

## Фрактальные сверхширокополосные сигналы

О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор

*Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина  
E-mail: Leonid.F.Chernogor@univer.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 30 августа 2004 г.*

Предложен новый вид сверхширокополосных сигналов – фрактальные сверхширокополосные (ФСШП) сигналы. Описаны их численные и аналитические модели. С применением фурье- и вейвлет-анализа рассчитаны основные характеристики аналитических и численных моделей ФСШП сигналов. Обсуждаются достоинства и недостатки нового вида сигналов.

### Введение

Существующее в настоящее время разнообразие сигналов позволяет успешно решать телекоммуникационные, информационные и связанные с ними задачи. Требования к качественным показателям соответствующих устройств и систем непрерывно повышаются. Поэтому ведется поиск новых видов сигналов, обладающих большими возможностями [1-7]. Одним из таких видов сигналов являются сверхширокополосные (СШП) сигналы, которые именуются также несинусоидальными, негармоническими, нестационарными, сигналами без несущей и т. п. Первое название сейчас, по-видимому, уже стало общепринятым.

Под СШП сигналом понимают сигнал, показатель широкополосности  $\mu$  которого удовлетворяет условию  $\mu_{\min} \leq \mu < 2$ . По определению (см., например, [3]),

$$\mu = 2 \frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_{\max} + f_{\min}}, \quad (1)$$

где  $f_{\min}$ ,  $f_{\max}$  – минимальная и максимальная частоты функции спектральной плотности сигнала. В качестве  $\mu_{\min}$  обычно

выбирают значение 0.5 (см., например, [5-7]). Поскольку функция спектральной плотности (ФСП) финитного сигнала является фактически бесконечной, в настоящей работе мы будем определять величины  $f_{\min}$  и  $f_{\max}$  по уровню убывания ФСП в  $e$  раз относительно ее главного максимума, что представляется нам физичным [8]. СШП сигналы интересны тем, что они переносят объем информации в  $\mu/\mu_n \gg 1$  раз больше, чем традиционные узкополосные и широкополосные сигналы, для которых показатели широкополосности  $\mu_n \ll 1$  и  $\mu_n < \mu_{\min}$  соответственно. Обычно  $\mu_n \leq 0.01$ , а для широкополосных сигналов  $\mu = 0.01 \div 0.5$ . Эта особенность позволяет на качественно новом уровне подойти к решению различных вопросов науки и техники.

СШП сигналы уже успешно используются для дистанционного радиозондирования, в частности, снегового и ледяного покровов, подповерхностной радиолокации (георадары определяют глубины залегания разных пород, решают задачи поиска воды, повреждений подземных коммуникаций и др.), всепогодной ближней радиолокации, связи с погруженными подводными лодками и т. д. [1-4]. В работах [9, 10] обсуждаются другие применения СШП сигналов, напри-

мер, для исследования околосреднего космического пространства. Следует также отметить, что сейчас продолжают появляться все новые виды СШП сигналов. Наряду со старыми, по-видимому, уже классическими ультракороткими СШП (УКСШП) сигналами предложены прямохаотические СШП (ПХСШП) сигналы, имеющие ряд интересных свойств, которые описаны в [11]. К ним относятся, в частности, повышенная помехоустойчивость и степень засекречивания.

Другим видом нетрадиционных сигналов являются появившиеся в конце XX века фрактальные сигналы, обладающие рядом особенностей и преимуществ (см., например, [12]).

Представляется целесообразной разработка нового вида сигналов – фрактальных СШП (ФСШП) сигналов, которые могли бы соединить в себе преимущества СШП и фрактальных сигналов. Фрактальные сигналы, и в том числе ФСШП сигналы, могут дать, например, возможность детальной идентификации структуры шума и передачи информации практически при любом его уровне (см., например, [13]). Ожидается, что ФСШП сигналы будут иметь существенные преимущества по сравнению с традиционными, так что обращение к ним в настоящей работе актуально.

Целью работы являются исследование возможности и целесообразности использования фрактальных СШП сигналов, а также оценка их свойств, достоинств и недостатков.

## 1. Модели фрактальных СШП сигналов

История фракталов началась более ста лет назад, когда в математической литературе появились первые упоминания об объектах, обладающих свойствами самоподобия и дробной размерности. Однако тогда эти идеи не получили признания (см., например, [12]), и только в 70-е гг. XX века благодаря усилиям Мандельброта [14, 15] отношение к данным объектам, получившим название фракталов, изменилось коренным образом. Согласно определению, фрактал – это множество, размерность Хаусдорфа ко-

торого строго больше его топологической размерности.

Существует несколько принципиально разных определений размерности геометрического объекта (см., например, [12]). Рассмотрим три основные: топологическую размерность, фрактальную размерность, или размерность Минковского, и размерность Хаусдорфа. Определение топологической размерности  $d_T$  различных подмножеств  $R^n$  основывается на следующих свойствах. Значение  $d_T(\emptyset) = -1$ , если  $\emptyset$  – пустое множество. Значение  $d_T(E) = 0$ , если для каждого  $x \in E$  и для каждого относительно открытого множества  $U$ , содержащего  $x$ , существует такое относительно открытое множество  $V$ , что  $x \in V \subset U$  и  $\partial V \cap E = \emptyset$ , где  $\partial V$  – граница множества  $V$ . Значение  $d_T(A) = 0$ , если  $A$  – произвольное счетное множество. Значение  $d_T(R) = 1$ , если  $R$  – вещественная прямая.  $d_T(R^2) = 2$ , если  $R^2$  – плоскость, и т. д. вплоть до  $d_T(R^n) = n$ , если  $R^n$  – само рассматриваемое пространство.

Размерность Минковского  $d_M$  множества  $A$ , называемая также фрактальной или дробной размерностью, определяется соотношением (см., например, [12])

$$d_M(A) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon}, \quad (2)$$

где  $N(\epsilon)$  – минимальное число шаров радиуса  $\epsilon$ , необходимых для покрытия множества  $A$ . Например, для функции  $f(x)$ , задающей гладкую кривую  $\Gamma$ ,  $d_M(\Gamma) = 1$ , т. е. совпадает с ее топологической размерностью  $d_T$ . Размерность Минковского (2) может служить аналогом размерности Хаусдорфа, удобным для использования в прикладных задачах. Эти размерности, как правило, совпадают, но алгоритм определения размерности Минковского гораздо эффективнее [12]. Здесь под эффективностью понимается возможность достаточно точного определения размерности при минимизации вычислительных затрат. Именно размерность Минковского будет использоваться далее в настоящей работе. Еще од-

ним преимуществом размерности Минковского перед размерностью Хаусдорфа  $d_H$  является то, что для любого счетного множества  $d_H = 0$ , и это делает ее неприменимой для численного моделирования фракталов [12, 18], поскольку при этом используются конечные числовые множества.

При оценке  $d_M$  заданного численно фрактала  $A$  будем применять клеточный метод (см., например, [12, 18]). Суть его состоит в том, что область, содержащая фрактал  $A$ , в одномерном случае разбивается на интервалы длины  $\epsilon$  и подсчитывается число интервалов  $N(\epsilon)$ , необходимое для покрытия фрактала  $A$ . Так делается несколько раз для разных величин  $\epsilon$ , после чего полученные значения подставляются в соотношение

$$\log N(\epsilon) = \log \text{const} - d_M \log \epsilon$$

и с помощью метода наименьших квадратов получается, строго говоря, оценка  $d_M$  фрактала  $A$ , которая является достаточно точной (один-два знака после запятой) и пригодной для практических целей.

Под размерностью функции  $f(t)$  будем понимать размерность Минковского области значений данной функции.

Следует отметить, что в более поздних работах (см., например, [19]) создатель теории фракталов Мандельброт отказался от непрерывного требования самоподобия фракталов, заменив его более общим требованием их самоаффинности. Под самоаффинным понимают фрактал, для которого при переходе от одного масштаба к другому сжатие или растяжение происходит не в одинаковом отношении, как в случае самоподобного фрактала, а по-разному в разных направлениях, т. е. выполняется условие

$$f(t) = \xi^{-1/2} f(\xi t),$$

где  $\xi > 0$  – произвольный коэффициент.

Под ФСШП сигналом здесь и далее будем понимать СШП сигнал, обладающий свойством самоаффинности и дробной размерностью.

В настоящей работе рассмотрим самоподобные ФСШП сигналы. В качестве их размерности, как отмечалось выше, будем использовать размерность Минковского  $d_M$ . К моделям  $s(t)$  ФСШП сигналов во временной области и функциям спектральной плотности  $S(f)$  предъявляются следующие требования:

$$1) \int_{\tau} s(t) dt = 0 \text{ или } \left. \frac{dS}{df} \right|_{f=0} = 0, \text{ где } \tau - \text{длин-}$$

тельность сигнала;

$$2) s(0) = s(\tau) = 0;$$

$$3) s(t) - \text{непрерывна для } t \in \mathbf{R};$$

4)  $d_M[s(t)] \notin \mathbf{Z}$ , где  $\mathbf{Z}$  – множество целых чисел;

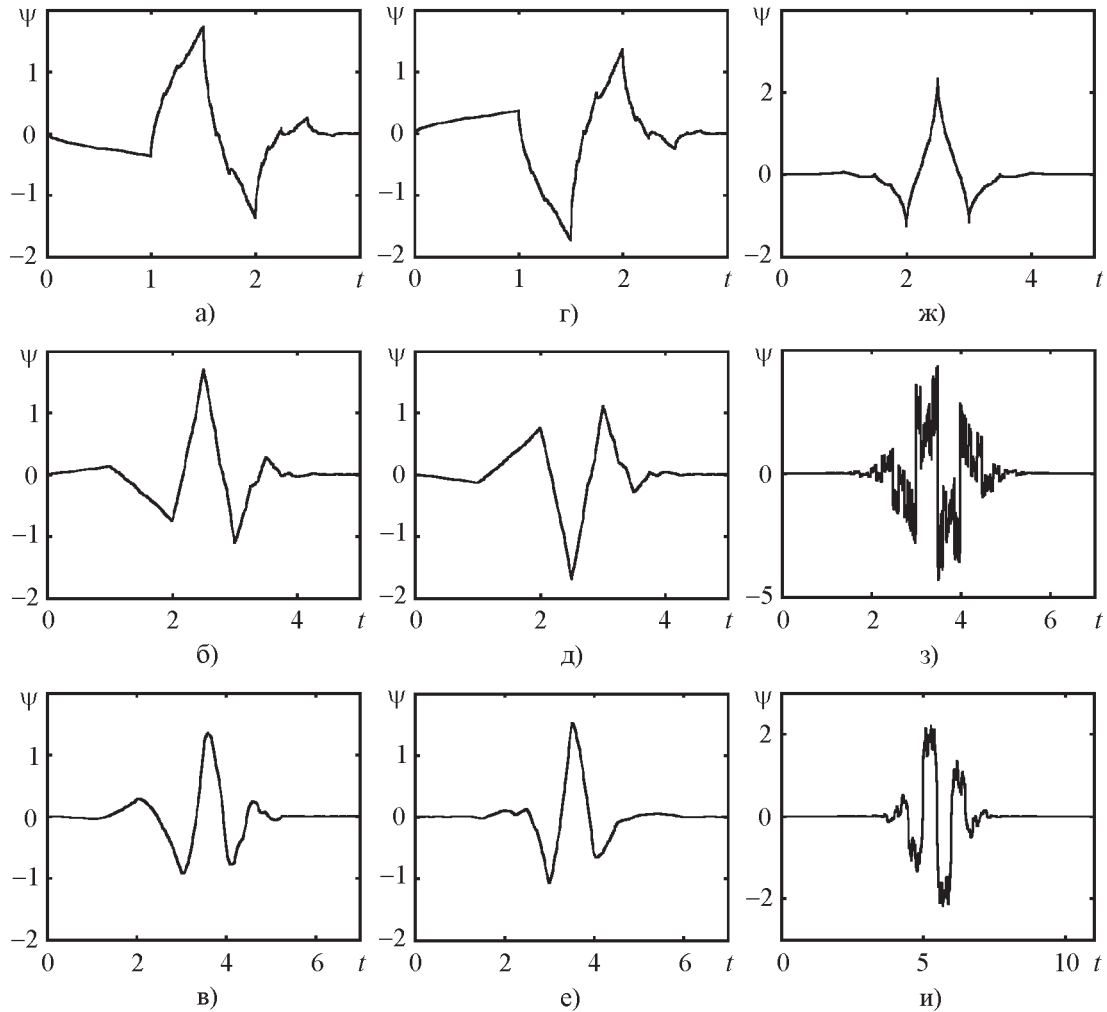
$$5) s(t) - \text{самоаффинна при } t \in [0, \tau].$$

**Алгоритм получения.** Наиболее удачные модели фрактальных СШП сигналов с практической точки зрения описываются некоторыми вейвлетобразующими функциями (см., например, [20-25]), многие из которых являются СШП сигналами [26, 27]. К ним относятся, в частности, вейвлеты Добеши, Симлета, койфлеты, биортогональные вейвлеты.

Для удобства далее в работе будем использовать обозначения указанных вейвлетов, применяемые в пакете расширения Wavelet Toolbox 2.X, входящем в состав одной из лучших на сегодняшний день систем компьютерной математики MatLab 6.X [20, 28]. Эти обозначения таковы. Вейвлеты Добеши 2, 3, 4-го порядка записываем соответственно как db2, db3, db4; вейвлеты Симлета 2, 3, 4-го порядка – sym2, sym3, sym4; койфлет 1-го порядка – coif1, биортогональные вейвлеты – bior3.3, bior 3.5.

Вид вейвлетобразующих функций данных вейвлетов во временной области приведен на рис. 1.

Основными особенностями предлагаемых моделей является то, что все они, во-первых, имеют фрактальную структуру, во-вторых, являются СШП сигналами. Однако они не имеют аналитического выражения и могут быть построены лишь с помощью итерационных алгоритмов численными методами (см., например, [20]). Поэтому представляется целесообразным поиск простых аналитических моделей ФСШП сигналов



**Рис. 1.** Численные модели ФСШП сигналов (вейвлетобразующие функции) во временной области: а) – db2, б) – db3, в) – db4, г) – sym2, д) – sym3, е) – sym4, ж) – coif1, з) – bior3.3, и) – bior3.5

**Аналитические модели.** В 1872 г. Вейерштрассом была предложена следующая всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция, получившая впоследствии название функции Вейерштрасса (см., например, [18]):

$$\sigma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos(\beta^n t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta > 0. \quad (3)$$

Позднее Харди установил, что для величин  $\alpha$  и  $\beta$  должно выполняться соотношение  $\alpha\beta > 1$  (см., например, [18]).

С помощью функции Вейерштрасса, задаваемой соотношением (3), удобно сконструировать такую модель ФСШП сигнала (здесь и далее сокращение  $FUWB_k(t)$  (fractal ultra-wideband signal) означает аналитическую модель ФСШП сигнала во временной области, нижний индекс соответствует порядковому номеру модели):

$$FUWB_1(t) = \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos(3\beta^n (2t - 1)) \right) \times \text{sign}(2t - 1)\Theta(t),$$

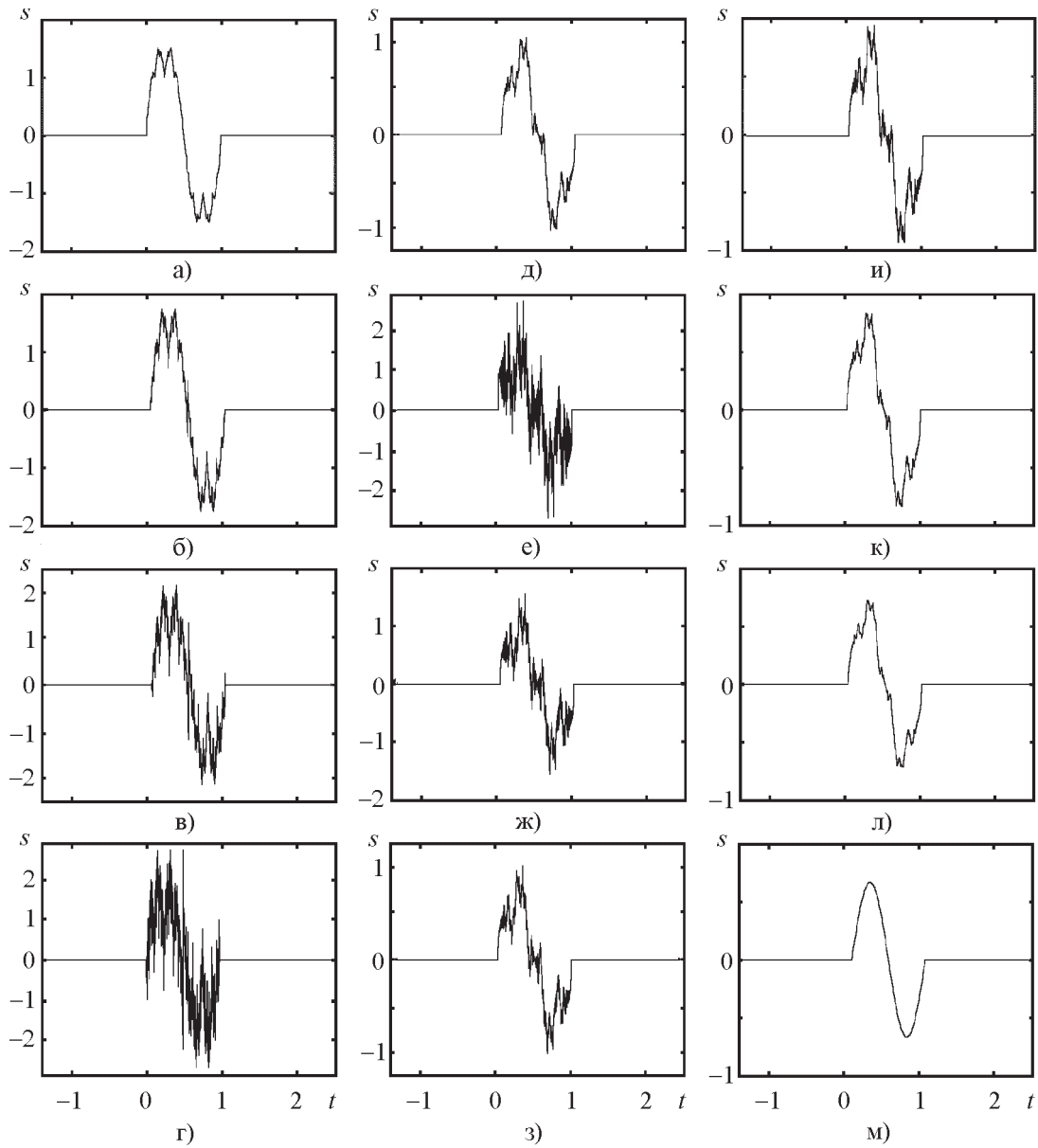
где

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t = 0; \\ -1, & t < 0; \end{cases}$$

$$\Theta(t) = \eta(t) - \eta(t-1);$$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Вид модели  $FUWB_1(t)$  для разных  $\alpha$  и  $\beta$  показан на рис. 2, а-м. Здесь величина  $\alpha$  ока-



**Рис. 2.** Аналитические модели во временной области ФСШП сигналов: а) –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 2$ ; б) –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = 2$ ; в) –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.7$ ,  $\beta = 2$ ; г) –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 2$ ; д) –  $FUWB_2(t)$ ; е) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.5$ ; ж) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.7$ ; з) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.8$ ; и) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.9$ ; к) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 1.1$ ; л) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 1.3$ ; и нефрактального СШП сигнала: м) –  $UWB_1(t)$ ,  $N = 2$

зывается равной размерности Минковского данного сигнала  $d_M = \alpha$ , причем  $0 < \alpha < 1$ .

Вторая модель ФСШП сигнала основывается на почти нигде не дифференцируемой функции Римана (см., например, [18]):

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin(\pi n^2 t).$$

Она задается выражением

$$FUWB_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin(2\pi n^2 t) \Theta(t)$$

и имеет вид, приведенный на рис. 2, д.

Третья модель СШП сигнала определяется с помощью комплекснозначной функции Римана–Вейерштрасса (см., например, [18]):

$$W_{\beta}(t) = \frac{2}{\pi^{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\beta} \exp(i\pi n^2 t), \quad \beta > 0.5.$$

и может быть записана следующим образом:

$$FUWB_3(t) = \frac{2}{\pi^{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\beta} \sin(2\pi n^2 t) \Theta(t).$$

Вид  $FUWB_3(t)$  во временной области для разных  $\beta$  приведен на рис. 2, е-л.

Для сравнения разработанных моделей ФСШП сигналов с описанными в [8] моделями нефрактальных СШП сигналов выберем из последних, например, следующую модель:

$$UWB_1(t) = (-1)^n \sin(2\pi n t) \Theta(t),$$

вид которой приведен на рис. 2, м. Здесь  $N = 2n$ ,  $N$  – количество лепестков СШП сигнала. Обозначение модели СШП сигнала введено по аналогии с обозначениями моделей ФСШП сигналов.

**Числовые характеристики.** Для описания моделей ФСШП сигналов во временной  $s(t)$  и в частотной

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (4)$$

областях представляется целесообразным использование не только таких традиционных для СШП сигналов параметров, как показатель широкополосности  $\mu$ , определяемый выражением (1), и средняя частота ФСП  $f_0$ , равная

$$f_0 = \frac{f_{\min} + f_{\max}}{2}, \quad (5)$$

но и следующих числовых характеристик, часть из которых применялась в [29-32] для описания свойств оконных функций преобразования Фурье:

– *Относительное положение максимума ФСП.* Вместо частоты главного максимума ФСП  $f_m$  представляется удобным использовать безразмерный параметр  $\gamma_1 = f_m / f_0$ .

– *Относительное положение первого нуля ФСП.* Минимальное значение  $\nu \neq 0$  частоты  $f$ , при котором  $S(\nu) = 0$ , называется частотой первого нуля. На практике ее удобно характеризовать параметром  $\gamma_2 = \nu / f_0$ .

– *Ширина ФСП по уровню 3 дБ.* Этот параметр представляет собой уровневый показатель широкополосности, что следует из сравнения с (1) и (5):

$$\gamma_3 = \frac{f_{\max 3} - f_{\min 3}}{f_0},$$

в котором максимальная и минимальная частоты  $f_{\min 3}$  и  $f_{\max 3}$  вычисляются из условия:

$$10 \lg \left| \frac{S(f)}{S(f_m)} \right|^2 = 3,$$

иначе говоря, по уровню  $S(f) \approx 0.707S(f_m)$ .

– *Ширина  $\gamma_4$  ФСП по уровню 6 дБ.* Определяется аналогично  $\gamma_3$ .

– *Потери информации (в дБ).* Наблюдаются при отбрасывании в ФСП участка с частотами  $f \notin [0, \tilde{\nu}]$ , где  $\tilde{\nu}$  – первый нуль ФСП правее ее главного максимума  $f_m$ . Для сигнала  $s(t)$  имеем:

$$\gamma_5 = 10 \lg \left( 1 - \frac{\int_0^{\tilde{\nu}} S(f) df}{\int_0^{\infty} S(f) df} \right).$$

– *Потери информации (в дБ).* Наблюдаются при отбрасывании в ФСП участка с частотами  $f \notin [f_{\min}, f_{\max}]$ , где  $f_{\min}$  и  $f_{\max}$  были введены выше. Для  $s(t)$  имеем:

$$\gamma_6 = 10 \lg \left( 1 - \frac{\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} S(f) df}{\int_0^{\infty} S(f) df} \right).$$

– *Когерентное усиление.* Для  $s(t)$  зададим его соотношением:

$$\gamma_7 = \frac{\tau}{\int_{-\tau/2}^{\tau/2} |s(t)| dt}, \quad (6)$$

где  $\tau$  – интервал, на котором функция  $s(t)$  не равна нулю. В отличие от выражения для частотных окон [29-32], для СШП сигналов в знаменателе выражения (6), как и для следующего параметра  $\gamma_8$ , используется интегрирование не самой функции, а ее модуля, поскольку интеграл от функции  $s(t)$  (в силу наличия рассмотренного выше свойства о нулевом среднем для СШП сигналов) оказывается равным нулю.

– *Эквивалентная шумовая полоса.* Этот параметр для функции  $s(t)$  определяется соотношением:

$$\gamma_8 = \frac{\tau \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s^2(t) dt}{\left[ \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |s(t)| dt \right]^2}.$$

– *Максимальный уровень боковых лепестков (в дБ).* Пусть  $f_{m1}, f_{m2}, \dots, f_{mk}$  – частоты локальных максимумов ФСП, отличные от частоты главного максимума  $f_m$ . Тогда для функции  $s(t)$ :

$$\gamma_9 = 10 \lg \max_k \left| \frac{S(f_{mk})}{S(f_m)} \right|.$$

Важным числовым параметром для описания моделей ФСШП сигналов является также, как было указано выше, размерность Минковского  $d_M$ .

Для численных и аналитических моделей ФСШП сигналов указанные числовые характеристики приведены в табл. 1-3.

## 2. Фурье-спектр ФСШП сигналов

Рассмотрим функцию спектральной плотности сигнала преобразования Фурье  $S(f)$ , задаваемую соотношением (4). На рис. 3 и 4 приведен вид  $S(f)$  для разных численных и аналитических моделей ФСШП сигналов.

Из анализа полученных результатов можно увидеть следующее. По мере роста размерности сигнала  $d_M$  уровень боковых лепестков ФСП сигнала также возрастает. Однако значительных изменений показателя широкополосности сигнала  $\mu$  при этом не происходит. Это объясняется тем, что относительная ширина главного максимума ФСП почти не меняется, так как  $f_{\min}$  и  $f_{\max}$  определяются, как указа-

Таблица 1. Параметры численных моделей ФСШП сигналов

Параметры	Модели ФСШП сигналов									
	db2	db3	db4	sym2	sym3	sym4	coif1	bior3.3	bior3.5	$UWB_1$
$\mu$	1.31	1.19	1.11	1.30	1.19	1.11	1.29	1.61	0.78	1.58
$\gamma_1$	0.92	0.92	0.92	0.91	0.92	0.92	0.92	0.34	1.06	0.89
$\gamma_2$	2.44	2.45	2.46	2.43	2.45	2.46	2.44	0.68	2.12	2.23
$\gamma_3$	0.77	0.71	0.68	0.77	0.72	0.69	0.78	0.16	0.46	1.00
$\gamma_4$	1.10	1.01	0.95	1.10	1.00	0.95	1.1	1.54	0.65	1.35
$-\gamma_5$ , дБ	4.49	7.28	9.60	4.49	7.26	9.60	4.71	0.82	3.90	8.29
$-\gamma_6$ , дБ	4.10	6.19	8.13	4.10	6.19	8.13	4	1.72	3.28	7.66
$\gamma_7$	2.56	3.80	4.81	2.56	3.80	5.41	4.38	1.93	3.91	15.69
$\gamma_8$	2.19	2.89	3.31	2.19	2.89	4.17	3.84	4.14	5.35	12.32
$-\gamma_9$ , дБ	7.55	9.04	10.62	7.55	9.04	10.62	7.45	2.16	5.12	9.12
$d_M$	0.8	0.7	0.8	0.8	0.7	0.6	0.7	0.8	0.7	1.0

Таблица 2. Параметры аналитических моделей ФСШП сигналов (модели  $FUWB_1$ ,  $FUWB_2$ ) и нефрактального СШП сигнала (модель  $UWB_1$ )

Параметры	Модели ФСШП сигналов						
	$FUWB_1$					$FUWB_2$	$UWB_1$
	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$		
$\mu$	1.55	1.56	1.56	1.56	1.56	1.56	1.58
$\gamma_1$	0.86	0.86	0.85	0.85	0.85	0.84	0.89
$\gamma_2$	6.02	6.85	6.84	6.81	11.90	8.40	2.23
$\gamma_3$	0.98	0.98	0.99	0.98	0.98	0.97	1.00
$\gamma_4$	1.34	1.34	1.35	1.34	1.34	1.35	1.35
$-\gamma_5$ , дБ	5.47	3.52	2.01	1.16	0.77	5.39	8.29
$-\gamma_6$ , дБ	3.78	2.44	1.38	0.78	0.37	3.23	7.66
$\gamma_7$	3.94	3.83	3.66	3.38	2.67	6.34	15.69
$\gamma_8$	4.62	4.80	5.03	5.38	5.72	5.31	12.32
$-\gamma_9$ , дБ	8.12	8.01	7.74	7.31	6.78	6.33	9.12
$d_M$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.7	1.0

но выше, по уровню убывания ФСП в  $e$  раз относительно максимального значения, а все изменения, связанные с ростом  $d_M$ , происходят ниже этого уровня. Когда последующие лепестки ФСП (второй, а иногда и третий) достигают этого уровня,  $\mu$  меняется скачкообразно, поскольку значение  $f_{\max}$  оказывается не в первом, а

в одном из последующих лепестков. Так происходит для моделей  $FUWB_3$  при  $\beta = 0.5 \div 0.7$  (рис. 4, е, ж) и bior3.3 (рис. 3, з). Поэтому коэффициент корреляции между  $\mu$  и  $d_M$  для полученных результатов (табл. 1-3) оказался небольшим ( $k \approx 0.14$ ). Здесь и далее в работе коэффициент корреляции величин  $x_i$  и  $y_i$  ( $i = 1, n$ ) тради-



**Таблица 3.** Параметры аналитических моделей ФСШП сигналов (модель  $FUWB_3$ )

Параметры	Модели ФСШП сигналов						
	$FUWB_3$						
	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.6$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.8$	$\beta = 0.9$	$\beta = 1.1$	$\beta = 1.3$
$\mu$	1.84	1.83	1.56	1.56	1.56	1.56	1.56
$\gamma_1$	0.33	0.34	0.86	0.85	0.85	0.84	0.83
$\gamma_2$	0.99	3.04	2.87	3.41	3.10	3.35	3.59
$\gamma_3$	0.36	0.37	0.97	0.97	0.97	0.98	0.98
$\gamma_4$	0.50	0.52	1.34	1.34	1.35	1.35	1.35
$-\gamma_5$ , дБ	0.90	2.04	1.77	2.35	2.95	4.27	5.56
$-\gamma_6$ , дБ	1.31	1.80	1.67	2.17	2.70	3.74	4.67
$\gamma_7$	4.76	5.71	6.68	7.71	8.81	11.20	14.14
$\gamma_8$	5.68	5.55	5.46	5.42	5.39	5.23	5.14
$-\gamma_9$ , дБ	3.49	4.06	4.65	5.24	5.84	6.85	7.88
$d_M$	0.8	0.7	0.7	0.6	0.6	0.6	0.6

ционно (см., например, [33]) определяется из соотношения

$$k = \frac{1}{n\sigma_x\sigma_y} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y),$$

где  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  – математические ожидания;  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  – среднеквадратичные отклонения величин  $x_i$  и  $y_i$  ( $i = 1, n$ ) соответственно.

Значительная отрицательная корреляция обнаружена между шириной ФСП по уровню 3 дБ  $\gamma_3$  и  $d_M$  ( $k \approx -0.17$ ). Это означает, что искажение главного лепестка ФСП с ростом  $d_M$  происходит непропорционально: в нижней части ФСП уширяется, а в верхней, наоборот – сужается. Вероятно, это объясняется перекачкой энергии из главного лепестка ФСП в последующие. Имеется также некоторая зависимость между относительным положением главного максимума ФСП  $\gamma_1$  и  $d_M$  ( $k \approx -0.19$ ). Это связано с небольшим увеличением асимметрии главного лепестка ФСП при возрастании  $d_M$ . Наибольшая корреляционная зависимость ( $k \approx 0.46$ ) обнаружена между  $d_M$  и эквивалентной шумовой полосой сигнала

ла  $\gamma_8$ . В то же время между остальными числовыми характеристиками ФСШП сигнала и  $d_M$  корреляционной зависимости не выявлено ( $|k| < 0.1$ ).

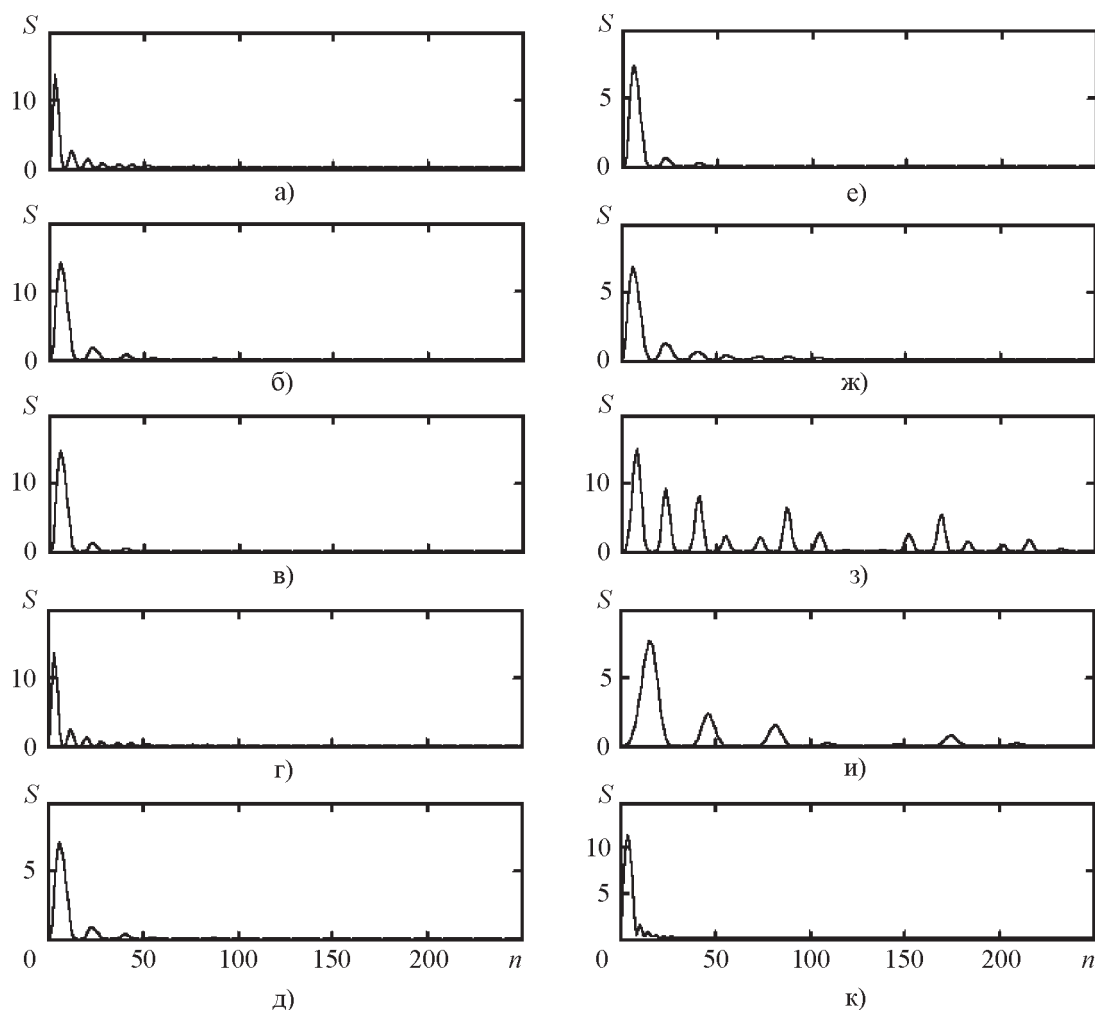
### 3. Вейвлет-спектр ФСШП сигналов

Вейвлет-спектр любого сигнала  $[W_\psi s](a, b)$ , в том числе и модельного ФСШП сигнала, определяется как самой моделью сигнала  $s(t)$ , так и используемым для разложения вейвлетным базисом, а значит, вейвлетобразующей функцией  $\psi(t)$ , порождающей этот базис (см., например, [20, 22, 24, 25]). Соответствующее выражение для прямого непрерывного вейвлет-преобразования имеет вид:

$$[W_\psi s](a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \tilde{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

где  $a$  – параметр масштабирования,  $b$  – параметр сдвига,  $\tilde{\psi}(t)$  – функция комплексно сопряженная к  $\psi(t)$ .

Один и тот же сигнал выглядит по-разному в разных базисах. Это иллюстрирует рис. 5, на котором в качестве примеров по-



**Рис. 3.** Фурье-спектры во временной области численных моделей ФСШП сигналов: а) – db2, б) – db3, в) – db4, г) – sym2, д) – sym3, е) – sym4, ж) – coif1, з) – bior3.3, и) – bior3.5, и нефрактального СШП сигнала: к) –  $UWB_1(t)$ ,  $N = 2$

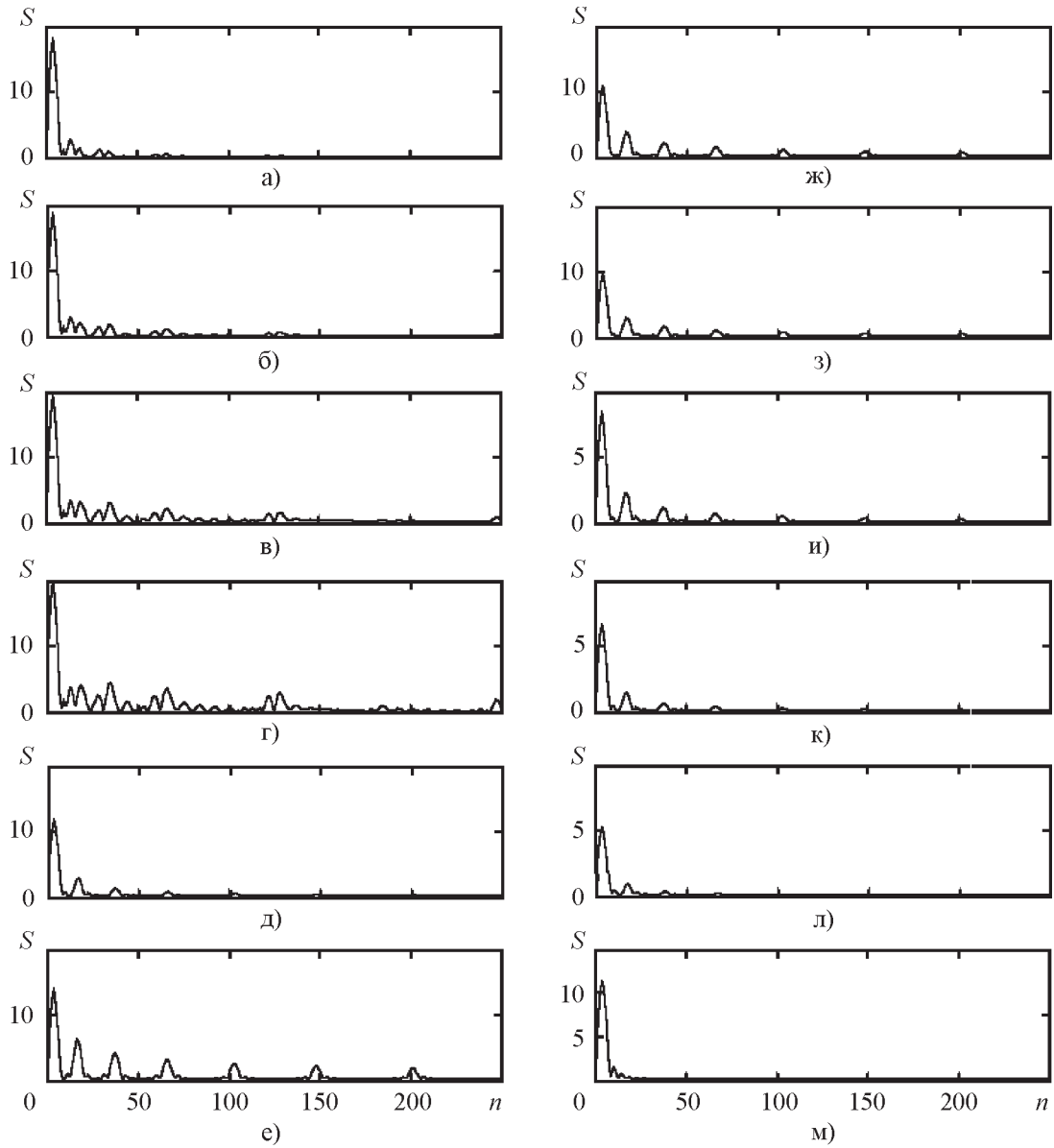
казаны непрерывные вейвлет-спектры модели  $FUWB_1$  при  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = 2$ , полученные для вейвлетов db2, coif1, bior 3.5. Как и следовало ожидать, непрерывные вейвлет-спектры ФСШП сигналов носят фрактальный характер. Картина вейвлет-спектра, полученная при больших значениях  $a$ , повторяется многократно при меньших значениях  $a$ . Характерной особенностью таких спектров является наличие в них линий, разветвляющихся в сторону меньших значений параметра масштабирования  $a$ . По мере увеличения  $d_M$  это разветвление усиливается. Количество разветвляющихся линий увеличивается также по мере возрастания

количества лепестков анализирующего вейвлета.

Вместе с тем непрерывное вейвлет-преобразование не очень удобно для количественного описания исследуемого сигнала, поскольку обратное преобразование, задаваемое выражением:

$$s(t) = C_\Psi^{-1} \iint [W_\Psi s](a, b) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^{5/2}},$$

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty,$$

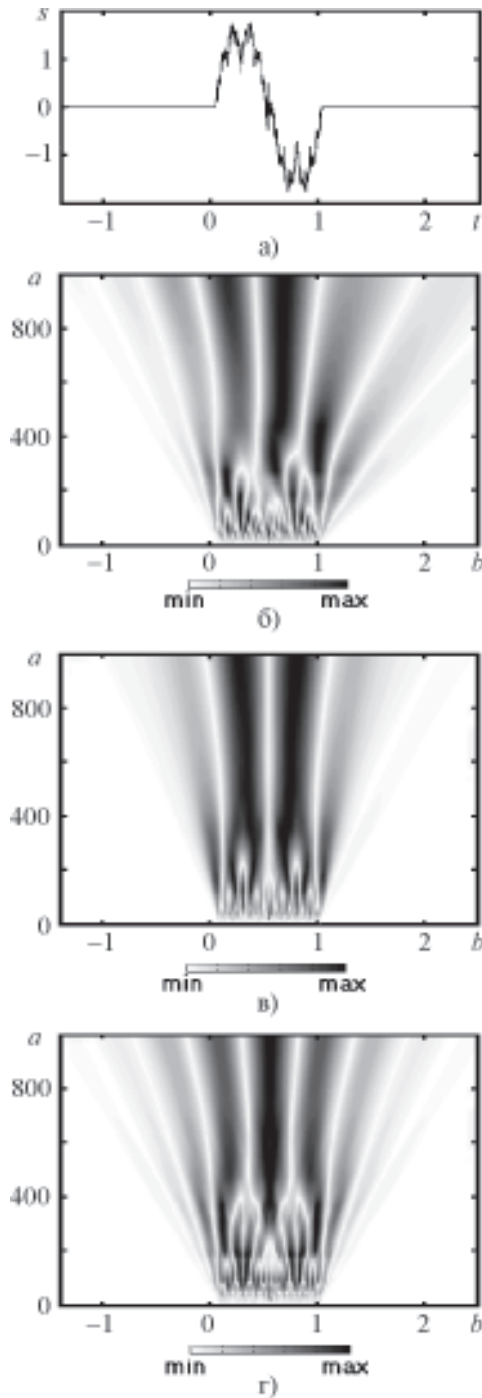


**Рис. 4.** Фурье-спектры во временной области аналитических моделей ФСШП сигналов: а) –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 2$ ; б) –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = 2$ ; в) –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.7$ ,  $\beta = 2$ ; г) –  $FUWB_1(t)$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 2$ ; д) –  $FUWB_2(t)$ ; е) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.5$ ; ж) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.7$ ; з) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.8$ ; и) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 0.9$ ; к) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 1.1$ ; л) –  $FUWB_3(t)$ ,  $\beta = 1.3$ ; и нефрактального СШП сигнала: м) –  $UWB_1(t)$ ,  $N = 2$

существует лишь для небольшого числа вейвлетов. Однако и для них оно сопряжено со значительными вычислительными трудностями (см., например, [20]). Поэтому на практике, когда возникает необходимость точного восстановления сигнала (при очистке от шумов, сжатии и т. п.), применяют диадное вейвлет-преобразова-

ние с использованием пирамидального алгоритма Малла или лифтинговой схемы, а также методов быстрого вейвлет-преобразования (см., например, [20]).

В рамках диадного вейвлет-преобразования в общем случае реконструкция сигнала на  $n$ -м уровне разрешения  $j_n$  задается выражением:



**Рис 5.** Непрерывные вейвлет-спектры модели ФСШП сигнала  $FUWB_1(t)$  при  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = 2$  (а), полученные при разложении по базисам следующих вейвлетов: б) – *db2*, в) – *coif1*, з) – *bior.3.5*

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j_n,k} \varphi_{j_n,k}(t) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (7)$$

где  $a_{j_n,k}$  и  $d_{j,k}$  – аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты на  $n$ -м уровне разложения соответственно. Они определяются соотношениями:

$$a_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi_{j,k}(t) dt, \quad d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{j,k}(t) dt.$$

Здесь  $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ ,  $\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi(t)$  – масштабированная функция. В отличие от функции  $\psi(t)$ , определяющей тонкую структуру анализируемого сигнала, функция  $\varphi(t)$  отвечает за его грубую аппроксимацию (см., например, [20, 22, 24]).

Оптимальность разложения сигнала  $s(t)$  по заданному базису вейвлетов удобно описывать количественно с помощью энтропии, т. е. концентрации числа вейвлет-коэффициентов, требующихся для описания сигнала с некоторой заданной точностью. Под энтропией, как обычно (см., например, [20]), понимается величина

$$M = \exp\left(-\sum_n p_n \ln p_n\right), \quad p_n = \frac{|s_n|^2}{\|s\|^2}, \quad (8)$$

где  $s = s(t)$  – анализируемый сигнал,  $s_n$  – восстановленный сигнал на  $n$ -м уровне разложения. Разложение сигнала будем считать тем удачнее, чем более узким оказывается вейвлет-спектр сигнала вдоль оси параметра масштабирования  $a$  и, следовательно, чем меньше число членов в разложении (7), дающих существенный вклад.

В большинстве случаев на практике оказывается, что детализирующие коэффициенты вносят в восстановленный сигнал гораздо больший вклад, чем аппроксимирующие (см., например, [21]). Поэтому при

подстановке выражения (7) в (8) первым слагаемым в (7), описывающим аппроксимирующую часть разложения сигнала, можно пренебречь. Тогда выражение для энтропии  $M$  принимает вид:

$$M = \exp\left(-\sum_{j,k} |d_{j,k}|^2 \ln |d_{j,k}|^2\right), \quad (9)$$

который отражает число существенных членов разложения (7). Минимальное значение  $M = 1$  соответствует оптимальному (наиболее удачному) для данного сигнала вейвлетному базису.

Для предложенных нами выше аналитических и численных моделей ФСШП сигналов проведено разложение каждой модели по базисам различных вейвлетов с помощью диадного преобразования и оценена оптимальность такого разложения посредством энтропии  $M$ , задаваемой выражением (9). Результаты расчетов помещены в табл. 4, 5. Для сравнения в табл. 5 приведена оценка энтропии  $M$  для разложения по тем же вейвлетным базисам нефрактального СШП сигнала  $UWB_1$ . Из анализа полученных данных следует, что наиболее целесообразными для представления имеющихся моделей ФСШП сигналов оказываются вейвлеты db5 и особенно db9. Казалось бы, биортогональные вейвлеты bio3.3 и bio3.5 дают еще лучшие результаты, но это не так, поскольку, в отличие от остальных использованных вейвлетов, восстановление сигнала, разложенного по биортогональным вейвлетам, происходит с помощью обратных биортогональных вейвлетов gbio3.3 и gbio3.5, а для них величина  $M$  оказывается существенно больше.

При возрастании размерности ФСШП сигнала  $d_M$  наблюдается тенденция сужения его вейвлет-спектра, что и показывает вычисленный коэффициент корреляции ( $k \approx -0.3$ ). Это объясняется тем, что при возрастании  $d_M$  увеличивается изрезан-

ность функции  $s(t)$  (см. рис. 1, 2). В то же время вейвлет-преобразование, в отличие от преобразования Фурье, хорошо представляющего достаточно гладкие и желательные неограниченные во временной области функции, как раз и предназначено для финитных быстро меняющихся функций, поскольку сами вейвлеты в большинстве своем являются именно такими. Полученная закономерность подтверждается также при сравнении результатов, вычисленных с помощью моделей ФСШП сигналов и модели  $UWB_1$  нефрактального СШП сигнала. Вейвлет-спектры всех фрактальных моделей оказываются более локализованными вдоль оси параметра масштабирования  $a$  (см. табл. 4, 5), поскольку сигнал  $UWB_1$ , хотя и является финитным, но представляет собой почти везде гладкую функцию. Энтропия  $M$  при разложении по различным вейвлетным базисам для модели  $UWB_1$  оказывается в  $1.5 \div 2$  раза больше, чем для ФСШП сигналов.

#### 4. Задача восстановления ФСШП сигналов

Как уже говорилось выше, дискретное вейвлет-преобразование позволяет не только разложить сигнал по системе базисных функций, построенных с помощью выбранного вейвлета, но и восстановить разложенный сигнал в случае, если указанная система является ортогональной или биортогональной.

Зададимся целью проследить, как зависит форма восстановленного сигнала от количества взятых членов дискретного вейвлет-преобразования. Для предотвращения терминологической путаницы отметим, что здесь и далее в работе под восстановлением сигнала мы будем понимать процесс обратного вейвлет-преобразования вейвлет-спектра модельного СШП сигнала в отсутствие помехи. Чтобы количественно определить меру схожести восстановленного сигнала  $s(t)$  и исходного сигнала  $s_0(t)$ , введем следующие критерии:

**Таблица 4.** Энтропия  $M$  аналитических моделей ФСШП сигналов, разложенных с помощью дискретного вейвлет-преобразования по базисам вейвлетов Хаара, Добеши, Симлета, койфлетов, биортонгальных вейвлетов и дискретного вейвлета Мейера

Вейвлеты	Модели ФСШП сигналов							
	$FUWB_1$			$FUWB_2$	$FUWB_3$			
	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.9$		$\beta = 0.5$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.9$	$\beta = 1.2$
haar (db1)	1.016	1.011	1.004	1.067	1.022	1.071	1.202	2.010
db2	1.016	1.010	1.004	1.061	1.021	1.071	1.202	2.010
db3	1.016	1.011	1.004	1.064	1.022	1.074	1.211	2.068
db4	1.011	1.008	1.003	1.046	1.017	1.054	1.149	1.682
db5	1.005	1.004	1.002	1.021	1.009	1.026	1.065	1.225
db6	1.007	1.005	1.002	1.029	1.012	1.035	1.091	1.381
db7	1.009	1.006	1.003	1.035	1.014	1.042	1.113	1.485
db8	1.005	1.004	1.002	1.020	1.009	1.026	1.064	1.248
db9	1.004	1.003	1.002	1.015	1.007	1.019	1.046	1.171
db10	1.004	1.003	1.002	1.017	1.008	1.021	1.052	1.194
sym2	1.015	1.010	1.004	1.061	1.021	1.071	1.202	2.010
sym3	1.016	1.011	1.004	1.064	1.022	1.074	1.211	2.068
sym4	1.015	1.010	1.004	1.062	1.021	1.072	1.205	2.026
sym5	1.016	1.011	1.004	1.065	1.022	1.075	1.216	2.102
sym6	1.015	1.010	1.004	1.062	1.021	1.071	1.203	2.017
sym7	1.012	1.008	1.003	1.048	1.017	1.056	1.156	1.729
sym8	1.012	1.010	1.004	1.061	1.021	1.071	1.203	2.011
coif1	1.016	1.011	1.004	1.066	1.022	1.076	1.219	2.121
coif2	1.015	1.010	1.004	1.061	1.021	1.070	1.200	1.994
coif3	1.014	1.010	1.003	1.056	1.020	1.065	1.184	1.896
coif4	1.010	1.008	1.003	1.042	1.016	1.051	1.136	1.603
coif5	1.010	1.007	1.003	1.039	1.015	1.047	1.126	1.548
bior3.1	1.001	1.001	1.000	1.001	1.000	1.001	1.001	1.004
bior3.3	1.001	1.001	1.001	1.002	1.001	1.003	1.006	1.022
bior3.5	1.001	1.001	1.001	1.003	1.002	1.004	1.009	1.031
rbio3.1	1.011	1.007	1.002	1.036	1.011	1.040	1.114	1.504
rbio3.3	1.095	1.039	1.004	1.382	1.068	1.399	2.732	40.51
rbio3.5	1.129	1.051	1.005	1.623	1.095	1.634	4.465	245.7
dmey	1.014	1.010	1.003	1.058	1.020	1.066	1.189	1.924

**Таблица 5.** Энтропия  $M$  численных моделей ФСШП сигналов и модели СШП сигнала  $UWB_1$ , разложенных с помощью дискретного вейвлет-преобразования по базисам вейвлетов Хаара, Добеши, Симлента, койфлетов, биортогональных вейвлетов и дискретного вейвлета Мейера

Вейвлеты	Модели ФСШП сигналов							
	db2	db3	db4	coif1	bior3.3	bior3.5	sym4	$UWB_1$
haar (db1)	1.004	1.008	1.008	1.008	1.002	1.010	1.008	1.269
db2	1.003	1.007	1.007	1.007	1.002	1.011	1.007	1.266
db3	1.003	1.005	1.007	1.006	1.002	1.011	1.006	1.267
db4	1.003	1.006	1.005	1.006	1.002	1.010	1.006	1.245
db5	1.002	1.006	1.006	1.006	1.002	1.010	1.006	1.197
db6	1.002	1.004	1.006	1.004	1.001	1.010	1.006	1.206
db7	1.002	1.004	1.004	1.004	1.002	1.010	1.004	1.230
db8	1.002	1.004	1.004	1.004	1.001	1.010	1.004	1.132
db9	1.002	1.005	1.004	1.005	1.001	1.005	1.004	1.096
db10	1.002	1.004	1.005	1.004	1.001	1.007	1.004	1.119
sym2	1.003	1.007	1.007	1.007	1.002	1.011	1.007	1.266
sym3	1.003	1.005	1.007	1.006	1.002	1.011	1.006	1.267
sym4	1.004	1.006	1.006	1.006	1.002	1.010	1.005	1.267
sym5	1.003	1.007	1.007	1.007	1.002	1.011	1.007	1.267
sym6	1.004	1.006	1.006	1.006	1.002	1.010	1.005	1.266
sym7	1.003	1.007	1.006	1.006	1.002	1.010	1.007	1.260
sym8	1.003	1.006	1.006	1.006	1.002	1.010	1.006	1.266
coif1	1.004	1.006	1.007	1.005	1.002	1.011	1.006	1.267
coif2	1.002	1.006	1.006	1.006	1.002	1.010	1.006	1.265
coif3	1.002	1.004	1.006	1.005	1.002	1.010	1.006	1.263
coif4	1.002	1.004	1.006	1.004	1.002	1.010	1.005	1.238
coif5	1.002	1.004	1.004	1.004	1.002	1.010	1.004	1.230
bior3.1	1.000	1.002	1.000	1.003	1.000	1.000	1.001	1.000
bior3.3	1.001	1.003	1.002	1.004	1.000	1.001	1.003	1.006
bior3.5	1.001	1.003	1.003	1.003	1.000	1.001	1.003	1.013
rbio3.1	1.002	1.003	1.004	1.003	1.001	1.006	1.003	1.117
rbio3.3	1.003	1.005	1.006	1.005	1.003	1.033	1.005	2.375
rbio3.5	1.004	1.006	1.007	1.006	1.004	1.042	1.006	4.004
dmey	1.004	1.006	1.006	1.006	1.002	1.010	1.006	1.256

$$A(s(t)) = \frac{\overline{(s - s_0)^2}}{s_0^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (s(t) - s_0(t))^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_0^2(t) dt} = D - 2B + 1, \quad (10)$$

$$B(s(t)) = \frac{\overline{s(t)s_0(t)}}{s_0^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s_0(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_0^2(t) dt}, \quad (11)$$

$$C(s(t)) = \sqrt{A^2 + (B - 1)^2}, \quad (12)$$

$$D(s(t)) = \frac{\overline{s^2(t)}}{s_0^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_0^2(t) dt}. \quad (13)$$

Функционал  $B(s(t))$  представляет собой коэффициент корреляции между исходным сигналом  $s_0(t)$  и восстановленным сигналом  $s(t)$ . Поэтому он изменяется в пределах  $-1 \leq B \leq 1$ . Функционал  $D(s(t))$  описывает относительную энергию восстановленного сигнала, и для него  $0 \leq D \leq 1$ . Функционал  $A(s(t))$  характеризует отклонение  $s(t)$  от  $s_0(t)$  и изменяется в пределах  $0 \leq A \leq 4$ . Функционал  $C(s(t))$  является нелинейной комбинацией функционалов  $A(s(t))$  и  $B(s(t))$  и служит обобщенной количественной характеристикой качества восстановления сигнала, и требует своей минимизации.

Минимальное значение функционала  $A = 0$  соответствует тождественности восстановленного и разложенного сигнала, а максимальное – их полной антикорреляции. Минимальное значение функционала  $B$  оз-

начает, наоборот, антикорреляцию указанных сигналов, а максимальное – их полную тождественность. Следовательно, чем меньше  $A$  и чем больше  $B$ , тем точнее восстанавливается рассматриваемый сигнал. Другими словами, алгоритм восстановления сигнала  $s(t)$  сводится к минимизации функционала  $A(s(t))$  при одновременной максимизации функционала  $B(s(t))$ .

Нормированность введенных функционалов позволяет сравнивать разложения различных сигналов по базисам разных вейвлет-функций независимо от параметров самих сигналов и базисных функций.

В табл. 6 в качестве примера влияния числа отброшенных при восстановлении уровней разложения сигнала  $L$  на величины функционалов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  приведены результаты расчетов с использованием модели ФСШП сигнала  $FUWB_1$  ( $\alpha = 0.5$ ) и СШП сигнала  $UWB_1$  ( $N = 2$ ), разложенных с помощью вейвлета db5. Из их сравнения следует, что если рассматривать ширину вейвлет-спектра вдоль оси параметра масштабирования  $a$  (которому пропорциональна величина  $L$ ) по уровню  $C = 0.000$ , то вейвлет-спектр  $UWB_1$  оказывается более локализованным, чем вейвлет-спектр  $FUWB_1$ . Это, казалось бы, противоречит результатам, полученным с помощью оценки энтропии  $M$  (см. табл. 3, 4). На самом деле никакого противоречия нет. Вейвлет-спектр ФСШП сигнала действительно является более широким, чем у СШП сигнала, при определении его ширины по уровню  $C_{\max} = 0.000$ . Однако при увеличении  $C_{\max}$ , например до 0.060, ситуация меняется на обратную (см. табл. 6). Уже при  $L = 8$  восстанавливаемый СШП сигнал искажается больше ( $C = 0.070$ ), чем ФСШП сигнал ( $C = 0.060$ ). Это важно при решении задачи обнаружения ФСШП сигналов на фоне помех.

Характер искажений, возникающих при отбрасывании  $L$  уровней вейвлет-спектра ФСШП сигнала во время его восстановления, показан на рис. 6. на примере модели  $FUWB_1$  ( $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 2$ ), которая была разложена по базису вейвлетов, основанному на вейвлете db5. Оказывается, что начиная



**Таблица 6.** Зависимость значений функционалов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  от количества  $L$  отбрасываемых уровней дискретного вейвлет-спектра при восстановлении моделей ФСШП сигнала  $FUWB_1$  ( $\alpha = 0.5$ ) и СШП сигнала  $UWB_1$  ( $N = 2$ ), разложенных с помощью вейвлета  $db5$

$L$	$FUWB_1$ ( $\alpha = 0.5$ )				$UWB_1$ ( $N = 2$ )			
	$A$	$B$	$C$	$D$	$A$	$B$	$C$	$D$
1	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
2	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
3	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000	0.000	1.000
4	0.001	0.999	0.001	0.999	0.000	1.000	0.000	1.000
5	0.002	0.998	0.003	0.998	0.000	1.000	0.000	1.000
6	0.007	0.993	0.010	0.993	0.000	1.000	0.000	1.000
7	0.020	0.980	0.028	0.980	0.003	0.997	0.004	0.997
8	0.042	0.958	0.060	0.958	0.049	0.951	0.070	0.951
9	0.115	0.885	0.162	0.885	0.153	0.847	0.216	0.847
10	0.716	0.279	1.016	0.274	0.749	0.247	1.062	0.242
11	0.943	0.053	1.337	0.048	0.951	0.045	1.347	0.042

с  $L = 4$  по мере роста  $L$  сначала уменьшается изрезанность восстановленного сигнала ( $L = 4 \div 6$ ,  $C = 0.001 \div 0.010$ ), затем постепенно у него появляются лишние лепестки ( $L = 6 \div 8$ ,  $C = 0.010 \div 0.060$ ), он уширится ( $L = 8 \div 10$ ,  $C = 0.060 \div 1.016$ ), пока совсем не исчезнет ( $L = 10 \div 11$ ,  $C = 1.016 \div 1.337$ ).

Следовательно, для достаточно точного восстановления ФСШП сигналов ( $C_{\max} = 0.001$ ) с  $d_M \sim 0.5$ , как правило, достаточно учитывать 7–8 уровней вейвлет-разложения. С ростом  $d_M$  количество необходимых уровней разложения увеличивается и для  $d_M \sim 0.9$  достигает 12.

### 5. Обнаружение ФСШП на фоне помех

Рассмотрим задачу обнаружения ФСШП сигнала на фоне аддитивной помехи с использованием вейвлет-преобразования. Применение вейвлет-анализа перспективно для обнаружения как СШП сигналов искусственного происхождения, так и различных кратковременных аперiodических процессов естественного происхождения, которые, как указывалось выше, могут быть отнесены к СШП сигналам. Эта идея основана на том, что хорошо локализованные базисные

функции вейвлет-преобразования в гораздо большей мере похожи на рассматриваемые финитные во времени сигналы, чем неограниченные базисные функции традиционно применяемого преобразования Фурье. Для нефрактальных УКСШП сигналов данная задача была рассмотрена в работе [20].

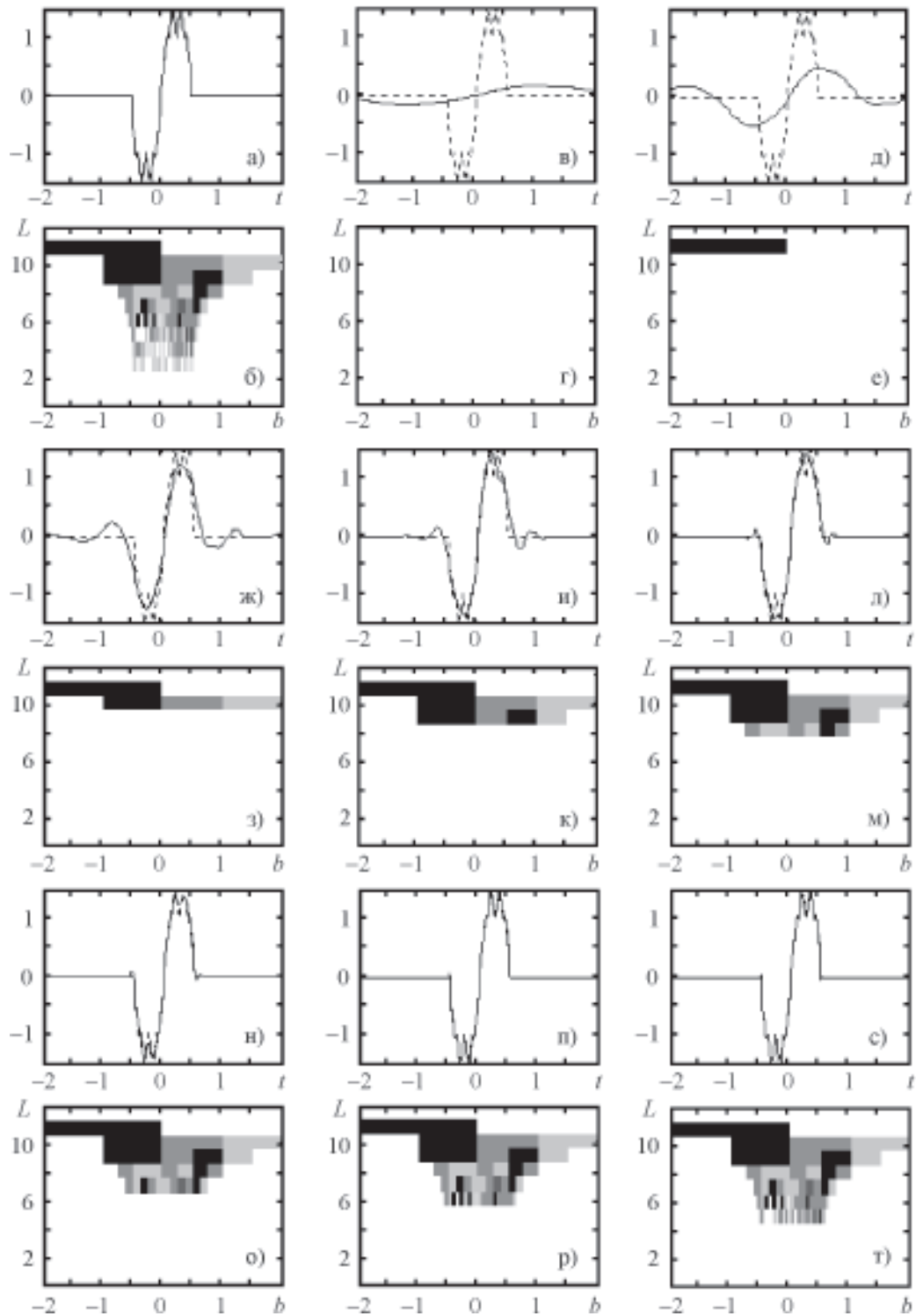
Далее в работе будем использовать модели аддитивной помехи  $n(t)$ , имеющей нормальное распределение. Смесь сигнала  $s_0(t)$  и помехи  $n(t)$  запишется при этом в виде:

$$s(t) = s_0(t) + n(t).$$

Мощность помехи будет определяться следующими выражениями для непрерывной  $n(t)$  и дискретной  $n_i$  временных функций помехи соответственно:

$$P_n = \sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (n(t) - \bar{n})^2 dt,$$

$$P_n = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2.$$



**Рис. 6.** Восстановление модельного ФСШП сигнала  $FUWB_1(t)$  при  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 2$  (а) с помощью обратного дискретного вейвлет-преобразования при использовании вейвлета db4 для разного количества учтенных уровней разложения  $L$ : в) –  $L = 1$ , д) –  $L = 2$ , ж) –  $L = 3$ , и) –  $L = 4$ , л) –  $L = 5$ , н) –  $L = 6$ , п) –  $L = 7$ , с) –  $L = 8$ . Соответствующие вейвлет-спектры: б) – исходный сигнал, з) –  $L = 1$ , е) –  $L = 2$ , к) –  $L = 3$ , м) –  $L = 4$ , о) –  $L = 5$ , р) –  $L = 6$ , т) –  $L = 7$ , л) –  $L = 8$

Здесь  $\sigma^2$  – дисперсия помехи,  $T$  – длительность реализации,  $N$  – количество отсчетов реализации исследуемого сигнала.

Отношение сигнал/помеха для непрерывно и дискретно заданных зависимостей  $s(t)$  и  $n(t)$  будем определять выражениями:

$$q = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T s_0^2(t) dt}{\frac{1}{T} \int_0^T (n(t) - \bar{n})^2 dt},$$

$$q = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_{0i}^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2}.$$

В качестве количественных критериев, описывающих соотношения между исходным, зашумленным и восстановленным сигналами будем использовать выражения (10)-(13), при этом основным будем считать функционал  $C$ .

Для проведения расчетов используем дискретное вейвлет-преобразование (ДВП), вейвлет-пакеты (ВП) и стационарное вейвлет-преобразование (СВП), основанные на различных вейвлетах из числа рассмотренных выше.

В результате численного моделирования установлены следующие факты. Обнаружение модельных ФСШП сигналов оказывается возможным при  $q \geq 10^{-1}$ . В то же время, при  $q = 10^{-2}$  удовлетворительный результат удается получить не всегда. Наилучший результат, как и следовало ожидать после анализа табл. 4, 5, дает вейвлетный базис, построенный на вейвлете db9. Так, например, для модели  $FUWB_1(t)$  с  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 2$  при  $q \sim 10^{-1} \div 10$  преимущество перед традиционной согласованной фильтрацией ( $C \sim 0.239 \div 0.200$ ) ДВП составляет (28 ÷ 96) % ( $C \sim 0.172 \div 0.008$ ), перед ВП фильтрацией – (37 ÷ 95) % ( $C \sim 0.150 \div 0.011$ ), СВП – (51 ÷ 96) % ( $C \sim 0.118 \div 0.008$ ). С ростом  $d_M$  при постоянном  $q$ , как и следовало ожидать,  $C$  увели-

чивается, поскольку все большая часть вейвлет-спектра ФСШП сигнала оказывается отрезанной в области малых  $a$ .

По мере уменьшения  $q$  вейвлет-фильтрация ФСШП сигнала приводит к постепенному исчезновению его фрактальной структуры, начиная с самых малых временных масштабов, чему соответствует подавление вейвлет-спектра сигнала при малых значениях параметра масштабирования  $a$ .

## 6. Обсуждение

К несомненным достоинствам ФСШП сигналов можно отнести их избыточность и связанную с ней повышенную помехоустойчивость, а также возможность организации скрытой передачи данных, поскольку многие ФСШП сигналы по форме напоминают шумоподобную структуру, оставаясь строго детерминированными. Наличие указанных свойств ФСШП сигналов определяет их преимущество перед УКСШП сигналами. Также имеется некоторое превосходство ФСШП сигналов и над недавно разработанными ПХСШП [11] сигналами. Последние хорошо приспособлены для скрытой передачи данных, но не обладают свойством фрактальности и, как ожидается, имеют меньшую помехоустойчивость.

Еще один аспект, составляющий преимущество ФСШП сигналов, а также ПХСШП сигналов над УКСШП сигналами, касается экологии. Дело в том, что при использовании УКСШП импульсов, следующих один за другим, создается потенциальная опасность ударного воздействия электромагнитного излучения на биологические системы, в частности, на человека. В то же время ПХСШП сигналы оказываются неструктурированными во времени и рассредоточенными по частоте, и поэтому их воздействие определяется только повышением общего фона электромагнитного излучения [11]. ФСШП сигналы занимают промежуточное положение между этими двумя крайними ситуациями.

Наряду с УКСШП сигналами, ФСШП сигналы позволяют преодолевать трудности, связанные с проблемой многолучевого

распространения. ФСШП сигналы также могут оказаться эффективными при передаче больших (например, несколько сотен мегабайт) объемов информации на расстоянии до нескольких километров.

Вместе с тем ФСШП сигналы имеют недостатки. Как и остальные виды СШП сигналов, ФСШП сигналы требуют разработки принципиально новых методов генерации, излучения, приема и обработки, создания соответствующих технических средств и элементной базы, поскольку традиционные методы и средства оказываются неприменимыми. Все это приводит, в свою очередь, к затратам времени, усилий большого количества специалистов и необходимости вложения значительных финансовых средств. К тому же, скорее всего, практическая реализация разработок потребует использования самой современной компьютерной базы для обеспечения достаточной оперативности создаваемых систем. При прохождении ФСШП, как и СШП сигналов, сильно выражены дисперсионные искажения в аппаратуре и канале распространения [8-10].

Несмотря на указанные недостатки, развитие идеи применения ФСШП сигналов видится целесообразным, поскольку ожидаемые преимущества могут оказаться весомее существующих и, по-видимому, временных недостатков.

В настоящее время, которое можно охарактеризовать как период формирования глобального информационного общества (см., например, [34]), перед развитыми странами, в том числе и перед Украиной, непосредственно встает проблема дальнейшего совершенствования информационных технологий. К основным направлениям такого развития на ближайшие 10-15 лет следует отнести полный переход к цифровой связи и информационным услугам на основе цифровых сигналов, переход к мультимедийным и интеллектуальным сетям передачи информации, а также конвергенцию вычислительных и телекоммуникационных средств в единую информационную среду. Одним из возможных направлений

является применение СШП сигналов при цифровой передаче данных.

Формирование информационного потока может осуществляться за счет изменения расстояния между следующими друг за другом СШП сигналами, их длины во временной области или их среднеквадратичной амплитуды, а также комбинации всех этих параметров. Простейший вариант состоит в формировании потока при фиксированной частоте следования позиций для СШП сигналов и при фиксированной их длительности. Тогда наличие СШП сигнала на отведенной позиции означает символ "1", а отсутствие – "0". Выделение полезной информации может осуществляться либо путем интегрирования мощности импульсов в пределах их длительности (некогерентный прием), либо путем свертки принятого сигнала с известным ожидаемым образцом СШП сигнала (когерентный прием). В качестве СШП сигналов могут использоваться как ультракороткие СШП импульсы, так и ПХСШП сигналы [11].

Реализация подобной идеи, особенно для беспроводной передачи данных, неизбежно сталкивается с наличием помехи в канале распространения. А это, в свою очередь, приводит к задаче обнаружения СШП сигнала на фоне аддитивной слабокоррелированной помехи. В [26, 27] показано, что при решении такой задачи для ультракоротких СШП сигналов применение вейвлет-анализа оказывается более эффективным, чем использование традиционных методов, основанных на преобразовании Фурье. Оказывается, что УКСШП сигнал можно обнаружить при отношениях сигнал/помеха  $q \geq 10^{-3}$ .

Применение ФСШП сигналов привлекательно наличием у них свойства избыточности. Это связано с тем, что фрактальный сигнал самоподобен и его восстановление можно организовать более эффективно, чем для нефрактального сигнала. Следствием избыточности ФСШП сигналов должна являться их помехоустойчивость. Однако приведенные выше результаты расчетов этого не показали. Обнаружить ФСШП сигнал на

фоне помехи удалось только при  $q \geq 10^{-1}$ . По всей видимости, причина этого кроется в несовершенстве использованного алгоритма обнаружения. Основанный на вейвлет-фильтрации на базе ДВП данный алгоритм, будучи эффективным для обнаружения нефрактальных УКСШП сигналов [26, 27], к сожалению, никак не учитывает свойства фрактальности ФСШП сигналов. Более того, при такой обработке полностью или частично уничтожается часть вейвлет-спектра, лежащая в области малых  $a$ . Для УКСШП сигналов это не слишком критично, поскольку основная часть вейвлет-спектра находится в области более высоких значений  $a$ . У ФСШП сигналов в области малых  $a$  находится основная информация об их фрактальности. Поэтому для них применение вейвлет-фильтрации в рассмотренном простейшем виде, вероятно, нецелесообразно. Например, из рис. 2 видно, что за фрактальность приведенного ФСШП сигнала отвечает часть вейвлет-спектра с  $a \sim 1 \div 300$ , а компоненты, формирующие сам импульс, находятся в области  $a > 400$ .

Однако полученный результат не умаляет достоинств ФСШП сигналов, а лишь говорит о необходимости разработки более совершенных методов их обнаружения на фоне помехи, в частности, с использованием как вейвлет-анализа, так и фрактальных свойств самих сигналов. О возможности создания такого метода, обладающего достаточной для практического применения оперативностью, говорит динамичное развитие средств компьютерной техники, а следовательно, повышение объемов и скорости обработки информации, поскольку проведение вейвлет-анализа требует значительных вычислительных затрат.

Вероятно, в будущем ФСШП сигналы смогут составить достойную конкуренцию при организации цифровой передачи данных как УКСШП сигналам, так и ПХСШП сигналам. Основным преимуществом ФСШП сигналов видится их большая помехоустойчивость, в то время как, например, ПХСШП сигналы, являясь псевдослучайными, остаются нефрактальными и не обладают избыточностью.

Представляется также целесообразным применение ФСШП сигналов для дистанционного радиозондирования различных сред и объектов, в частности, атмосферы и околоземного космического пространства. Основными проблемами при этом, как и в случае УКСШП сигналов, остаются, с одной стороны, излучение и усиление ФСШП сигналов, а с другой стороны, возможность возникновения значительных дисперсионных искажений в канале радиозондирования (см., например, [8-10]).

Таким образом, использование в различных областях науки и техники нового вида СШП сигналов – ФСШП сигналов – представляется перспективным и требует проведения дальнейших исследований.

## 7. Выводы

1. Предложен новый вид СШП сигналов – фрактальные СШП сигналы. Эти сигналы сочетают в себе достоинства как УКСШП, так и фрактальных сигналов.

2. Описаны простые численные и аналитические модели ФСШП сигналов во временной области, удобные для анализа основных свойств этих сигналов.

3. Проведены фурье- и вейвлет-анализ модельных ФСШП сигналов. Отмечено, что вейвлет-анализ является удобным методом описания ФСШП сигналов. Для модельных ФСШП сигналов рассчитан ряд числовых характеристик, позволяющих сравнивать их как между собой, так и с другими видами СШП сигналов. Как и следовало ожидать, фурье- и вейвлет-спектр ФСШП сигналов имеют фрактальный характер. Показано, что наиболее удобными для проведения ДВП модельных ФСШП сигналов являются вейвлетные базисы, построенные на вейвлетах  $db5$  и  $db9$ .

4. Указано, что основными преимуществами ФСШП сигналов над УКСШП сигналами является их повышенная помехоустойчивость, основанная на свойстве избыточности, и возможность организации более скрытой передачи данных, поскольку многие ФСШП сигналы по внешнему виду в достаточной мере напоминают шумовые сигналы.

5. Основными трудностями в применении ФСШП сигналов являются необходимость разработки принципиально новых методов генерации, излучения, приема и обработки, создания соответствующих технических средств и элементной базы, поскольку, как и для других видов СШП сигналов, традиционные методы и средства оказываются неприменимыми, а также наличие сильно выраженных дисперсионных искажений в аппаратуре и канале распространения.

6. Установлено, что с помощью метода, основанного на смоделированной авторами вейвлет-фильтрации с использованием ДВП, СВП и ВП, удается обнаружить ФСШП сигнал на фоне аддитивной слабокоррелированной помехи при  $q \geq 10^{-1}$ , что хуже результата, полученного этим методом для УКСШП сигналов ( $q \geq 10^{-3}$ ). Причина в том, что данный метод никак не учитывает фрактальности ФСШП сигнала. Поэтому необходимо разработать новый эффективный метод обнаружения для ФСШП сигналов, в частности, использующий вейвлет-анализ и учитывающий их фрактальность.

### Литература

- Moffatt D. L., Puskar R. J. Subsurface Electromagnetic Pulse Radars // *Geophysics*. – 1976. – Vol. 41, No. 3. – P. 506-518.
- Kennaugh E. M. The K-Pulse Concept // *IEEE Trans. Antennas and Propag.* – 1981. – Vol. 29, No. 2. – P. 327-331.
- Астанин Л. Ю., Костылев А. А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. – М.: Радио и связь, 1989. – 192 с.
- Хармут Х. Ф. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1985. – 376 с.
- Barrett T. W. History of UltraWideBand (UWB) Radar & Communications: Pioneers and Innovations // *Proc. Conf. Progress In Electromagnetics Symposium 2000 (PIERS 2000)*. – Cambridge, MA. – 2000. – P. 1-20.
- Revision of part 15 of the commission's rules regarding ultra-wideband transmission systems. First report and order. FCC 02-48. Federal Communications Commission, 2002.
- Иммореев И., Судаков А. Сверхширокополосные и узкополосные системы связи. Совместная работа в общей полосе частот // *Электроника: НТБ*. – 2003. – Т. 2. – С. 34-37.
- Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Дисперсионные искажения высокочастотных сверхширокополосных радиосигналов в ионосфере // *Геоматизм и аэрономия*. – 1997. – Т. 37, №6. – С. 80-90.
- Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Анализ характеристик сверхширокополосных сигналов различной физической природы в задачах геофизического мониторинга околоземного пространства // *Матер. Междунар. симп. "Мониторинг окружающей среды и проблемы солнечно-земной физики"*. – Томск. – 1996. – С. 85-86.
- Лазоренко О. В. Распространение сверхширокополосных радиосигналов в околоземном пространстве: Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.04.03. – Харьков: 1999. – 201 с.
- Дмитриев А. С., Кузьмин Л. В., Панас А. И., Пузиков Д. Ю., Старков С. О. Прямохаотические системы связи // *Успехи современной радиоэлектроники*. – 2003. – №9. – С. 40-56.
- Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
- Захаров К. А., Мейланов Р. П. О дискретизации сигнала с фрактальной структурой // *Известия вузов. Радиофизика*. – 2001. – Т. 44, №8. – С. 709-711.
- Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. – San Francisco: CA. Freeman, 1982. – 452 p.
- Странные аттракторы. Серия "Математика: новое в зарубежной науке". № 22. – М.: Мир, 1981. – 259 с.
- Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. – М.: ИЛ, 1948. – 365 с.
- Edgar G. A. Measure, Topology, and Fractal Geometry. – New-York: Springer-Verlag, 1990. – 521 p.
- Holschneider M. Wavelets: An Analysis Tool. – Oxford: Calderon Press, 1995. – 423 p.
- Фракталы в физике: Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9-12 июля, 1985). – М.: Мир, 1988. – 672 с.
- Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории – к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.
- Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А. Вейвлеты и их использование // *Успехи физических наук*. – 2001. – Т. 171, №5. – С. 465-501.
- Чуи К. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. Я. М. Жилейкина. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

23. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основные конструкции всплесков // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 1997. – Т. 3, вып. 4. – С. 999-1024.
24. Daubechies I. Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF conference series in applied mathematics. SIAM Ed. – 1992. – 335 p.
25. Астафьева Н. М. Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физических наук*. – 1996. – Т. 166, №11. – С.1115-1170.
26. Chernogor Leonid F., Lazorenko Oleg V., Lazorenko Sergey V. Wavelet Analysis and Ultra-wideband signals // *Radio Physics & Radio Astronomy*. – 2002. – Vol. 7, No. 4. – P. 471-474.
27. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения сверхширокополосных сигналов на фоне помех // *Радиофизика и радиоастрономия*. – 2002. – Т. 7, №1. – С. 46-63.
28. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – Санкт-Петербург, 2002. – 608 с.
29. Гуляев Ю. В., Кравченко В. Ф., Рвачев В. А. Синтез весовых окон на основе атомарных функций // *Доклады академии наук*. – 1995. – Т. 342, №1. – С. 29-31.
30. Кравченко В. Ф., Рвачев В. А., Рвачев В. Л. Математические методы обработки сигналов на основе атомарных функций // *Радиотехника и электроника*. – 1995. – Т. 40, №9. – С. 1385-1406.
31. Кравченко В. Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. – М.: Радиотехника, 2003. – 512 с.
32. Кравченко В. Ф., Потапов А. А., Масюк В. М. Атомарно-фрактальные функции в задачах синтеза антенн // *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники*. – 2001. – №6. – С. 4-40.
33. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.
34. Гуляев Ю. В., Никитов С. А. Перспективы развития телекоммуникаций // *Нелинейный мир*. – 2003. – Т. 1, №1-2. – С. 4-11.

## Фрактальні надширокопосмугові сигнали

**О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор**

Запропоновано новий тип надширокопосмугових сигналів – фрактальні надширокопосмугові (ФНШС) сигнали. Описано їх числові та аналітичні моделі. За фур'є- та вейвлет-аналізом обчислено основні характеристики аналітичних та числових моделей ФНШС сигналів. Обговорюються переваги та недоліки нового типу сигналів.

## Fractal Ultra-Wideband Signals

**O. V. Lazorenko and L. F. Chernogor**

The fractal ultra-wideband (FUWB) signals are proposed as a new type of the ultra-wideband signals. Their numerical and analytical models are described. Basic characteristics of analytical and numerical FUWB signal models are calculated with the Fourier- and wavelet analysis. The advantages and disadvantages of the new signal type are discussed.