Радиофизика и радиоастрономия, 2005, т. 10, №2, с. 172-177

УДК 621.372.853.1

Приближенные решения дисперсионного уравнения для цилиндрического волновода с импедансными границами

Н. Н. Горобец, А. П. Удовенко[1]

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина

[1]Радиоастрономический институт НАН Украины, ул. Краснознаменная, 4, г. Харьков, 61002, Украина E-mail:udovenko@rian.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 10 февраля 2005 г.

В статье представлены приближенные решения дисперсионного уравнения для собственных мод регулярной линии передачи с импедансными границами в высоко- и низкочастотном приближениях, получены соотношения для частот отсечек несимметричных гибридных волн, проведен анализ дисперсионных характеристик двухслойного диэлектрического волновода в круглом металлическом экране.

Развитие внеатмосферных радиоастрономических исследований, прогресс спутникового вещания и связи с частотным и поляризационным комплексированием информационных каналов предъявляют повышенные требования к параметрам используемых апертурных антенн. Эффективность рассматриваемых антенных систем (усиление, коэффициент использования поверхности, уровень кроссполяризационного излучения) – результат мультипликативного воздействия ряда параметров [1], основные из которых определяются облучателем: симметрия диаграмм направленности и совпадение фазовых центров в главных плоскостях, диаграмма рассеяния и уровень кроссполяризации.

Волноводные облучатели зеркальных антенн можно условно разделить на две группы: открытые концы линии передачи и рупорные антенны. Облучатели первой группы, как правило, используются в первичном фокусе зеркальных антенн и характеризуются относительно небольшими электрическими размерами раскрывов (до 10λ) К этому виду антенн можно отнести рупоры с углами полураскрыва до $20°$ и фазовыми вариациями по апертуре до $(0.05 \div 0.1)\pi$. Для таких антенн результаты исследований модового состава собственных волн линии передачи являются первым приближением в расчетах характеристик излучения. К рупорным облучателям двухзеркальных и лучеводных антенн с углами полураскрыва более $20°$ предъявляются дополнительные требования к виду апертурного распределения и размерам.

Приближение к предельной величине коэффициента использования поверхности немодифицированной параболической зеркальной антенны ~0.84 [2] возможно с использованием облучателей, работающих в одно- и двухмодовом режимах и поддерживающих гибридные моды [3]. В диапазонах сантиметровых и длинных миллиметровых волн оптимальное облучение обеспечивают линии передачи и рупоры с внутренней гофрированной поверхностью [1, 3, 4]. При переходе к длинам волн короче $1 \div 3$ мм изготовление таких облучателей ограничено технологическими возможностями гальванопластики.

Гибридные моды могут распространяться в линиях передачи с импедансными внутренними границами, характеристики которых исследовались в высокочастотном приближении для $ka \geq 10$ (k – волновое число, a – внутренний радиус) преимущественно численными методами из-за громоздкости функций, входящих в дисперсионное уравнение [5-7]. С использованием граничных условий импедансного типа, когда поле направляемых волн рассматривается как плоская волна, падающая на локально плоскую границу раздела, найдены асимптотические решения дисперсионного уравнения для круглых волноводов класса “полый диэлектрический канал” [5], справедливые при малых углах скольжения волн Бриллюэна. Результаты расчетов дисперсионных кривых низших собственных мод двухслойного диэлектрического волновода в круглом симметричном экране получены графоаналитическим методом [8]. Постоянные распространения и затухания мод в линии передачи с импедансными границами как в элементе широкодиапазонной поглощающей среды также рассчитывались численными методами [9].

Целью работы является приближенное решение дисперсионного уравнения для круглого регулярного волновода с импедансными границами, формализация связи постоянных распространения собственных несимметричных волн с параметрами волновода и анализ диаграмм типов колебаний рассматриваемой линии передачи.

В цилиндрической системе координат r, ϕ, z (рис. 1) для волн, распространяющихся в цилиндрическом волноводе с импедансными границами с фазовой постоянной β и законом изменения поля вдоль оси z для прямой волны $\exp(-i\beta z)$ (множитель в дальнейшем опущен), определим компоненты полей через электрический Γ^E и магнитный Γ^M векторы Герца со скалярными потенциальными функциями для области $0 \leq r \leq a$ с параметрами диэлектрика $\varepsilon_1, \ \mu_1$ (рис. 1)

$$\Psi^E(r,\varphi) = AJ_m(\alpha_1 r)\sin(m\varphi + \varphi_0),$$
$$\Psi^M(r,\varphi) = BJ_m(\alpha_1 r)\cos(m\varphi + \varphi_0), \qquad (1)$$

и области $a \leq r \leq b$ с параметрами $\varepsilon_2, \ \mu_2$

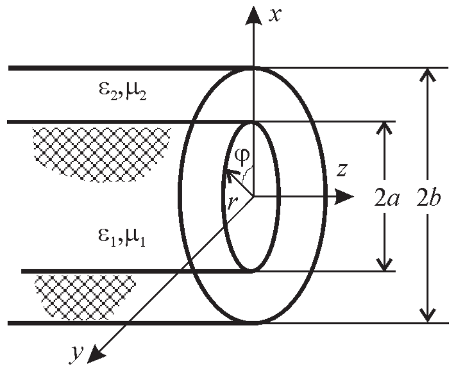

Рис. 1. *Металлодиэлектрический волновод*

$$\Psi^E(r,\phi) = (FH_m^{(2)}(\alpha_2 r) + GH_m^{(1)}(\alpha_2 r))\sin(m\phi + \phi_0)$$
$$(2)$$
$$\Psi^M(r,\phi) = \left(CH_m^{(2)}(\alpha_2 r) + DH_m^{(1)}(\alpha_2 r)\right)\cos(m\phi + \phi_0).$$

Здесь A, B, C, D, F, G – постоянные коэффициенты; $J_m(\alpha_1 a)$ – функция Бесселя; $H_m^{(2)}(\alpha_2 r)$, $H_m^{(1)}(\alpha_2 r)$ – функции Ханкеля первого и второго рода.

Поперечные волновые числа $\alpha_1, \ \alpha_2$, волновое число свободного пространства k_0 и постоянная распространения волны в линии передачи β связаны характеристическими соотношениями:

$$\beta^2 = \begin{cases} k_0^2\varepsilon_1\mu_1 - \alpha_1^2, & 0 \leq r \leq a, \\ k_0^2\varepsilon_2\mu_2 - \alpha_2^2, & a \leq r \leq b. \end{cases} \qquad (3)$$

Из системы уравнений, полученных методом сшивания тангенциальных компонент полей на границе диэлектрик–диэлектрик $r = a$ с учетом граничных условий на металлическом экране $r = b$, сократив число неизвестных коэффициентов до двух и приравняв определитель системы к нулю, получим дисперсионное уравнение для регулярного двухслойного диэлектрического волновода в металлическом экране:

$$\left(F_m(\alpha_1 a) - \frac{\mu_2}{\mu_1}\varphi(\alpha)R_m(a,b)\right)\times$$

$$\times\left(F_m(\alpha_1 a)-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\varphi(\alpha)S_m(a,b)\right)=$$

$$=\left(m\bar{\beta}\right)^2\left(\varepsilon_1\mu_1\right)^{-1}\left(\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha_2^2}\right)^2, \qquad (4)$$

где

$$F(\alpha_1 a)=\frac{(\alpha_1 a)J_m'(\alpha_1 a)}{J_m(\alpha_1 a)},\ \varphi(\alpha)=\frac{(\alpha_1 a)^2}{\alpha_2 a},\ \bar{\beta}=\frac{\beta a}{ka},$$

$$R_m(a,b)=\frac{\left(J_m'(\alpha_2 a)N_m'(\alpha_2 b)-J_m'(\alpha_2 a)N_m'(\alpha_2 a)\right)}{\left(J_m(\alpha_2 a)N_m'(\alpha_2 b)-J_m'(\alpha_2 b)N_m(\alpha_2 a)\right)},$$

$$S_m(a,b)=\frac{\left(J_m'(\alpha_2 a)N_m(\alpha_2 b)-J_m(\alpha_2 b)N_m'(\alpha_2 a)\right)}{\left(J_m(\alpha_2 a)N_m(\alpha_2 b)-J_m(\alpha_2 b)N_m(\alpha_2 a)\right)}.$$

Полюсы функций $R_m(a,b)$, $S_m(a,b)$ (рис. 2) совпадают с относительными частотами минимумов интерференции в тонком диэлектрическом слое на идеальном проводнике: $ka_l = l\pi\left(4\sqrt{\varepsilon-1}\,(t-1)\right)^{-1}$ для $l=1,2,\ldots,n$, $\varepsilon_2/\varepsilon_1>1$, $t=b/a$.

Асимптотические представления функций Бесселя и Неймана в области больших аргументов $x\gg m$, $x\gg 1$ позволяют упростить функции $R_m(a,b)$, $S_m(a,b)$ и привести уравнение (4) к известной форме [6]:

$$\left(F_m(\alpha_1 a)-(\alpha_1 a)^2\frac{\operatorname{tg}\left(ka(t-1)\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2}\right)}{ka\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2}}\right)\times$$

$$\times\left(F_m(\alpha_1 a)+(\alpha_1 a)^2\frac{\operatorname{ctg}\left(ka(t-1)\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2}\right)}{ka\sqrt{\varepsilon_1-\varepsilon_2}}\right)=m^2. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) для несимметричных мод EH_{mn}, полученное методом последовательных приближений, с точностью до членов порядка $(ka)^{-2}$ имеет вид:

$$\alpha_1 a_{mn}^{EH}=\xi_{(m-1)n}\times$$

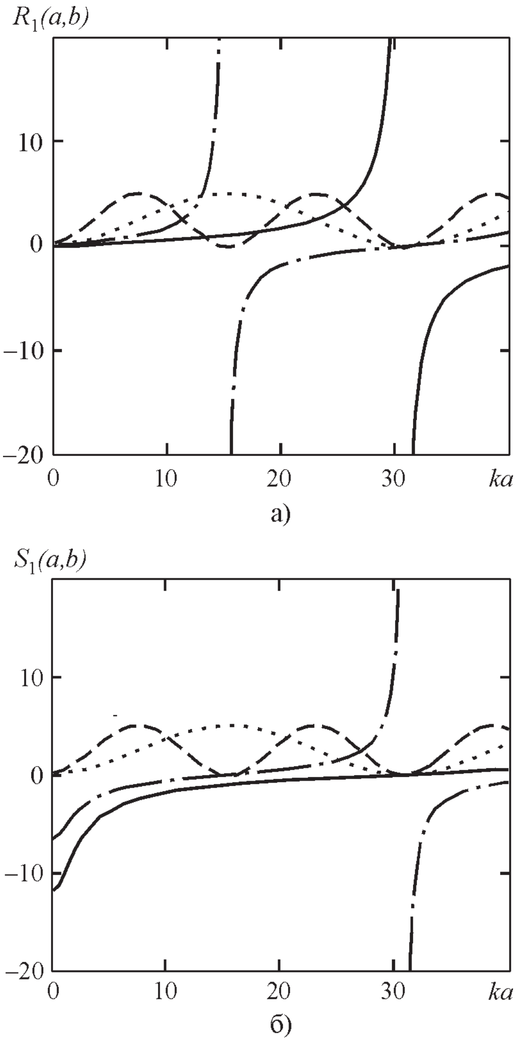

Рис. 2. *Импедансные функции $R_m(a,b)$ (а) и $S_m(a,b)$ (б) дисперсионного уравнения линии передачи с параметрами диэлектриков $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2.04$: —— – $t_1 = 1.05$; –·– – $t_2 = 1.1$. Интенсивности отражения от диэлектрического слоя толщиной $d_i = 2ka(t_i-1)(\varepsilon-1)^{1/2}$: ··· – $t_1 = 1.05$; – – – – $t_2 = 1.1$*

$$\times\left(1-\frac{\operatorname{tg}^2\left(ka(t-1)\sqrt{\varepsilon_2-1}\right)-\varepsilon_2}{2ka\sqrt{\varepsilon_2-1}\operatorname{tg}\left(ka(t-1)\sqrt{\varepsilon_2-1}\right)}\right), \qquad (6)$$

где $\xi_{(m-1)n}$ – n-й корень уравнения $J_{m-1}(x)=0$, $\varepsilon_1=1$.

Функции $R_m(a,b)$, $S_m(a,b)$ в уравнении (4) неявно зависят от параметров диэлектриков. Для приведения этих зависимостей в явную форму разложим функции Бесселя, Неймана и их производные в ряд Тейлора в окрестности координаты $r_0=(a+b)/2$. После преобразований и упрощения функции примут вид:

$$R_m(a,b)=\frac{f_R(ka,t)}{\alpha_2 a},$$
$$S_m(a,b)=\frac{f_S(ka,t)}{\alpha_2 a}, \qquad (7)$$

где

$$f_R(ka,t)=\frac{4}{t-1}\left((\alpha_2 a)^2-\frac{4m^2}{(t+1)^2}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{4}{t-1}\frac{2}{(t^2-1)}+\frac{4m^2}{(t+1)^2}-(\alpha_2 a)^2\right)^{-1},$$
$$f_S(ka,t)=\frac{t-1}{4}\left((\alpha_2 a)^2-\frac{4m^2}{(t+1)^2}-\frac{4}{t-1}\frac{2t}{(t^2-1)}\right)^{-1}.$$

Погрешность аппроксимации (7) для частот $ka\le 10\div 15$ и $t\le 1.2$ не превышает 5 % (рис. 3).

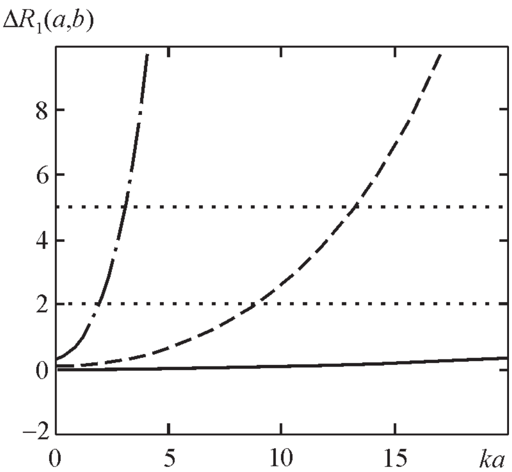

Рис. 3. *Погрешности аппроксимации импедансной функции $R_1(a,b)$ для линии с параметрами $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=2.04$: —— – $t_1=1.01$; - - - – $t_2=1.05$; – · – – $t_3=1.2$*

На частотах вблизи отсечек $\bar{\beta}\to 0$ из дисперсионного уравнения (5) вытекают критические условия для HE_{mn} и EH_{mn} мод:

$$F_m\left(\alpha_1^{HE}a\right)-(\mu_2/\mu_1)\varphi\left(\alpha_1^{HE}a\right)f_R\left(\alpha_1^{HR}a\right)=0, \qquad (8)$$

$$F_m\left(\alpha_1^{EH}a\right)-(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\varphi\left(\alpha_1^{EH}a\right)f_S\left(\alpha_1^{EH}a\right)=0, \qquad (9)$$

где $\varphi\left(\alpha_1^{HE}a\right)=\left(\alpha_1^{HE}a\right)^2\left((ka)^2(\varepsilon_2/\varepsilon_1-1)\right)^{-1}$,

$\varphi\left(\alpha_1^{EH}a\right)=\left(\alpha_1^{EH}a\right)^2\left((ka)^2(\varepsilon_2/\varepsilon_1-1)\right)^{-1}$.

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка (8) и (9) относительно трансцендентных функций Бесселя дифференцированием по параметру p ($p_0\le p\le p_1$) [10] сводится к решению задачи Коши с начальными условиями $\alpha_1 a=(\alpha_1 a)_0$ при $p=p_0$ для дифференциального уравнения с алгебраической правой частью и с учетом зависимости $\alpha_1 a=f(p)$.

Приближенные выражения для критических частот гибридных мод двухслойного диэлектрического волновода в круглом металлическом экране имеют вид:

$$(\alpha_1 a)_{mn}^{HE}\simeq\mu_{mn}\left(1-\frac{\mu_{mn}^2(t^2-1)}{\mu_{mn}^2(t^2+1)-2m^2}\right), \qquad (10)$$

$$(\alpha_1 a)_{mn}^{EH}=\xi_{mn}\left(1-\frac{t^2-1}{2t\varepsilon_2/\varepsilon_1}\left(1+\frac{(ka)^2\varepsilon_1\left(\varepsilon_2/\varepsilon_1-1\right)}{\xi_{mn}{}^2}\right)\right), \qquad (11)$$

где μ_{mn} – n-й корень уравнения $J'_m(x)=0$, ξ_{mn} – n-й корень уравнения $J_m(x)=0$.

Из анализа погрешностей приближения (6) и решения для критической области (11) на примере несимметричной гибридной моды EH_{11} следует, что решения (6) и (11) дисперсионного уравнения дополняют друг друга в диапазоне изменения частот (рис. 4, 5).

Характеристики распространения собственных мод круглого цилиндрического волновода с импедансными границами, представленые диаграммами Бриллюэна (рис. 6) в координатах ka, βa, – плавно изменяющиеся функции относительной частоты ka с асимптотиками $\beta a \to ka$. Для EH_{mn} – волн двухслойного диэлектрического волновода отсутствует явление “высокочастотной отсечки” (перехода в “медленную” волну), характерное для линий передачи с гофрированной стенкой. При соотношении диэлектрических проницаемостей слоев $\varepsilon_2/\varepsilon_1 < 1$ $(\varepsilon_1 > \varepsilon_2)$ с возрастанием частоты фазовая скорость электромагнитной волны в линии передачи $v_ф$ переходит из области $v_ф \ge c$ в область $c \ge v_ф \ge v_д$

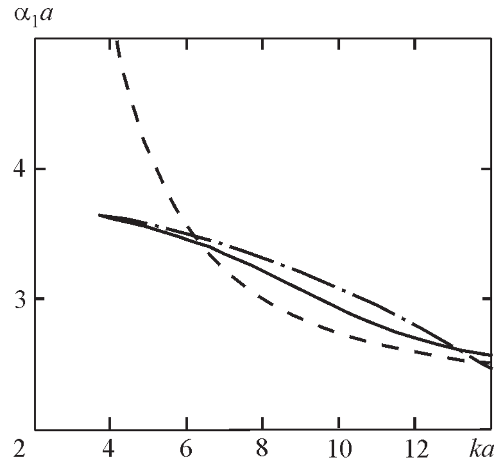

Рис. 4. *Решения дисперсионного уравнения (4) для несимметричной моды EH_{11} :*
—— – численное решение; –·– – приближенное решение для критической области (11); - - - – приближенное решение (6)

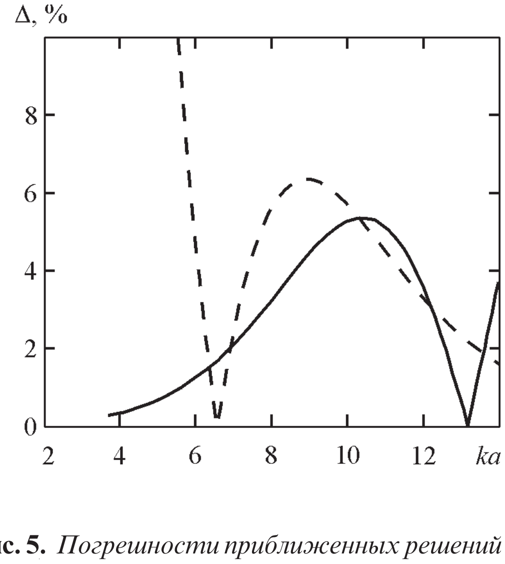

Рис. 5. *Погрешности приближенных решений для моды EH_{11} :*
—— – приближенное решение для критической области (11); - - - – приближенное решение (6)

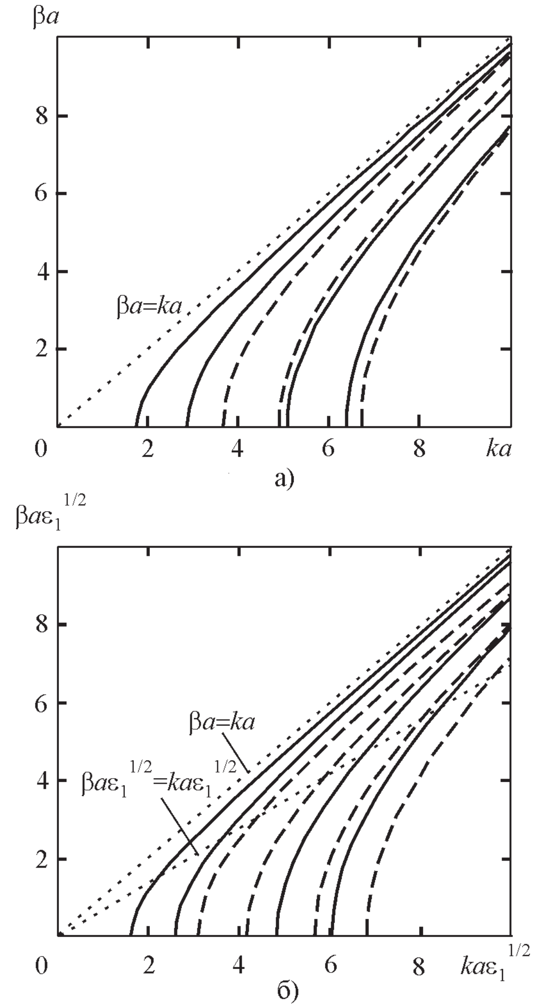

Рис. 6. *Диаграммы Бриллюэна двухслойного диэлектрического волновода в круглом металлическом экране*

(c, $v_д$ – скорости электромагнитной волны в вакууме и диэлектрике с проницаемостью ε соответственно) в точке, координаты которой соответствуют полному внутреннему отражению парциальной волны с индексами m, n: $ka_{mn} = (\alpha_1 a)_{mn}\left(1-\varepsilon_2/\varepsilon_1\right)^{-1/2}$.

На основе приближенных решений дисперсионного уравнения регулярного двухслойного диэлектрического волновода в металлическом экране в приближении тонкого диэлектрического слоя получены аналитические выражения для частот отсечек собственных гибридных мод. Проведен анализ характеристик распространения мод, позволяющий рассчитывать апертурные распределения в раскрывах и характеристики излучения антенн–облучателей зеркальных и линзовых антенн с малыми электрическими размерами (до $ka \sim 10 \div 15$).

Литература

1. Knop C. M., Wiesenfarth H. J. On the Radiation from an Open-Ended Corrugated Pipe Carrying the HE_{11} Mode // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1972. – Vol. 20, No. 9. – P. 644-648.
2. Clarricoats P. J. B., Olver A. D. Corrugated Horns for Microwave Antennas. – London: Peter Peregrimus Ltd, IEE, 1984. – 228 p.
3. Thomas B. Mc. Prime-Focus One- and Two-Hybrid Mode Feeds // Electron. Lett. – 1970. – Vol. 6, No. 15. – P. 460-461.
4. Granet C., Bird T. S., James G. L. Compact Multimode Horn with Low Sidelobes for Global Earth Coverage // IEEE Trans. Antennas Propag. – 2000. – Vol. 48, No. 7. – P. 1125-1133.
5. Казанцев Ю. Н., Маненков А. Б., Харлашкин О. А. Полые электрические и металлодиэлектрические волноводы для передачи быстрых H-волн // Изв. вузов. Радиофизика. – 1974. – Т. 27, №10. – С. 1529-1538.
6. Costa D. S. L. Determination of the Roots of the Characteristic Equation for Corrugated and Dielectric Loaded Circular Waveguides // IEEE Trans. Microwave Theory Techn. – 1997. – Vol. 45, No. 2. – P. 298-300.
7. Carlberg J. V., Kildal U., Kehn P.-S. A Fast Mode Analysis for Waveguides of Arbitrary Cross-Section with Multiple Regions by Using a Spectrum of two Dimension Solutions a Asymptotic Waveform Evaluation // IEEE Trans. Microwave Theory Techn. – 2004. – Vol. 52, No. 6. – P. 1615-1621.
8. Веселов Г. И., Любимов Л. А.. К теории двухслойного диэлектрического волновода в цилиндрическом экране // Радиотехника и электроника. – 1963. – Т. 8, №9. – С. 1530-1541.
9. Chou R. C., Lee S.-Wu. Modal Attenuation in Multilayered Coated Waveguides // IEEE Trans. Microwave Theory Techn. – 1988. – Vol. 36, No. 7. – P. 1165-1167.
10. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 432 с.

Наближені розв'язання дисперсійного рівняння для циліндричного хвилевода з імпедансними межами

М. М. Горобець, А. П. Удовенко

У статті надаються наближені розв'язання дисперсійного рівняння для власних мод регулярної лінії передачі з імпедансними внутрішніми межами у високо- та низькочастотному наближеннях, отримано співвідношення для критичних частот гібридних хвиль, проаналізовано дисперсійні характеристики двошарового діелектричного хвилевода у круглому металевому екрані.

Approximate Solutions of the Dispersive Equation for a Circular Waveguide with Impedance Boundaries

N. N. Gorobets and A. P. Udovenko

The approximate solutions of the dispersive equation for the eigenmodes of a regular transmission line with impedance boundaries at the high- and low-frequency approaches are given. Expressions for the cutoff frequencies of the asymmetrical hybrid waves are obtained. Dispersive characteristics of the two-layer dielectric waveguides in a circular metal shield are analized.