

Преобразование Ватсона для когерентного электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной сферой. III. Полный учет возмущений в приближении Бурре

А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин

*Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
ire@ire.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 30 ноября 2004 г.

Исследование предыдущих двух частей работы обобщены на случай, когда в приближении Бурре для когерентного рассеянного поля учтены все возмущающие члены. Получены выражения когерентного поля в освещенной зоне и в зоне тени большой сферы.

1. Введение

В предыдущих частях [1, 2] этой работы исследовалось преобразование Ватсона для случая, когда в эффективном импедансе когерентно рассеянного поля учитывались лишь основные квадратичные члены теории возмущений, чтобы избежать усложнения и без того громоздких вычислений. Используя полученные при этом результаты, представляется возможным провести исследование в полном объеме приближения Бурре с учетом всех возмущающих членов в эквивалентных граничных условиях.

Наличие полюсов у коэффициентов Клебша-Гордана в комплексной плоскости углового момента обязывает при получении асимптотик решения уделить особое внимание реализации численных расчетов.

Проведение исследования с учетом вышеуказанных факторов и является нашей целью.

2. Постановка задачи

Согласно [1, 2] рассмотрим электрический диполь (радиальный либо горизонтальный) над статистически неровной сферой радиуса $r = a + \zeta(\theta, \varphi)$, где $a = \langle r \rangle$ – средний радиус сферической поверхности, а $\zeta(\theta, \varphi)$ – одно-

родное и изотропное поле случайных неровностей. Невозмущенный поверхностный импеданс равен η_0 , его приведенное значение $\tilde{\eta}_0 = \eta_0 \sqrt{\epsilon/\mu}$, где ϵ, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающей сферы среды ($|\tilde{\eta}_0| \ll 1$). Координаты диполя в сферической системе координат с началом в центре рассеивающей сферы: $r = b > a$, $\theta = 0$, $\varphi = 0$.

Для такого источника можно ввести потенциалы Дебая $r\Pi^E$, $r\Pi^M$, с которыми напряженности электрического и магнитного полей связаны дифференциальными соотношениями (1), (2) из [1].

Потенциалы среднего (когерентного) поля в приближении Бурре согласно [5, 6] можно записать в виде мультипольного разложения по зональным гармоникам (собственным функциям продольного оператора). В работе [1] они определены формулами (3), (4) в пункте 3. Не повторяя содержания этого пункта, в котором не требуется конкретизации вида функциональной зависимости эффективного приведенного импеданса $\tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n)$ от физических параметров, перейдем к аналитическому продолжению $\tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n)$ в комплексную плоскость углового момента n , учитывая все квадратичные члены теории возмущений.

3. Аналитическое продолжение $\tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n)$ в комплексную плоскость n

Для рассматриваемого преобразования Ватсона необходимо (см. [1], пункт 4) аналитически продолжить эффективный приведенный импеданс $\tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n)$ на комплексные значения n и исследовать поведение слагающих его частей как функций комплексной переменной $v_1 = n + 1/2$.

В мультипольном разложении когерентно рассеянного поля ([3], формулы (50)-(54)) приведенное значение эффективного импеданса равно

$$\tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n) = \tilde{\eta}_0 + \Delta_0 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M} + \Delta_1 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M} + \Delta_2 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}, \quad (1)$$

где возмущения эффективного приведенного импеданса определены соотношениями:

$$i\Delta_2 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n) = \sum_{n_4=0}^{\infty} \sum_{l=|n-n_4|}^{n+n_4} F_2^{E,M}(n, n_4, l) \equiv F_2^{E,M}(n), \quad (2)$$

$$i\Delta_1 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n) = \sum_{n_4=0}^{\infty} F_6^{E,M}(n_4) + \sum_{n_4=0}^{\infty} \sum_{l=|n-n_4|}^{n+n_4} F_5^{E,M}(n, n_4, l) \equiv F_6^{E,M} + F_5^{E,M}(n), \quad (3)$$

$$i\Delta_0 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{\alpha}(n) = \begin{cases} \frac{k^2 \sigma^2}{x} \left(\frac{1 - 2n(n+1)}{x^2} \right) & \text{при } \alpha = E, \\ \frac{k^2 \sigma^2}{x} & \text{при } \alpha = M. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\sigma = \langle \zeta \rangle^{1/2}$ – дисперсия неровностей; $x = ka$, a – радиус “средней” сферы, $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ – волновое число в окружающей сфере среде; $F_2^{E,M}(n)$ порождены возмущениями $\sim \sigma^2$ в эквивалентных граничных ус-

ловиях [3], а $F_5^{E,M}(n)$ и $F_6^{E,M}$ возмущениями $\sim \eta_0 \sigma^2$, причем n_4 и l – значения моментов в спектральных разложениях поля неровностей и флуктуационного электромагнитного поля соответственно.

Аналитическое продолжение добавки (2) подробно исследовано в предыдущих частях работы [1, 2]. Поэтому здесь мы остановимся на аналитическом продолжении добавок (3) и (4), для которых по результатам [3, 4] имеем:

$$F_6^{E,M}(n_4) \equiv A(n_4) = i \frac{\pi \tilde{\eta}_0}{2a^4} \sigma^2 (2n_4 + 1) n_4 (n_4 + 1) \tilde{W}(n_4/a); \quad (5)$$

$$F_5^{E,M}(n, n_4, l) = 2A(n_4) D_{n, n_4, l} Q_{n, n_4, l} \frac{\pm 1 - (-1)^{z_3}}{2}, \quad (6)$$

где $z_3 = j_1 + j_2 - j_3$, $j_1 = n$, $j_2 = n_4$, $j_3 = l$;

$$D_{n, n_4, l} = f_{1D}(n, n_4, l) C(1) + f_{0D}(n, n_4, l) C(0); \quad (7)$$

$$Q_{n, n_4, l} = f_{1Q}(n, n_4, l) C(1) + f_{0Q}(n, n_4, l) C(0). \quad (8)$$

Причем в сочетаниях \pm индексу E слева отвечает верхний знак, а M – нижний. Для краткости введены обозначения для коэффициентов Клебша-Гордана (ККГ):

$$C(0) = C(n, n_4, l; 0, 0, 0), \quad (9)$$

$$C(1) = C(n, n_4, l; 1, 0, 1),$$

и, кроме того,

$$f_{1D}(n, n_4, l) = (-1)^{z_3} f_{1Q}(n, n_4, l) = (-1)^{z_3} \sqrt{\frac{y_3}{y_2}}, \quad (10)$$

$$f_{0D}(n, n_4, l) = f_{0Q}(n, n_4, l) = -\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}, \quad (11)$$

$$y_i = j_i(j_i + 1), \quad (i = 1, 2, 3).$$

$\tilde{W}(n_4/a)$ – энергетический спектр неровностей на сфере [3].

Преобразуем предварительно сумму $F_5^{E,M}(n)$, как это было сделано в [1], используя прием, известный в задаче многоканального рассеяния частиц с ненулевым спином ([5], с. 153). В основе его лежит факт тождественного обращения в нуль ККГ для физических значений моментов n, n_4, l , которые не подчиняются “правилу треугольника” $|n - n_4| \leq l \leq n + n_4$ (см. [14], с. 201). Перейдем во внутренней сумме от индекса суммирования l к суммированию по $p = l - n$.

Верхний предел суммирования $p = n_4$, а нижний, в соответствии с вышесказанным, положим равным $p = -n_4$, независимо от соотношения между n и n_4 .

Запишем суммирование по p в прямом и обратном порядке:

$$\begin{aligned} F_5^{E,M}(n) &= \sum_{n_4=0}^{\infty} \sum_{p=-n_4}^{n_4} F_5^{E,M}(n, n_4, n+p) \equiv \\ &\equiv \sum_{n_4=0}^{\infty} \sum_{p=-n_4}^{n_4} F_5^{E,M}(n, n_4, n-p). \end{aligned} \quad (12)$$

В преобразованной сумме (12) пределы суммирования теперь не зависят от n , и задача сводится лишь к аналитическому продолжению слагаемых.

Заметим, что эта процедура эквивалентна обобщению разложения Клебша-Гордана в работе [6], (формула (13. 8)). Действительно, величина $z_1 = -n + n_4 + l = n_4 + p$ и при комплексном n остается целочисленной, принимающей отрицательные значения в области $p < -n_4$. Для таких z_1 коэффициенты $C(0)$ и $C(1)$ равны нулю в силу свойств гамма-функций $\Gamma\left(\frac{z_1}{2} + \frac{1}{2}\right)$ и $\Gamma\left(\frac{z_1}{2} + 1\right)$, что и приводит к вышеуказанной эквивалентности.

Для комплексного продолжения ККГ $C(1)$ и $C(0)$, исследованного авторами, выберем, как и в [1], ветви с “зеркальной” симметрией ([7], с. 209), что в области физических значений моментов соответствует стандартному выбору фаз собственных функций углового момента по Кондону и Шортли ([8], с. 179). Выбор именно этой ветви для нас не принципиален, поскольку в выражениях (5), (6) ККГ в комбинациях с другими функциями от n образуют однозначные выражения. Чтобы убедиться в этом, разобьем каждое слагаемое на четную (e) и нечетную (o) часть относительно значений $z_3 = n + n_4 - l$:

$$F_5^{E,M}(n, n_4, l) = \sum_{(e,o)} F_5^{E,M(e,o)}(n, n_4, l). \quad (13)$$

Используя формулы (A1), (A2), (A3) и (A4), связывающие $C(1)$ с $C(0)$ и $\tilde{C}(0) \equiv C(n-1, n_4-1, l-1; 0, 0, 0)$, (см. Приложение А), получим:

$$\begin{aligned} F_5^{E(o)}(n, n_4, l) &= -2\tilde{A}(n_4) \frac{y_3}{y_2} A_2^2 \tilde{C}^2(0) \equiv \\ &\equiv \tilde{F}_5^{E(o)}(n, n_4, l) A_2^2 \tilde{C}^2(0), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} F_5^{M(e)}(n, n_4, l) &= -2\tilde{A}(n_4) \left[\sqrt{\frac{y_3}{y_1}} A_1 - 1 \right]^2 \frac{y_1}{y_2} \tilde{C}^2(0) \equiv \\ &\equiv \tilde{F}_5^{M(e)}(n, n_4, l) C^2(0), \end{aligned} \quad (15)$$

$$F_5^{E(e)}(n, n_4, l) = F_5^{M(o)}(n, n_4, l) = 0. \quad (16)$$

Здесь $l = n + p$, а коэффициенты $A_1 = A_1(n, n_4, l)$ и $A_2 = A_2(n, n_4, l)$ приведены в Приложении А.

Замена $n \rightarrow -n - 1$ во втором варианте записи (12) эквивалентна замене $F_5^{E,M}(-n-1, n_4, -n-1-p)$, т. е. замене

$n \rightarrow -n-1$ и $p \rightarrow -p$ в формулах (14), (15), поскольку величина $(-1)^{z_3}$ остается инвариантной в силу целочисленности n_4 и p . На основании инвариантности соотношений (A7) выражения (14), (15) также остаются инвариантными:

$$F_5^{E,M}(-n-1, n_4, -n-1-p) = F_5^{E,M}(n, n_4, n+p). \quad (17)$$

Из записи (12) получаем:

$$F_5^{E,M}(-n-1) = F_5^{E,M}(n), \quad (18)$$

а поскольку $F_6^{E,M}$ от n не зависит, то из (3) следует

$$i\Delta_1 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(-n-1) = i\Delta_1 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n). \quad (19)$$

С учетом (A7) этим свойством обладает и $i\Delta_0 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n)$. Ранее аналогичным образом это свойство было доказано и для $i\Delta_2 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n)$ [1]. Поэтому все выражение для эффективного импеданса относительно замены $n \rightarrow -n-1$ ведет себя так же, как и отдельные его слагаемые. В результате поведение эффективных коэффициентов отражения $R_n^{E,M}$ и остальных частей подынтегрального выражения $f_\alpha^\beta(v_1)$ такое же (см. формулы (9)-(12) из [1]), как и для гладкой сферы ($n \rightarrow -n-1$ эквивалентно $v_1 \rightarrow -v_1$):

$$f_\alpha^\beta(-v_1) = -f_\alpha^\beta(v_1). \quad (20)$$

Следующим этапом является выбор способа деформации контура интегрирования C' в формуле (10) из [1] с целью эффективного вычисления асимптотики интеграла.

4. Деформация контура C'

Возможные деформации контура C' в интеграле (9) из [1] требуют предварительных оценок поведения $f_\alpha^\beta(v_1)$ в комплексной плоскости v_1 при $|v_1| \rightarrow \infty$.

Если воспользоваться асимптотиками (при $|v_1| \gg x$) для функций Риккати-Ханкеля $\xi_n^{(1,2)}(x) = \sqrt{\pi x/2} H_{v_1}^{(1,2)}(x)$, $v_1 = n+1/2$, (см. [9], с. 94) и асимптотикой ККГ (см. Приложение А), то для поправок (3) и (4) при $|v_1| \gg 1$ будем иметь оценки:

$$i\Delta_1 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n) \sim \text{const} \cdot v_1^2, \quad (21)$$

$$i\Delta_0 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^\alpha(n) \sim \begin{cases} \text{const} \cdot v_1^2 & \text{при } \alpha = E, \\ \text{const} \cdot v_1^0 & \text{при } \alpha = M, \end{cases} \quad (22)$$

не превышающие асимптотического роста [2] для

$$i\Delta_2 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n) \sim \text{const} \cdot v_1^3. \quad (23)$$

Это означает, что учет $\Delta_1 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n)$ и $\Delta_0 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n)$ в сумме с $\Delta_2 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n)$ не нарушает асимптотического поведения коэффициентов отражения $R_n^{E,M}$, а следовательно, и поведения полюсов $f_\alpha^\beta(v_1)$, исследованных в [2].

Если приведенный эффективный импеданс является физически реализуемым ($\text{Re} \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n) \geq 0$), то $f_\alpha^\beta(v_1)$ локализованы в I либо III квадрантах плоскости v_1 (см. Приложение в [2]). По теореме Коши, с учетом свойств $f_\alpha^\beta(v_1)$, получим (см. [9]):

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \int_{C'} f_\alpha^\beta(v_1) dv_1 &= \frac{i}{2} \int_C f_\alpha^\beta(v+1/2) dv = \\ &= \sum_s \text{Res} f_\alpha^\beta(v+1/2)|_{v=v_s}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $v_1 = v+1/2$, а контур C состоит из прямой вдоль вещественной полуоси от $v = +\infty$ до $v = 0$ и прямой вдоль мнимой полуоси от $v = 0$ до $v = +i\infty$.

Вычисление вычетов с использованием вронскиана функций $\hat{\zeta}_v^{(i)}(x)$ приводит к результату [2]:

$$\frac{i}{2} \int_C f_\alpha^\beta(v_1) dv_1 = -2\pi i \times \sum_s \frac{2\nu+1}{\sin \pi\nu} \frac{\hat{\zeta}_v^{(1)}(kr) (\Phi_\alpha^\beta \cdot \hat{\zeta}_v^{(1)}(kb))}{M_v^\beta(x)} P_\nu(-\cos \theta) \Big|_{v=v_s^\beta}, \quad (25)$$

причем

$$M_v^\beta(x) = \hat{\zeta}_v^{(1)}(x) \frac{\partial}{\partial v} \left[\hat{\zeta}_v^{(1)'}(x) + i\tilde{\eta}_{eff}^E(v) \hat{\zeta}_v^{(1)}(x) \right], \quad (\beta = E), \quad (26)$$

$$M_v^\beta(x) = -\hat{\zeta}_v^{(1)'}(x) \frac{\partial}{\partial v} \left[\hat{\zeta}_v^{(1)}(x) - i\tilde{\eta}_{eff}^M(v) \hat{\zeta}_v^{(1)'}(x) \right], \quad (\beta = M), \quad (27)$$

v_s^β – корни выражений под знаком $\frac{\partial}{\partial v}$ в (26) либо (27).

Сходимость рядов (25) достаточно хорошая лишь в области тени. В освещенной области необходимо выделить геометрическую часть, после чего оставшийся ряд по вычетам быстро сходится.

5. Асимптотика поля в освещенной зоне

Эффективным приемом выделения геометрической части решения является процедура “расщепления” подынтегральной функции, предложенная Францем [10]. Не повторяя вычислений, аналогичных осуществленным в [2], приведем конечный результат для случая радиального диполя (см. [2], формула (39)):

$$J_r^{E(g)} \approx 2ikbr\alpha_{sp} R_{v_s}^E \frac{e^{ik(D_1+D_2)}}{D_1+D_2}, \quad (28)$$

где α_{sp} – коэффициент сферической расходимости (см. [11], формула (9)); значение $v = v_s$ в седловой точке равно

$$v_s = x \sin \tau_2 - 1/2 \approx x \sin \tau_2; \quad (29)$$

$$D_1 = b \cos \tau_1 - a \cos \tau_2, \quad (30)$$

$$D_2 = r \cos \tau_4 - a \cos \tau_3,$$

причем $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ – те же углы, что и у Бреммера ([11], с. 88).

Следует особо отметить, что значение $v_s \approx ka \sin \tau_2$, которое определяет коэффициент отражения $R_{v_s}^E$, а следовательно, и $i\Delta\tilde{\eta}_{eff}^E(v_s)$ в седловой точке, согласно (29) зависит исключительно от геометрии задачи и является вещественной величиной. С точки зрения геометрии задачи $k_\perp = v_s/a \approx k \sin \tau_2$ есть проекция на касательную плоскость в точке зеркального отражения волнового вектора \vec{k} , направленного вдоль луча, падающего из источника под углом τ_2 на среднюю поверхность $r = a$ и отражающегося под углом $\tau_3 = \tau_2$ в точку наблюдения. Углы τ_2 и τ_3 отсчитываются от направления радиус-вектора точки отражения. Такой же результат справедлив и для горизонтального диполя.

В зоне тени для волн вычетов [11] ситуация иная. Корни характеристического уравнения $v_s^{E,M}$, при которых обращается в нуль выражение под знаком дифференцирования в (26) или (27) зависят от электродинамических свойств сферы, в том числе от $i\tilde{\eta}_{eff}^{E,M}(v_s^{E,M})$. Для широкого диапазона значений $|\tilde{\eta}_0|$, от 0 до ∞ , корни $v_s^{E,M}$ локализованы вблизи значения $v_s^{E,M} \sim x$ в полосе $x^{1/3} \tau_s^{E,M}$, где $1 \leq |\tau_s^{E,M}| \ll x^{1/3}$, $\arg \tau_s^{E,M} \sim \pi/3$ ([11], с. 44). Это дает основание использовать для их нахождения метод итераций:

$$SUM_5 1 \approx \frac{a^2}{2} \sum_{(e,o)} \left(\int_0^{k_1} d\chi \int_{k_1-\chi}^{k_1+\chi} dq' + \int_{k_1}^{\infty} d\chi \int_{-k_1+\chi}^{k_1+\chi} dq' \right) \times \\ \times F_5^{E,M(e,o)}(n, n_4, \Delta n + l'), \quad (37)$$

причем вместо n' , n_4 , l' согласно (35) следует подставить их выражения через k_{\perp} , χ , q' , а $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} z_3\right)$ и $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} z_3\right)$ в формулах для $C^2(0)$ и $\tilde{C}^2(0)$ следует взять равными 1 (значения в узлах суммирования).

Относительная погрешность (37) та же, что и при замене интеграла суммой по формуле прямоугольников, т. е. пропорциональна значению a^{-2} , умноженному на максимум второй производной подынтегральной функции.

Замена $SUM_5 2$ интегралом в общем случае требует предварительного преобразования, что будет обсуждаться ниже. Для упрощения численного интегрирования и сопоставления с предельным случаем шероховатой плоскости во внутреннем интеграле по q' следует перейти к угловой переменной φ (см [2]):

$$q' = \sqrt{k_{\perp}^2 + \chi^2 + 2k_{\perp}\chi \cos \varphi}, \quad (38)$$

$$dq' = -(k_{\perp}\chi/q') \sin \varphi d\varphi = -\frac{2S'}{q'a^2} d\varphi.$$

Подставляя в (14), (15) вместо $C^2(0)$ и $\tilde{C}^2(0)$ их асимптотики (см. (A8)), получим:

$$SUM_5 1 \approx \int_0^{\infty} d\chi \int_0^{\pi} d\varphi \frac{S'}{q'} 2\tilde{A}(n_4) \tilde{F}_5^{E,M}(n, n_4, \Delta n + l') \frac{l}{\pi S}. \quad (39)$$

Здесь $l = l' + \Delta n \approx l'$, $S = S' + \Delta S$ определены формулой (A9), где $S' = S|_{\Delta n=0}$, поэтому $(2S'/q'a^2)(l/\pi S) \approx 2/\pi a + O(\Delta n)$.

В результате вычислений, пренебрегая величинами $O\left(\frac{\Delta n}{l}, \frac{\Delta n}{z_i}\right)$, получим:

$$SUM_5 1 \approx -2i\tilde{\eta}_0 \sigma^2 \int_0^{\infty} d\chi \chi^3 \tilde{W}(\chi) \int_0^{\pi} d\varphi \begin{pmatrix} +\sin^2 \varphi \\ +\cos^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$F_6^{E,M} \approx +i\tilde{\eta}_0 \sigma^2 \int_0^{\infty} d\chi \chi^3 \tilde{W}(\chi) \int_0^{\pi} d\varphi. \quad (41)$$

Поэтому

$$i\Delta_1 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n) \equiv \pm 2i\tilde{\eta}_0 \sigma^2 \times \\ \times \int_0^{\infty} d\chi \chi \tilde{W}(\chi) \int_0^{\pi} d\varphi \frac{\chi_y^2 - \chi_x^2}{2} + SUM_5 2, \quad (42)$$

где $\chi_x = \chi \cos \varphi$, $\chi_y = \chi \sin \varphi$.

Если можно пренебречь $SUM_5 2$, то выражение (42) переходит в соответствующую добавку в эффективном импедансе для случая плоских волн над шероховатой плоскостью [12].

Согласно (4) имеем

$$i\Delta_0 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n) \sim (k\sigma)^2/x \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

в то время как [2]

$$i\Delta_2 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n) = SUM_2 1 + SUM_2 2, \quad (43)$$

где

$$SUM_2 1 \approx \int_0^{\infty} d\chi \int_0^{\pi} d\varphi \sum_{(e,o)} \tilde{F}_2^{E,M(e,o)}(n, n_4, \Delta n + l') \frac{qS'}{\pi q'S}, \quad (44)$$

$$SUM_2 2 = \sum_{n_4=n'+1}^{\infty} \sum_{p=-n_4}^{n_4-2n'-1} \sum_{(e,o)} F_2^{E,M(e,o)}(n, n_4, n+p), \quad (45)$$

причем

$$F_2^{E,M(e)} = 2A\tilde{F}_2^{E,M(e)}(n, n_4, l)C^2(0), \quad (46)$$

$$F_2^{E,M(o)} = 2A\tilde{F}_2^{E,M(o)}(n, n_4, l)\tilde{C}^2(0), \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2^{E(e)}(n, n_4, l) = & \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{\hat{\Omega}_l^-}{\hat{\Omega}_l^+} \right) A_1 + \frac{\sqrt{y_1 y_3}}{x^2 \hat{\Omega}_l^+} \right] \times \\ & \times \left[(1 - \tilde{\eta}_0^2) A_1 - \frac{\sqrt{y_1 y_3}}{x^2} \right], \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2^{M(e)}(n, n_4, l) = & \left[\left(-\frac{1}{x} + \frac{\hat{\Omega}_l^+}{\hat{\Omega}_l^-} \right) A_1 - i\tilde{\eta}_0 \frac{\sqrt{y_1 y_3}}{x^2 \hat{\Omega}_l^-} \right] \times \\ & \times \left[(1 - \tilde{\eta}_0^2) A_1 + \tilde{\eta}_0^2 \frac{y_1 y_3}{x^2} \right], \end{aligned} \quad (49)$$

$$\tilde{F}_2^{E(o)}(n, n_4, l) = (1 - \tilde{\eta}_0^2) \left(-\frac{1}{x} + \frac{\hat{\Omega}_l^+}{\hat{\Omega}_l^-} \right) A_2^2, \quad (50)$$

$$\tilde{F}_2^{M(o)}(n, n_4, l) = (1 - \tilde{\eta}_0^2) \left(-\frac{1}{x} + \frac{\hat{\Omega}_l^-}{\hat{\Omega}_l^+} \right) A_2^2, \quad (51)$$

$$\hat{\Omega}_l^+ = \ln' \hat{\zeta}_l^{(1)}(x) + i\tilde{\eta}_0, \quad \hat{\Omega}_l^- = 1 - i\tilde{\eta}_0 \ln' \hat{\zeta}_l^{(1)}(x). \quad (52)$$

Напомним, что $n = n' + \Delta n$, $l = l' + \Delta n$, $y_1 = n(n+1)$, $y_3 = l(l+1)$, величина S определена выражением (A9), а величины A_1 , A_2 формулами (A3). В отличие от соответствующих обозначений в [2] мы ввели нижний индекс 2 для сумм и $F(n, n_4, l)$, $F(n)$. Связь между n , n_4 , l' в формуле (44) и k_\perp , χ , q' такая же, как и в (37).

Разложение в ряд по степеням $\Delta n/l'$ в (48)-(51) усложнено по сравнению с (14), (15) неравномерностью разложения $\ln' \hat{\zeta}_l^{(1)}(x)$ в окрестности значения $l' \sim x \sim n'$ шириною $\sim x^{1/3}$. Из-за малости этой окрестности по сравнению со всем промежутком интегрирования по $l' \sim 2n'$ вкладом от нее, по-видимому, все же можно пренебречь. При этом основной член асимптотики (44) пропорционален $O(1)$, а (45) пропорционален $O(\Delta n/n)$ по причине, обсуждаемой ниже.

Введем обозначение

$$\ln' \hat{\zeta}_l^{(1)}(x) = (i/k)\chi_z \quad (53)$$

и пренебрежем $x^{-1} \ll 1$ в выражениях (48)-(51). Ограничившись в (43) вычислением лишь $SUM_{2,1}$, получим:

$$\begin{aligned} i\Delta_2 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^E(n' + \Delta n) = & 2i(k\sigma)^2 \int_0^\infty d\chi \chi \tilde{W}(\chi) \times \\ & \times \int_0^\pi d\varphi \left\{ \left[\frac{k + \chi_z \tilde{\eta}_0}{k\tilde{\eta}_0 + \chi_z} \frac{k_\perp + \chi \cos \varphi}{q'} - \frac{k_\perp q'}{k^2} \frac{k}{k\tilde{\eta}_0 + \chi_z} \right] \times \right. \\ & \times \left[(1 - \tilde{\eta}_0^2) \frac{k_\perp + \chi \cos \varphi}{q'} - \frac{k_\perp q'}{k^2} \right] + \\ & \left. + (1 - \tilde{\eta}_0^2) \frac{\chi^2 \sin^2 \varphi}{q'^2} \right\} + SUM_{2,2}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} i\Delta_2 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^M(n' + \Delta n) = & 2i(k\sigma)^2 \int_0^\infty d\chi \chi \tilde{W}(\chi) \times \\ & \times \int_0^\pi d\varphi \left\{ \left[\frac{k\tilde{\eta}_0 + \chi_z}{k + \chi_z \tilde{\eta}_0} \frac{k_\perp + \chi \cos \varphi}{q'} - \tilde{\eta}_0 \frac{k_\perp q'}{k^2} \frac{k}{k + \chi_z \tilde{\eta}_0} \right] \times \right. \\ & \times \left[(1 - \tilde{\eta}_0^2) \frac{k_\perp + \chi \cos \varphi}{q'} + \tilde{\eta}_0^2 \frac{k_\perp q'}{k^2} \right] + \\ & \left. + (1 - \tilde{\eta}_0^2) \frac{k + \chi_z \tilde{\eta}_0}{k\tilde{\eta}_0 + \chi_z} \frac{\chi^2 \sin^2 \varphi}{q'^2} \right\} + SUM_{2,2}. \end{aligned} \quad (55)$$

При этом мы ограничились главным членом разложения $qS'/q'S = 1 + \dots$, сохранив пока Δn в выражении (53) для χ_z .

Формально выражения (54) и (55) совпадают с (57) и (58) для мультипольного разложения в [4], если можно пренебречь SUM_2 . Отличие заключается лишь в значении $n = n' + \Delta n$ (здесь оно комплексное, а в [4] – целое положительное, кроме того, в [4] использована дебаевская асимптотика χ_z). В таком совпадении можно убедиться, если перемножить содержимое квадратных скобок в (54) и (55) и учесть опечатку в формуле (58) из [4] (последнее слагаемое в квадратных скобках должно содержать η_0^3 , а не η_0), а также разницу в обозначениях (v вместо q' , η_0' вместо $\tilde{\eta}_0$).

Из этого сравнения следует, что асимптотику эффективного импеданса [4] для целых n нельзя продолжить формальной заменой n на комплексные значения $n = n' + \Delta n$, поскольку целая часть $[Re l] = l'$ (а следовательно, и $q' = l'/a$) в формулах (54), (55) является суммой вещественных векторов с модулями n' и n_4 , а сумма дробной части $Re l$ и мнимой $\Delta l = l - l' = \Delta n$ совпадает с таковой $\Delta n = n - n'$ для n . Такое ошибочное предположение было заложено в одном из вариантов расчета в работе [13]. Однако на величине главного члена асимптотического разложения это не сказывается.

Дальнейшее упрощение (54) и (55) заключается в пренебрежении Δn по сравнению с l' в формуле (53) для χ_z . При этом необходимо, чтобы промежуток суммирования по $l' \sim 2n'$ был много больше Δn . Для освещенной зоны $n' \approx ka \sin \tau_2$ (из формулы (29)) это накладывает ограничение на величину угла падения ($\sin \tau_2 \gg x^{-1}$), а в зоне тени $n' \approx x + o(x^{1/3}) \gg 1$ условие выполняется всегда. Вне окрестности $|l' - x| \sim x^{1/3}$ можно воспользоваться асимптотикой Дебая:

$$\chi_z \approx -ik \sqrt{1 - l'^2/x^2} = -i \sqrt{k_z^2 - \chi^2 - 2\chi k_{\perp} \cos \varphi}, \quad (56)$$

где $k_z^2 = k^2 - k_{\perp}^2$ ($k_{\perp} = n'/a$). Для корректности счета в тени следует отбросить $o(x^{1/3})$

и в вещественной части положить $n' \approx ka$. При этом $k_z^2 = 0$ в (56), и с таким значением χ_z выражения (54) и (55), как было установлено в [4], совпадают с добавками $\Delta_2 \eta_{\text{эф}}$ в эффективном импедансе плоских волн, скользящих над шероховатой касательной плоскостью [12].

Как указывалось выше, вычисление SUM_5 и SUM_2 в равной степени требуют специального и достаточно подробного предварительного анализа. Причина такого положения в том, что ККГ в этой области изменения n , n_4 , l при определенных значениях Δn могут иметь полюса, которые существенным образом влияют на характер вычислений. Поэтому качественные рассуждения о том, что вклад SUM_2 асимптотически мал по сравнению с SUM_1 , приведенные в предыдущей части [2], мы попытаемся в следующей IV части обосновать более детально.

Приложение А

Симметрия преобразования

$$n \rightarrow -n - 1, \quad l \rightarrow -l - 1$$

Авторами было получено [13], [14] выражение для ККГ $C(j_1, j_2, j_3; 0, 0, 0)$ с комплексными j_1, j_2, j_3 , которое можно привести к виду [1]:

$$C(j_1, j_2, j_3; 0, 0, 0) = \left\{ \frac{2j_3 + 1}{\pi} \frac{f(z_1)f(z_2)f(z_3)}{(1+z_0)f(z_0)} \right\}^{1/2} \cos\left(\frac{\pi}{2} z_3\right), \quad (A1)$$

где $z_0 = j_1 + j_2 + j_3$, $z_i = z_0 - 2j_i$ ($i = 1, 2, 3$),

$$f(z) = \Gamma\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right).$$

Кроме того, установлено, что

$$C(j_1, j_2, j_3; 1, 0, 1) = A_1 C(j_1, j_2, j_3; 0, 0, 0) + A_2 C(j_1 - 1, j_2 - 1, j_3 - 1; 0, 0, 0), \quad (A2)$$

где $A_{1,2}$ определяются формулой (29) из [14]:

$$A_1 = \frac{y_1 - y_2 + y_3}{2\sqrt{y_1 y_2}}, \quad (A3)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(2j_3 + 1)z_1 z_2 z_3 (z_0^2 - 1)}{(2j_3 - 1)z_0 y_1 y_3} \right\}^{1/2},$$

$$A_2 C(j_1 - 1, j_2 - 1, j_3 - 1; 0, 0, 0) = \left\{ \frac{2j_3 + 1}{\pi} \frac{1}{y_1 y_3} \frac{(1 + z_0)f(z_0)}{f(z_1)f(z_2)f(z_3)} \right\} \sin\left(\frac{\pi}{2} z_3\right),$$

$$y_i = j_i(j_i + 1), \quad (i = 1, 2, 3). \quad (A4)$$

ККГ входят в решение рассматриваемой задачи со значениями моментов $j_1 = n$, $j_2 = n_4$, $j_3 = n + p$, где n – произвольное комплексное число; n_4, p – целые числа ($n_4 = 0, 1, 2, \dots$); $-n_4 \leq p \leq n_4$.

При этом $z_1 = n_4 + p$, $z_3 = n_4 - p$ – целые числа одинаковой четности. Для $z_1 < 0$, т. е. $p < -n_4$, в случае четного z_3 получаем

$$\Gamma^{-1}\left(\frac{z_1}{2} + 1\right) = 0, \text{ а в случае нечетного } z_3 - \Gamma^{-1}\left(\frac{z_1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0. \text{ В результате выражения для ККГ (A1) и (A2) в этой области значений } z_1 < 0 \text{ обращаются в нуль.}$$

Разрезав комплексную плоскость вдоль отрезка вещественной оси $\left[-\max\left(\frac{(n_4 + p + 1)}{2}, p + 1, 1\right), \max\left(\frac{n_4 - p - 1}{2}, -p, 0\right)\right]$ и приняв условие $\arg n = 0$ на положительной вещественной полуоси правее разреза, определим ветвь, обладающую “зеркальной” симметрией (для физических значений j_i см. [8]; [7], с. 209):

$$C(-n - 1, n_4, -n - p - 1; 0, 0, 0) = (-1)^{n_4} C(n, n_4, n + p; 0, 0, 0), \quad (A5)$$

$$C(-n - 1, n_4, -n - p - 1; 1, 0, 1) = (-1)^{n_4} C(n, n_4, n + p; 1, 0, 1). \quad (A6)$$

Более подробно вывод соотношений (A5) и (A6) изложен в [2].

В выражении для добавки $i\Delta_1 \tilde{\eta}_{\text{eff}}^{E,M}(n)$ зависимость от n входит в виде следующих комбинаций:

$$y_1, \quad y_3, \quad A_1 \{y_1 y_3\}^{-1/2}, \quad A_1 \{y_3 / y_1\}^{1/2}, \quad C^2(n, n_4, n + p; 0, 0, 0), \quad (A7)$$

$$A_2^2 C^2(n - 1, n_4 - 1, n + p - 1; 0, 0, 0).$$

Исходя из определения этих величин, включая (A5), (A6), несложно показать, что они инвариантны относительно замены

$$n \rightarrow -n - 1, \quad p \rightarrow -p.$$

Подробнее это сделано в Приложении А работы [1].

Асимптотики ККГ получаются с помощью формулы Стирлинга для Γ -функций в (A1) (см. [1], [13], [14]):

$$C^2(n, n_4, n + p) \approx C^2(n - 1, n_4 - 1, n + p - 1) \approx \frac{n + p}{\pi S} \text{ при } |z_i| \gg 1, \quad (A8)$$

где

$$S = \frac{1}{4} (z_0 z_1 z_2 z_3)^{1/2} = \frac{1}{4} \left\{ [(j_1 + j_2)^2 - j_3^2] [j_3^2 - (j_1 - j_2)^2] \right\}^{1/2} = \frac{1}{4} \left\{ [(2n + p)^2 - n_4^2] (n_4^2 - p^2) \right\}^{1/2}. \quad (A9)$$

Работа выполнена в рамках проекта УНТЦ № 2116.

Литература

1. Брюховецкий А. С., Пазынин Л. А. Преобразование Ватсона для когерентного электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной сферой. I. Потенциалы Дебая в комплексной плоскости углового момента // Радиофизика и радиоастрономия. – 2004. – Т. 9, №1. – С. 37-46.
2. Брюховецкий А. С., Пазынин Л. А. Преобразование Ватсона для когерентного электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной сферой. II. Деформация контура интегрирования и вычисление асимптотик поля // Радиофизика и радиоастрономия. – 2004. – Т. 9, №1. – С. 47-56.
3. Брюховецкий А. С., Пазынин Л. А. Эффективный импеданс статистически неровной сферы. I. Общий случай // Радиофизика и радиоастрономия. – 1997. – Т. 2, №2. – С. 119-126.
4. Брюховецкий А. С., Пазынин Л. А. Эффективный импеданс статистически неровной сферы. II. Случай большой сферы // Радиофизика и радиоастрономия. – 1997. – Т. 2, №2. – С. 127-136.
5. Charap J. M. and Squires E. J. On Complex Angular Momentum in Many-Channel Potential-Scattering Problems // Annals of Physics. I. – 1962. – Vol. 20. – P. 145–156; II. – 1963. – Vol. 21. – P. 8-28.
6. Andrews M. and Gunson J. Complex Angular Momenta and Many-Particle States. I. Properties of Local Representations of the Rotation Group // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5, No. 10. – P. 1391-1400.
7. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. – Л.: Наука, 1975. – 439с.
8. Юцис А. П., Савукина А. Ю., Бандзайтис А. А., Каросене А. В., Нашленас Э. П. Коэффициенты Клебша-Гордана с отрицательными квантовыми числами момента количества движения // Лит. физ. сб. – 1964. – Т. IV, №2. – С. 173-185.
9. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. – М.: Мир, 1969. – 608с.
10. Franz W. Uber die Greenschen Funktionen des Zylinders und der Kugel // Z. Naturf. – 1954. – Vol. 9a, No. 9. – P. 705-716.
11. Bremmer H. Terrestrial Radio Waves. – N. Y.: Elsevier, 1949. – 343p.
12. Брюховецкий А. С., Фукс И. М. Тензор эффективного импеданса статистически неровной импедансной поверхности // Изв. вузов. Радиофизика. – 1985. – Т. 28, №11. – С. 1400-1407.
13. Брюховецкий А. С., Пазынин Л. А. О коэффициентах Клебша-Гордана в комплексной j-плоскости. I. Физические значения углового момента // Радиофизика и радиоастрономия. – 2002. – Т. 7, №1. – С. 74-80.
14. Брюховецкий А. С., Пазынин Л. А. О коэффициентах Клебша-Гордана в комплексной j-плоскости. II. Комплексные значения моментов // Радиофизика и радиоастрономия. – 2002. – Т. 7, №1. – С. 81-87.

Перетворення Ватсона для когерентного електромагнітного поля, розсіяного статистично нерівною сферою. III. Повне врахування збурень в наближенні Бурре

А. С. Брюховецький, Л. А. Пазинін

Дослідження попередніх двох частин роботи узагальнені для випадку, коли в наближенні Бурре для когерентного розсіяного поля враховані всі збурюючі члени. Одержані вирази когерентного поля в освітленій зоні та в зоні тіні великої сфери.

Watson Transformation for the Coherent Electromagnetic Field Scattered by a Statistically Rough Sphere. III. Complete Account for Perturbations in the Bourret Approximation

A. S. Bryukhovetski and L. A. Pazynin

The investigation of two preceding parts of the work is generalized for the case when all perturbation members in the Bourret approximation are taken into account for a coherent scattered field. The expressions for a coherent field in the illuminated zone and in the shadow zone of a large sphere are derived.