнітного поля в задачах
магнітокардіології**

**О. Ю. Бутрым, Ю. В. Дурнева,
С. М. Шульга**

Порівнюються два методи розв'язку зворотної задачі магнітостатики – відомий чисельно-аналітичний метод, що ґрунтується на теорії власних векторів та перетворенні Фур'є, і чисельний метод з використанням алгоритму глобальної нелінійної оптимізації PSO. Показано переваги та недоліки кожного з розв'язків.

**Comparison of Two Methods
for Localization of Magnetic Field Source
in Magnetocardiography**

**A. Yu. Butrym, Yu. V. Durnyeva,
and S. N. Shulga**

Compared are the two methods for solving a magnetostatics inverse problem – the well-known numerical-analytical method based on the eigenvector theory and the Fourier transform, and the numerical method using the global nonlinear optimization PSO. Advantages and disadvantages of each technique are shown too.