

## Особенности распространения электрической составляющей импульса электромагнитного поля в диэлектрике в условиях самоиндуцированной прозрачности

А. Н. Волобуев, В. А. Неганов

*Поволжская государственная академия телекоммуникаций и информатики,*

*ул. Л. Толстого, 23, г. Самара, 443010, Россия*

*E-mail: volobuev@samaramail.ru*

*Статья поступила в редакцию 11 июня 2004 г.*

Рассмотрено формирование импульса электромагнитного излучения при распространении в диэлектрической среде в условиях самоиндуцированной прозрачности. Показано, что с помощью уравнений Максвелла–Блоха такой импульс описывается неудовлетворительно. Предложен способ связи среднего числа заполнения и энергии импульса, учитывающий энергетическое насыщение среды. Представлен расчет электрической составляющей импульса.

Розглянуто формування імпульсу електромагнітного випромінювання, що розповсюджується в діелектричному середовищі в умовах самоіндукованої прозорості. Показано, що через рівняння Максвелла–Блоха такий імпульс описується незадовільно. Запропоновано спосіб зв'язку середнього числа заповнення та енергії імпульсу, що враховує енергетичне насичення середовища. Наведено розрахунок електричної складової імпульсу.

### Введение

Распространение импульса электромагнитного поля в диэлектрической среде обусловлено взаимодействием составляющих поля с атомами и молекулами вещества среды. В [1] рассмотрено формирование электрической составляющей импульса в диэлектрике при низкой интенсивности электромагнитного поля импульса. В настоящей работе изучены основные феноменологические закономерности в формировании электрической составляющей импульса большой интенсивности.

Описание распространения импульса в среде с диссипацией представляет собой исключительно сложную задачу. Но во многих практически важных случаях потерей энергии импульса в среде можно пренебречь. С этой точки зрения наиболее простым является описание импульса при са-

моиндуцированной прозрачности (СИП). Явление СИП может возникнуть в разреженном газе ( $n < 10^{18}$  атомов/см<sup>3</sup>) для коротких лазерных импульсов ( $t < 10^{-9}$  с) при энергии импульса достаточной для перевода в возбужденное состояние всех атомов в области влияния импульса [2]. В этом случае отсутствует обратное рассеяние электромагнитного излучения, исчезают диссипативные свойства системы “импульс–среда”, и она переходит в консервативное состояние. Электромагнитный импульс приобретает стационарное, солитонное состояние. Симметричность и устойчивость импульса значительно упрощает его математическое описание.

До настоящего времени математическое описание подобного электромагнитного солитона, на основе применения полуклассической системы уравнений Максвелла–Блоха [3], по нашему мнению, было неудовлетвори-

тельным. Уравнения Максвелла–Блоха были записаны в 1946 г., задолго до создания лазеров и открытия явления СИП в 1965 г.

Физической основой этих уравнений являются, во-первых, второй закон Ньютона для атомарного электрона, а во-вторых, пропорциональность среднего по атомам (в области влияния импульса) числа заполнения  $N$  объемной плотности энергии электромагнитной волны  $w$ , т. е.  $N \sim w$ . Величина  $N$  дает меру инверсии системы атомов-излучателей по возбужденным атомам [2].

Процедура описания электромагнитного импульса, начиная с волнового уравнения, обычно проходит через этап разделения напряженности поля на медленную огибающую амплитуд и волну заполнения. Подобный путь характерен для процессов, подчиняющихся нелинейным уравнениям Шредингера. Однако описание огибающей амплитуд в рамках теории Максвелла–Блоха основывается на уравнении  $\sin$ -Гордона [3], которое принципиально не содержит в своем решении волны заполнения. Такой путь является неорганичным и внутренне противоречивым. Причина ограниченности применения уравнений Максвелла–Блоха для описания СИП будет проанализирована далее. По нашему мнению, единый по своей сущности процесс СИП должен рассматриваться на основе последовательного решения нелинейного уравнения Шредингера. Но наиболее распространенное нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, которое может в решении дать уединенную волну с заполнением, непригодно для описания СИП. Это связано с тем, что солитонное решение уравнения Шредингера с кубической нелинейностью относится к импульсу, в котором фазовая скорость волны заполнения меньше скорости самого импульса (см. Приложение). Для импульса СИП характерно обратное соотношение скоростей [4].

Целью настоящей работы является нахождение и решение уравнения для электрической составляющей импульса-солитона в условиях самоиндуцированной прозрачности.

### Взаимодействие электромагнитного импульса с веществом

Рассмотрим одномерную задачу взаимодействия электрической составляющей импульса электромагнитного поля с веществом диэлектрика, в котором имеется определенная концентрация  $n$  центрально-симметричных атомов-осцилляторов. Для определенности остановимся на одноэлектронном атоме. Примем также, что макроток и свободных зарядов в среде нет.

Будем считать, что происходит взаимодействие квантов электромагнитного излучения с атомарными электронами. При этом кванты поглощаются электронами и электроны переходят на более высокие энергетические уровни. Затем, вследствие резонансного перехода электронов на нижние уровни, происходит излучение квантов вперед. Безызлучательные переходы электронов в рассматриваемой среде отсутствуют, т. е. энергия квантов ядру не передается.

Таким образом, поглощением электромагнитного излучения в смысле диссипации его энергии в веществе вследствие СИП пренебрегаем. Происходит только переизлучение квантов атомами. При этом передний фронт импульса отдает энергию атомарным электронам среды, которые запасают ее, а затем энергия полностью возвращается в импульс, формируя его задний фронт.

При большом количестве квантов в импульсе вероятности поглощения и излучения электронами квантов можно считать, согласно Эйнштейну, примерно одинаковыми [5]. Для отдельного взаимодействия кванта монохроматического потока излучения с электроном эта вероятность пропорциональна кубу постоянной тонкой структуры,  $\sim (1/137)^3$  [6]. Рассмотрим случайную величину – число взаимодействий квантов с атомарными электронами в импульсе. В соответствии с законом распределения Пуассона вероятность того, что не поглотится ни одного кванта атомарными электронами (не произойдет ни одного взаимодействия), при относительно невысокой вероятности отдельного взаимодействия, рав-

на экспоненте от математического ожидания случайной величины – среднего числа взаимодействий квантов и электронов в импульсе  $\lambda$ , взятого со знаком минус:  $p = \exp(-\lambda)$ . Поэтому, как будет показано ниже, можно считать, что интенсивность непоглощенной энергии импульса атомарными электронами среды на переднем фронте определяется экспоненциальным законом Бугера [3] (в немецкой традиции – Бэра):

$$I = I_0 \exp(-\alpha l), \quad (1)$$

где  $\alpha$  – показатель взаимодействия электромагнитной волны с веществом,  $l$  – длина слоя взаимодействия,  $I_0$  – интенсивность падающей волны. Считаем, что интенсивность передачи энергии атомарными электронами в импульс на его заднем фронте также можно приближенно описать законом Бугера с отрицательным показателем поглощения [7].

Показатель взаимодействия равен  $\alpha = \sigma n$ , где  $\sigma$  – эффективное сечение взаимодействия атома-осциллятора с волной. Следовательно,

$$\alpha l = \sigma n l = n V_{\text{eff}} = n V \frac{V_{\text{eff}}}{V} = M \frac{V_{\text{eff}}}{V} = MN, \quad (2)$$

где  $V_{\text{eff}}$  – эффективный объем взаимодействия;  $V$  – геометрический объем, в котором находится  $M$  взаимодействующих с излучением частиц;  $\frac{V_{\text{eff}}}{V} = N$ . Отношение эффективного объема взаимодействия к геометрическому объему характеризует среднюю вероятность взаимодействия электромагнитного излучения с атомом. Следовательно, под экспонентой в законе Бугера (1) действительно стоит математическое ожидание случайной величины, подчиняющейся распределению Пуассона, – среднее число взаимодействующих с электромагнитным излучением атомов в области влияния импульса,  $\lambda = NM$ .

Учитывая, что интенсивность волны  $I \sim E^2$ , найдем:

$$|E| = |E_0| \exp\left(-\frac{\alpha}{2} l\right), \quad (3)$$

где  $|E_0|$  – амплитуда напряженности электрического поля импульса в области с продольной координатой  $X = 0$ .

Используя соотношение (2), можно получить:

$$N = -\frac{2}{M} \ln \left| \frac{E}{E_0} \right|. \quad (4)$$

Формула (4) требует некоторого обсуждения. Если  $E < E_0$ , что отражает процесс поглощения волны атомарными электронами, то  $N > 0$  и классическое рассмотрение взаимодействия электромагнитной волны с атомом вполне приемлемо. Случай  $E > E_0$  отражает процесс переизлучения волны. При этом  $N < 0$  и величину  $N$  уже нельзя трактовать как вероятность взаимодействия электромагнитной волны с атомом. В этом случае необходимо квантово-механическое рассмотрение процесса взаимодействия кванта с двухуровневой энергетической системой атома при условии, что обратный энергетический переход – безызлучательный. Величина  $N$  в этом случае носит название среднего по атомам числа заполнения ( $-1 \leq N \leq 1$ ). При  $N = -1$  все атомы находятся в основном состоянии [3].

Рассмотрим зависимость среднего числа заполнения от времени  $N(t)$ . Если принять пропорциональность поляризации отдельного двухуровневого атома напряженности электрического поля в импульсе, то, согласно уравнениям Максвелла–Блоха, среднее по атомам рассматриваемого объема число заполнения пропорционально объемной плотности энергии электромагнитной волны,  $N \sim w$  [3]. Но такая монотонная зависимость между этими величинами не может сохраняться на всем про-

тяжении импульса. Во-первых, при большой объемной плотности энергии импульса  $w$ , характерной для СИП, когда центральная часть энергии импульса выше некоторого определенного значения  $w$ , происходит энергетическое насыщение среды. Среднее число заполнения при этом  $N=1$ , все атомы находятся в возбужденном состоянии (см. рис. 1). Нарушение пропорциональности  $N \sim w$  в центральной области импульса является основным недостатком при использовании системы уравнений Максвелла–Блоха для описания СИП.

Во-вторых, время релаксации величины  $N$  – не менее 1 нс [2], поэтому зависимость  $N(t)$  не может повторять высокочастотные осцилляции на переднем и заднем фронтах импульса. Зависимость  $N \sim w$  может характеризовать только пропорциональность среднего числа заполнения и огибающей  $w$  (кривая 1) в импульсе. Но по крайней мере в двух точках перегиба (3 и 4 на рис. 1) на участках возрастания и убывания огибающей  $w$  величина  $\partial^2 w / \partial t^2 = 0$ , а следовательно, и  $\partial^2 N / \partial t^2 = 0$ . Кроме того, зависимость  $N(t)$  симметричная, т. к. при СИП импульс является консервативной системой (нет обратного рассеяния и диссипации энергии) [2]. Поэтому с большой степенью точности можно

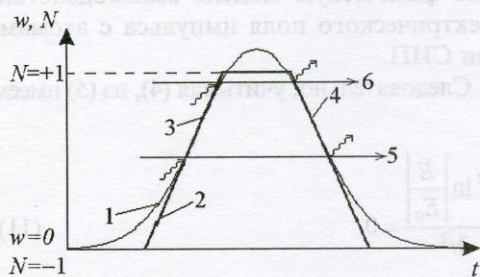


Рис. 1. Зависимость объемной плотности энергии импульса электромагнитного излучения  $w$  (кривая 1) и среднего по атомам числа заполнения  $N$  (кривая 2) от времени; 3 и 4 – точки перегиба функции  $w(t)$

считать, что на всем протяжении импульса, за исключением точек излома кривой  $N(t)$ , выполняется условие

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

а примерный вид зависимости  $N(t)$  соответствует кривой 2 на рис. 1. Можно также отметить достаточно большую общность формулы (5), которая справедлива для любой кусочно-линейной функции  $N(t)$ . При этом точки излома функции  $N(t)$  исключаются из рассмотрения, т. к. в них производные претерпевают разрыв.

На рис. 1, для наглядности, на зависимость  $N(t)$  наложены две диаграммы Фейнмана (5 и 6) взаимодействия квантов с атомарными электронами. Пространственная координата  $X$  для диаграмм направлена вертикально вверх. Перемещением атомарных электронов в пространстве, по сравнению с перемещением квантов, можно пренебречь. Из диаграмм видно, что длительность существования разных электронов в области импульса от момента поглощения квантов до их излучения различная.

### Нелинейное уравнение Шредингера

В рассматриваемой задаче одномерное волновое уравнение для электрической составляющей электромагнитного поля  $E$  имеет вид [2]:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (6)$$

где  $E \equiv E_y$  или  $E \equiv E_z$ ;  $X$  и  $t$  – соответственно координата, вдоль которой распространяется импульс, и время распространения;  $P$  – поляризация вещества;  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные;  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость среды;  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  – скорость света в вакууме.

Представим напряженность электрического поля в следующем виде:

$$E(X, t) = \Phi(X, t) \exp(-i\omega_0 t). \quad (7)$$

Функция  $\Phi(X, t)$  меняется во времени медленнее, чем  $E(X, t)$ ,  $\omega_0$  – составляющая циклической частоты высокочастотных осцилляций поля.

Подставляя (7) в (6), получаем:

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} - \frac{\mu}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \omega_0^2 \Phi \right) \right] \times \exp(-i\omega_0 t) = \frac{\mu}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Оценим относительную величину первого и последнего слагаемых в круглых скобках в левой части (8). Для этого введем масштабы величин  $t$  и  $\Phi$ :

$$T = t/t^*, \quad \Phi_0 = \Phi/\Phi^*,$$

где звездочкой обозначены безразмерные параметры. В качестве масштаба времени логично выбрать период импульса  $T$ . Масштаб  $\Phi_0$  выбираем из условия, чтобы безразмерная вторая производная  $\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^{*2}}$  и сама безразмерная функция  $\Phi^*$  были одного порядка. Следовательно, первое слагаемое в круг-

лых скобках (8) приобретает вид  $\frac{\Phi_0}{T^2} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^{*2}}$ , а последнее слагаемое равно  $\omega_0^2 \Phi_0 \Phi^*$ . Вместо периода импульса  $T$  введем циклическую частоту импульса  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Сравнивая эти слагаемые, находим, что  $\frac{\Phi_0 \omega^2}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^{*2}} \ll \omega_0^2 \Phi_0 \Phi^*$ , т. е. циклическая частота импульса много меньше частоты осцилляций поля,  $\omega^2 \ll \omega_0^2$ . Аналогично можно показать, что второе

слагаемое в круглых скобках (8) много больше первого слагаемого.

Следовательно, пренебрегая в (8) малым слагаемым, находим:

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\mu}{c^2} \left( 2i\omega_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \omega_0^2 \Phi \right) \right] \exp(-i\omega_0 t) = \frac{\mu}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Считая вектор поляризации  $P$  прямо пропорциональным напряженности электрического поля, можно из (6) сразу получить волновое уравнение, которому удовлетворяет волна любой формы. Но существует физический механизм, накладывающий ограничение на форму волны. Этот механизм связан со способом переизлучения атомарными электронами электромагнитного импульса. Рассмотрим этот процесс более подробно.

Запишем напряженность электрического поля в виде:

$$E(X, t) = |E(X, t)| \exp[i(rX - \delta t)], \quad (10)$$

где  $r$  и  $\delta$  – постоянные величины,  $|E(X, t)|$  – модуль функции  $E(X, t)$ .

Формулы (4) и (5) отражают предлагаемую физическую модель взаимодействия электрического поля импульса с атомами при СИП.

Следовательно, учитывая (4), из (5) имеем:

$$\frac{\partial^2 \ln \left| \frac{E}{E_0} \right|}{\partial t^2} = 0. \quad (11)$$

Преобразовывая (11), находим:

$$\frac{\partial^2 |E|}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial \ln |E|}{\partial t} \right)^2 |E|. \quad (12)$$

Полученное соотношение нельзя рассматривать как уравнение для определения модуля электрической составляющей импульса. Оно является приближенным выражением второй производной  $\frac{\partial^2 |E|}{\partial t^2}$  для рассматриваемой физической модели и описывает нелинейные эффекты взаимодействия электромагнитного излучения с веществом. Приближенное соотношение (12) определяет связь поляризации среды  $P$  с напряженностью электрического поля, что будет показано в дальнейшем. Напряженность электрического поля импульса необходимо вычислять исходя из уравнения (6) с учетом соотношения (12).

В соответствии с (10)  $|E(X,t)| = E(X,t) \exp[-i(rX - \delta t)]$ , следовательно, из (12) найдем:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -2i\delta \frac{\partial E}{\partial t} + \left[ \delta^2 + \left( \frac{\partial \ln \left| \frac{E}{E_0} \right|}{\partial t} \right)^2 \right] E. \quad (13)$$

Переходя в (13) к функции  $\Phi(X,t)$  в соответствии с формулой (7) и используя условие  $P = \epsilon_0 \chi E$ , где  $\chi$  – относительная диэлектрическая восприимчивость вещества, получим:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \exp(-i\omega_0 t) \times \left[ -2i\delta \epsilon_0 \chi \frac{\partial \Phi}{\partial t} - 2\delta \epsilon_0 \chi \omega_0 \Phi + \epsilon_0 \chi \left[ \delta^2 + \left( \frac{\partial \ln \left| \frac{\Phi}{\Phi_0} \right|}{\partial t} \right)^2 \right] \Phi \right], \quad (14)$$

где величина  $E_0 = \Phi_0 \exp(-i\omega_0 t)$ . Сравнивая (7) и (10), имеем:  $|E| = |\Phi|$ ,  $|E_0| = |\Phi_0| = \text{const}$ .

Подставляя (14) в (9), находим:

$$2i(\omega_0 + \chi\delta) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c^2}{\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} +$$

$$+ (\omega_0^2 + 2\chi\delta\omega_0 - \chi\delta^2) \Phi = \chi \left( \frac{\partial \ln \left| \frac{\Phi}{\Phi_0} \right|}{\partial t} \right)^2 \Phi. \quad (15)$$

Это нелинейное уравнение Шредингера с нелинейностью довольно сложного вида. Введем обозначения:  $\alpha = \omega_0 + \chi\delta$ ,  $\gamma = \omega_0^2 + 2\chi\delta\omega_0 - \chi\delta^2 = \alpha^2 - \epsilon\chi\delta^2$ , где  $\epsilon = 1 + \chi$  – относительная диэлектрическая проницаемость вещества, и преобразуем уравнение (15):

$$2i\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{c^2}{\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \gamma \Phi = \chi \left( \frac{\partial \ln \left| \frac{\Phi}{\Phi_0} \right|}{\partial t} \right)^2 \Phi. \quad (16)$$

Будем искать решение нелинейного уравнения Шредингера (16) в виде [8]:

$$\Phi = \Phi_0 f(kX - \omega t) \exp[i(rX - \delta^* t)], \quad (17)$$

где вид функции  $f(kX - \omega t)$  пока неизвестен. Величины  $k$ ,  $\omega$  и  $\delta^*$  – постоянные. Обозначив  $\zeta = kX - \omega t$ , подставив (17) в (16), а также учитывая  $|\Phi| = \Phi_0 f(\zeta)$ , получим:

$$\frac{c^2}{\mu} k^2 \frac{d^2 f}{d\zeta^2} + 2i \frac{df}{d\zeta} \left( kr \frac{c^2}{\mu} - \alpha\omega \right) + f \left( \gamma + 2\alpha\delta^* - r^2 \frac{c^2}{\mu} \right) = \chi\omega^2 \left( \frac{d \ln f}{d\zeta} \right)^2 f. \quad (18)$$

Если принять  $kr c^2 = \alpha\mu\omega$ , т. к. в (18) не должно быть мнимых слагаемых, то это уравнение преобразуется следующим образом:

$$\frac{c^2}{\mu} k^2 \frac{d^2 f}{d\zeta^2} + f \left( \gamma + 2\alpha\delta^* - r^2 \frac{c^2}{\mu} \right) = \chi\omega^2 \left( \frac{d \ln f}{d\zeta} \right)^2 f. \quad (19)$$

Будем искать решение уравнения (19) в виде:

$$f = C_1 \exp\left[\frac{C_2 \zeta^2}{4}\right], \quad (20)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные величины. Подставив (20) в (19), находим, что постоянная  $C_1$  может быть произвольной величиной,  $\chi\mu\omega^2 = k^2 c^2$ .

Постоянная  $C_2$  не может зависеть от параметров уравнения. Принимаем  $C_2 = -1$ . Тогда частота и волновое число в (17) соответственно равны:

$$\delta^* = \frac{\frac{c^2}{\mu} \left( r^2 + \frac{k^2}{2} \right) - \gamma}{2\alpha}, \quad r = \frac{\alpha\mu\omega}{kc^2}. \quad (21)$$

Формулы (21) связывают частоту и волновое число осцилляций функции  $\Phi(X, t)$  с параметрами вещества и электромагнитного поля импульса.

Наиболее простые соотношения между параметрами получаются, если положить  $\delta = \omega_0$ . В этом случае  $\alpha = \epsilon\delta$ ,  $\gamma = \epsilon\delta^2$ . Из соотношений (21), учитывая  $\chi\mu\omega^2 = k^2 c^2$ , находим:

$$\delta^* = \frac{\alpha}{2\chi} + \frac{\chi\omega^2}{4\alpha} - \frac{\gamma}{2\alpha} = \frac{2\epsilon\delta^2 + \chi^2\omega^2}{4\chi\epsilon\delta}. \quad (22)$$

$$r = \frac{\alpha\mu\omega}{kc^2} = \frac{\alpha k}{\chi\omega} = \frac{\epsilon\delta k}{\chi\omega},$$

В связи с тем что  $2\epsilon\delta^2 \gg \chi^2\omega^2$ , имеем  $\delta^* \approx \frac{\delta}{2\chi}$ . Используемое неравенство справедливо, т. к. для разреженного газа ( $n < 10^{18}$  атомов/см<sup>3</sup>)  $\epsilon \gg \chi$  и частота волны заполнения импульса  $\delta$  много больше частоты огибающей импульса  $\omega$ .

Учитывая (10), (20) и условие  $|E| = |\Phi|$ , можно записать закон изменения напряженности электрического поля в виде:

$$E = E_0 \exp\left[-\frac{(kX - \omega t)^2}{4}\right] \exp[i(rX - \delta t)]. \quad (23)$$

Интересно отметить, что хотя выражения для электрической составляющей импульса в [1] и (23) подобны и имеют одинаковые фазы колебаний на некотором расстоянии от переизлучающего атома, нелинейные уравнения Шредингера отличаются по типу нелинейности. Это связано с тем, что в [1] рассматривался импульс относительно низкой интенсивности, не приводящий к энергетическому насыщению среды, в которой он распространяется.

Для расчета, аналогичного [1], принимаем:  $k = \frac{\omega}{c} = 2.1 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1}$ ,  $r = \frac{\delta}{c} = 2.1 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$ ,  $\omega = 6.28 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ,  $\delta = 6.28 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ .

Распределение напряженности электрического поля импульса по координате  $X$ , рассчитанное с помощью системы MathCAD по формуле (23), показано на рис. 2.

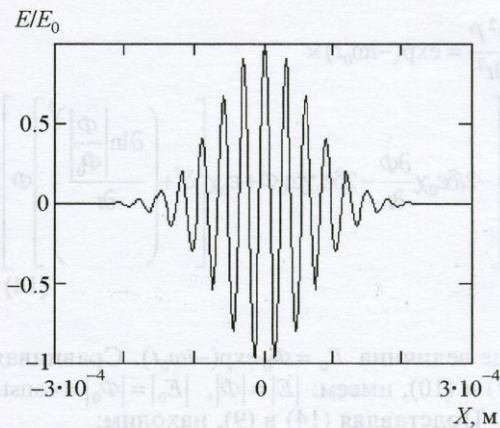


Рис. 2. Расчет электрической составляющей импульса электромагнитного излучения в диэлектрике

Для сравнения, на рис. 3 показаны огибающие импульса электрического поля в случае СИП, построенные по формуле (23) (кривая 1) и по формуле (24), являющейся следствием теории Максвелла–Блоха, (кривая 2). Огибающая импульса напряженности электрического поля в этой теории выражается как первая производная от решения уравнения  $\sin$ -Гордона и имеет вид:

$$E = \frac{E_0}{\operatorname{ch}(kX - \omega t)}. \quad (24)$$

Известно, что вид первой производной решения уравнения  $\sin$ -Гордона аналогичен огибающей солитона в решении нелинейного уравнения Шредингера с кубической нелинейностью (см. Приложение, формулу (П3)). Кривые 1 и 2 на рис. 3 построены для тех же параметров, что и функция на рис. 2.

Из рис. 3 видно, что импульс, отвечающий формуле (23) более наполненный, шире в средней части, но асимптотически более короткий, чем импульс, полученный с помощью теории Максвелла–Блоха.

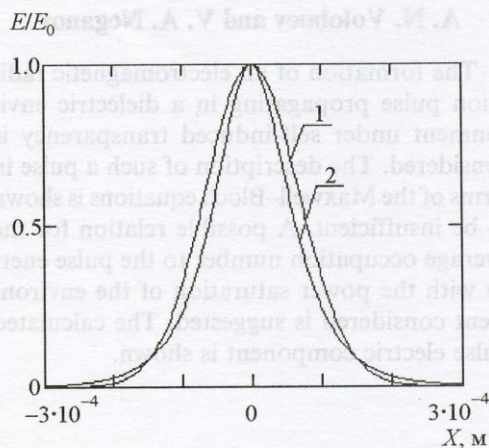


Рис. 3. Сравнение огибающих импульса электромагнитного поля, полученных на основе предлагаемой теории – кривая 1, и уравнений Максвелла–Блоха – кривая 2

Очевидно, это связано с энергетическим насыщением среды в средней части импульса.

## Приложение

Найдем соотношение скоростей волны заполнения и огибающей импульса для решения уравнения Шредингера с кубической нелинейностью.

Известно, что решение нелинейного уравнения Шредингера с кубической нелинейностью представляет собой солитон огибающей в виде обратного гиперболического косинуса. Для того чтобы выяснить, каким ограничениям должны удовлетворять частотные характеристики как волны заполнения импульса, так и огибающей, рассмотрим кратко получение односолитонного решения уравнения

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = -\omega |\varphi|^2 \varphi, \quad (П1)$$

где  $\varphi(X, t)$  – функция координаты  $X$  и времени  $t$ ,  $i$  – мнимая единица,  $\lambda$  и  $\omega$  – постоянные величины.

Будем искать решение (П1) используя метод [8]. Для этого представим неизвестную функцию  $\varphi(X, t)$  в виде:

$$\varphi(X, t) = F(X, t) \exp i(rX - \delta t), \quad (П2)$$

где  $F(X, t)$  – модуль функции  $\varphi(X, t)$ ,  $r$  и  $\delta$  – соответственно волновое число и циклическая частота волны заполнения импульса.

Подставив (П2) в (П1), получим односолитонное решение уравнения (П1) в виде:

$$\varphi(X, t) = \sqrt{\frac{k}{r}} \frac{1}{\operatorname{ch}(kX - \omega t)} \exp i(rX - \delta t), \quad (П3)$$

где  $k$  и  $\omega$  – соответственно волновое число и циклическая частота огибающей импульса.



При этом должны соблюдаться условия:

$$\omega = \lambda rk \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\lambda}{2}(r^2 - k^2). \quad (\text{П4})$$

Найдем отношение частот волны заполнения и огибающей:

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{r^2 - k^2}{rk} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{k} - \frac{k}{r} \right). \quad (\text{П5})$$

Решая уравнение (П5) относительно  $\frac{r}{k}$ , получим:

$$\frac{r}{k} = \frac{\delta}{\omega} \pm \sqrt{\left( \frac{\delta}{\omega} \right)^2 + 1}. \quad (\text{П6})$$

Знак минус в формуле (П6) физического смысла не имеет, т. к.  $\frac{r}{k} > 0$ . Из (П6) следует, что  $\frac{r}{k} > 2 \frac{\delta}{\omega}$ . Это условие можно преобразовать, учитывая, что  $V_m = \frac{\omega}{k}$  – скорость огибающей волны импульса (групповая скорость), а  $V_{ph} = \frac{\delta}{r}$  – фазовая скорость волны заполнения. Таким образом

$$V_m > 2V_{ph}. \quad (\text{П7})$$

Условие (П7) приводит к ограничению круга физических задач, решаемых с помощью уравнения (П1). Формула (П7) показывает, что уравнение (П1) нельзя использовать, например, для описания явления СИП, т. к. для этого явления может быть характерна небольшая скорость самого импульса при высокой скорости электромагнитной волны заполнения [4]. Аналогичный анализ [9] показывает, что для нелинейного уравнения Шредингера (16) соотношение скоростей обратное (П7).

## Литература

1. А. Н. Волобуев, В. А. Неганов. Письма в ЖТФ. 2002, **28**, В.3, с. 15-20.
2. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Пер. с англ. Москва, Мир, 1988, с. 545, 588, 601.
3. М. Дж. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. Пер. с англ. Москва, Мир, 1987, с. 374-378.
4. Солитоны. Под ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. Пер. с англ. Новокузнецк, Физико-математический институт, 1999, с. 85.
5. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Квантовая электродинамика. Москва, Наука, 1989, с. 192.
6. А. С. Давыдов. Квантовая механика. Москва, Физматлит, 1963, с. 335.
7. Дж. Бирнбаум. Оптические квантовые генераторы. Пер. с англ. Москва, Советское радио, 1967, с. 49, 50.
8. Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. Москва, Мир, 1977, с. 575.
9. А. Н. Волобуев, В. А. Неганов, Е. И. Нефедов. Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2002, **5**, №2, с. 34-36.

## Propagation Features of EM-Field Pulse Electric Component in Dielectric in Case of Self-Induced Transparency

A. N. Volobuev and V. A. Neganov

The formation of an electromagnetic radiation pulse propagating in a dielectric environment under self-induced transparency is considered. The description of such a pulse in terms of the Maxwell-Bloch equations is shown to be insufficient. A possible relation for the average occupation number to the pulse energy with the power saturation of the environment considered is suggested. The calculated pulse electric component is shown.