

Преобразование Ватсона для когерентного электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной сферой. I. Потенциалы Дебая в комплексной плоскости углового момента

А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин

*Институт радиофизики и электроники НАН Украины им. А. Я. Усикова,
Украина, 61085, г. Харьков, ул. Ак. Проскуры, 12*

Статья поступила в редакцию 6 августа 2003г.

Для мультипольного разложения рассеянного статистически неровной сферой когерентного электромагнитного поля электрического диполя найдено интегральное представление в комплексной плоскости углового момента. Исследованы свойства симметрии подынтегральной функции такого представления.

Для мультипольного розкладу розсіяного статистично нерівною сферою когерентного електромагнітного поля електричного диполю знайдено інтегральне зображення у комплексній площині кутового моменту. Досліджено властивості симетрії підінтегральної функції такого зображення.

Введение

Исследования по теории малых возмущений электромагнитного поля случайными неровностями поверхности раздела начались более полувека назад [1, 2] и, в основном, относились к случаю шероховатой плоскости. В последнее время внимание исследователей привлекает случай статистически неровной сферы [3-6]. Несмотря на определенный прогресс в развитии теории, необходимый математический аппарат разработан недостаточно, а систематическое и в достаточной мере строгое исследование асимптотического поведения рассеянного поля в освещенной и теневой зонах большой статистически неровной сферы до сих пор отсутствует. Настоящая работа является попыткой восполнить существующий пробел.

Постановка задачи

Цель исследования – изучение с помощью преобразования Ватсона [7] асимптотического поведения когерентного рассеянного поля, по-

лученного в работах [6, 8] в виде мультипольного разложения по собственным функциям продольного оператора (векторным зональным гармоникам). Мы будем пользоваться в качестве исходных формулами работы [8], где учтены все квадратичные по высоте неровностей возмущающие члены разложений, в том числе и содержащиеся в качестве сомножителя невозмущенный поверхностный импеданс η_0 . С целью упрощения достаточно громоздких вычислений ограничимся здесь учетом только основных поправок $\Delta_2 \eta_{eff}^E$, $\Delta_2 \eta_{eff}^M$ в эффективном импедансе [8], (формулы (54)), не исчезающих при $|\eta_0| \rightarrow 0$.

Для проведения исследований необходимо задать конкретными разложениями для полей. Мы это сделаем для случаев, когда источником поля является электрический диполь – радиальный либо горизонтальный.

Потенциалы Дебая

Известно [9], что для таких источников поля возможно введение потенциалов Дебая $r\Pi^E$ и $r\Pi^M$ (r – расстояние от центра сферы), кото-

рые связаны с напряженностями электрического и магнитного поля следующими формулами:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \nabla \times \nabla \times (\vec{r} \Pi^E(\vec{r})) + i\omega\mu \nabla \times (\vec{r} \Pi^M(\vec{r})), \quad (1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \nabla \times \nabla \times (\vec{r} \Pi^M(\vec{r})) - i\omega\epsilon \nabla \times (\vec{r} \Pi^E(\vec{r})), \quad (2)$$

где ϵ , μ и ω – диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающей сферу среды и частота поля соответственно.

Будем считать, что диполь расположен на полярной оси сферической системы координат, связанной с центром рассеивающей сферы, в точке с координатами $r = b$, $\theta = 0$, $\varphi = 0$. При этом для когерентного рассеянного поля в области $r \leq b$ потенциалы Дебая имеют следующий вид.

I. Радиальный диполь:

$$r\Pi_r^E(\vec{r}) = -\frac{\Pi_0}{kb} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \{1 + R_n^E Z_n\} \times \times \hat{\zeta}_n^{(2)}(kr) \hat{\zeta}_n^{(1)}(kb) P_n(\cos\theta), \quad (3)$$

$$r\Pi_r^M(\vec{r}) = 0.$$

II. Горизонтальный диполь, параллельный оси OX:

$$r\Pi_h^E(\vec{r}) = \Pi_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \{1 + R_n^E Z_n\} \times \times \hat{\zeta}_n^{(2)}(kr) \hat{\zeta}_n^{(1)'}(kb) P_n(\cos\theta), \quad (4)$$

$$r\Pi_h^M(\vec{r}) = -i\Pi_0 \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \{1 + R_n^M Z_n\} \times \times \hat{\zeta}_n^{(2)}(kr) \hat{\zeta}_n^{(1)}(kb) P_n(\cos\theta).$$

В выражениях (3), (4) значения коэффициентов отражения $R_n^{E,M}$ определяются форму-

лами (48), (49) из работы [8] (в последней перед $i\tilde{\eta}_{eff}^M$ стоит ошибочно “+” вместо “-”):

$$R_n^E = -\frac{\ln' \hat{\zeta}_n^{(2)}(x) + i\tilde{\eta}_{eff}^E(n)}{\ln' \hat{\zeta}_n^{(1)}(x) + i\tilde{\eta}_{eff}^E(n)}, \quad (5)$$

$$R_n^M = -\frac{1 - i\tilde{\eta}_{eff}^M(n) \ln' \hat{\zeta}_n^{(2)}(x)}{1 - i\tilde{\eta}_{eff}^M(n) \ln' \hat{\zeta}_n^{(1)}(x)}, \quad (6)$$

$$Z_n = \frac{\hat{\zeta}_n^{(2)}(x) \hat{\zeta}_n^{(1)}(kr)}{\hat{\zeta}_n^{(1)}(x) \hat{\zeta}_n^{(2)}(kr)}, \quad (7)$$

$\hat{\zeta}_n^{(1,2)}(x) = \sqrt{\pi x/2} H_{n+1/2}^{(1,2)}(x)$ – функции Риккати-Ханкеля; $\tilde{\eta}_{eff}^{E,M}(n) \equiv \eta_{eff}^{E,M}(n) \sqrt{\epsilon/\mu} = (\eta_0 + \Delta_2 \eta_{eff}^{E,M}(n)) \sqrt{\epsilon/\mu}$ – приведенный эффективный поверхностный импеданс; $\Pi_0 = J_0/8\pi kb$, где $J_0 = IL$, I – ток, а L – длина диполя, $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$; $x = ka$, a – радиус “средней” сферы.

С помощью теоремы Коши о вычетах можно убедиться, что эти ряды выражаются через интеграл по контуру C' [10], который представляет собой петлю, охватывающую положительную вещественную полуось левее точки $\nu_1 = 1/2$ для радиального диполя и левее $\nu_1 = 3/2$ – для горизонтального ($\nu_1 = n + 1/2$ продолжено на комплексные значения n).

Действительно,

$$r\Pi_r^E(\vec{r}) = -\frac{\Pi_0}{kb} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} J_r^E,$$

$$r\Pi_h^E(\vec{r}) = \Pi_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} J_h^E, \quad (8)$$

$$r\Pi_h^M(\vec{r}) = -i\Pi_0 \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} J_h^M,$$

где

$$J_\alpha^\beta = \frac{i}{2} \int_{C'} f_\alpha^\beta(\nu_1) d\nu_1 - 2\pi i \delta_{\alpha h} \cdot \text{Res} f_h^\beta(\nu_1) \Big|_{\nu_1=1/2}, \quad (9)$$

$$f_{\alpha}^{\beta}(v_1) = \frac{2v_1}{\cos(\pi v_1)} X^{\beta}(v_1) \zeta_{v_1-1/2}^{(2)}(kr) \times \Phi_{\alpha \zeta_{v_1-1/2}}^{\beta(1)}(kb) P_{v_1-1/2}(-\cos\theta), \quad (10)$$

$$X^{\beta}(v_1) = 1 + R_{v_1-1/2}^{\beta} Z_{v_1-1/2}, \quad (11)$$

$$\Phi_r^{\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \beta = E \\ 0 & \text{при } \beta = M \end{cases}, \quad (12)$$

$$\Phi_h^{\beta} = (v_1^2 - 1/4)^{-1} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial kb} & \text{при } \beta = E \\ 1 & \text{при } \beta = M \end{cases},$$

а индексы α и β принимают значения $\alpha = (r, h)$, $\beta = (E, M)$.

В формуле (9) выбран единый контур C' . Для этого из интеграла по C' вычитается вклад от вычета в точке $v_1 = 1/2$ для случая горизонтального диполя, точнее та его часть, которая зависит от $z = \cos\theta$ (см. [10], с. 89):

$$\text{Res } f_h^{\beta}(1/2) = -\pi^{-1} \left\{ (v_1^2 - 1/4) X^{\beta}(1/2) \zeta_0^{(2)}(kr) \times \Phi_{h \zeta_0}^{\beta(1)}(kb) \right\} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{dP_v(-z)}{dv}. \quad (13)$$

Воспользовавшись формулой (8.6.20) из работы [11], с. 157, получим:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{d}{dv} P_v(-z) = \ln \frac{1-z}{2}. \quad (14)$$

Этот результат следует подставить в (9). Таким образом, цель исследования сводится к вычислению контурного интеграла по C' в формуле (9).

Симметрия подынтегрального выражения

Для преобразования Ватсона необходимо знать поведение $f_{\alpha}^{\beta}(v_1)$ при продолжении в комплексную плоскость $v_1 = n + 1/2$. Коэффици-

циенты $R_{v_1-1/2}^{E,M}$, определяемые формулами (5), (6), отличаются от достаточно изученного случая гладкой сферы добавками $\Delta_2 \eta_{eff}^{E,M}(n)$ в эффективном импедансе $\eta_{eff}^{E,M}(n)$ к невозмущенному значению η_0 , которые зависят от спектрального параметра n . Поэтому необходимым шагом в решении задачи является аналитическое продолжение $\Delta_2 \eta_{eff}^{E,M}(n)$ на комплексные значения $n = v_1 - 1/2$ и исследование поведения этой функции в комплексной плоскости v_1 .

Согласно [8], можно записать:

$$i \Delta_2 \tilde{\eta}_{eff}^{E,M}(n) = \sum_{n_4=0}^{\infty} \sum_{l=n-n_4}^{n+n_4} F^{E,M}(n, n_4, l) \equiv F^{E,M}(n), \quad (15)$$

где

$$F^{E,M}(n, n_4, l) = A G_{n, n_4, l}^{\pm} B_{n, n_4, l}^{\pm}, \quad (16)$$

$$A = \frac{\pi}{2a^2} (k\sigma)^2 (2n_4 + 1) \tilde{W}(n_4/a), \quad (17)$$

$$B_{n, n_4, l}^{+} = i \tilde{\eta}_0 x L_{n, n_4, l}^{+(1)} - x L_{n, n_4, l}^{+}, \quad (18)$$

$$B_{n, n_4, l}^{-} = i \tilde{\eta}_0 x L_{n, n_4, l}^{-} + x L_{n, n_4, l}^{-(1)}. \quad (19)$$

В формуле (16) верхнему индексу “+” справа отвечает индекс E слева, а “-” справа – индекс M слева. Величины $G_{n, n_4, l}^{\pm}$, $L_{n, n_4, l}^{\pm(1)}$, $L_{n, n_4, l}^{\pm}$ определены в работе [8] формулами (33)–(38). Заметим, что в (38) во втором “мигающем” множителе, $1 \pm (-1)^{n-n_4-l}$, ошибочно пропущен нижний знак “-”, а в первом – круглая скобка должна быть закрыта до возведения в степень, $(-1)^{n-n_4-l}$. В формуле (37) в круглых скобках должна быть первая степень $-1/x$, а не $-1/x^2$.

Область суммирования по целым положительным l и n_4 в (15) есть полуполоса, ограниченная прямыми $l = n + n_4$, $l = n_4 - n$, $l = n - n_4$ (рис. 1).

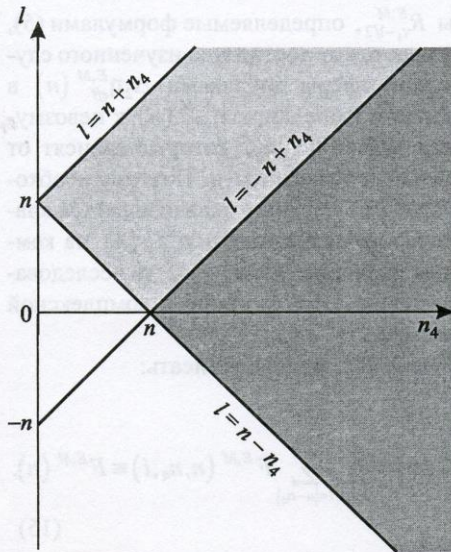


Рис. 1. Область суммирования в формуле (15)

Предварительно преобразуем (15), используя известный прием, в основе которого лежит тождественное равенство нулю коэффициентов Клебша-Гордана (ККГ), если физические значения моментов n, n_4, l не подчиняются “правилу треугольника” ([12], часть I, с. 153). Для таких значений выражение (16) обращается в нуль. В формуле (15) перейдем во внутренней сумме по l к суммированию по $p = l - n$. Верхний предел суммирования по p при этом равен $p = n_4$, а нижний – $p = -n_4$, если $n \geq n_4$, или $p = n_4 - 2n$, если $n < n_4$. В соответствии с вышесказанным положим нижний предел $p = -n_4$, независимо от знака неравенства, связывающего n и n_4 :

$$F^{E,M}(n) = \sum_{n_4=0}^{\infty} \sum_{p=-n_4}^{n_4} F^{E,M}(n, n_4, n+p). \quad (20)$$

Теперь область суммирования по n_4 и p есть площадь сектора между лучами $l = n + n_4, l = n - n_4, n_4 > 0$. Для дальнейших преобразований выделим из величин $G_{n,n_4,l}^{\pm}, B_{n,n_4,l}^{\pm}$ в качестве сомножителей коэффициенты $C(n, n_4, l; 0, 0, 0)$ и $C(n, n_4, l; 1, 0, 1)$, обозначив их для краткости $C(0)$ и $C(1)$, соответственно:

$$G_{n,n_4,l}^{\pm} = f_{iG}^{\pm}(n, n_4, l)C(1) + f_{0G}^{\pm}(n, n_4, l)C(0), \quad (21)$$

$$L_{n,n_4,l}^{\pm(1)} = f_{iL}^{\pm(1)}(n, n_4, l)C(1), \quad (22)$$

$$L_{n,n_4,l}^{\pm} = f_{iL}^{\pm}(n, n_4, l)C(1) + f_{0L}^{\pm}(n, n_4, l)C(0), \quad (23)$$

где, согласно результатам [8],

$$f_{iG}^{\pm}(n, n_4, l) = [1 \mp (-1)^{n_4-p}] \left[-1/x + \hat{\Omega}_i^+ / \hat{\Omega}_i^- \right] + [1 \pm (-1)^{n_4-p}] \left[-1/x - \hat{\Omega}_i^- / \hat{\Omega}_i^+ \right], \quad (24)$$

$$f_{0G}^{\pm}(n, n_4, l) = \left(\frac{+1}{-i\tilde{\eta}_0} \right) \sqrt{n(n+1)l(l+1)} \times \frac{1 + (-1)^{n_4-p}}{x^2} \frac{1}{\hat{\Omega}_i^{\pm}}, \quad (25)$$

$$f_{iL}^{+(1)} = f_{iL}^- = \frac{1}{x} \left(i\tilde{\eta}_0 - \frac{1}{x} \right) \sim \text{const}, \quad (26)$$

$$f_{iL}^{-(1)} = -f_{iL}^+ = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{i\tilde{\eta}_0}{x} \right) \sim \text{const}, \quad (27)$$

$$f_{0L}^+ = (i/\tilde{\eta}_0) f_{0L}^- = \sqrt{n(n+1)l(l+1)} / x^3. \quad (28)$$

В выражениях (21)-(29) везде $l = n + p$. В формулах (26), (27) “const” означает независимость от n . При преобразовании исходных величин (33)-(37) из [8] использованы функции Риккати-Ханкеля $\hat{\zeta}_n^{(1,2)}(x)$ вместо сферических функций Ханкеля $\zeta_n^{(1,2)}(x)$ и введены обозначения:

$$\hat{\Omega}_i^+ = \ln' \hat{\zeta}_i^{(1)}(x) + i\tilde{\eta}_0, \quad \hat{\Omega}_i^- = 1 - i\tilde{\eta}_0 \ln' \hat{\zeta}_i^{(1)}(x). \quad (29)$$

Аналитическое продолжение ККГ на комплексные значения моментов можно найти в [12-16]. Для электромагнитного случая, когда магнитные квантовые числа равны 0 и 1, оно подробно изучено в нашей работе [15]. Выбор ветвей многозначных функций и разрезов в комплексной плоскости n изложен в приложении А к настоящей работе. Аналитическое продолжение $\hat{\zeta}_n^{(1,2)}(x)$ на комплексные значения n достаточно подробно содержится во II томе монографии [17]. Условия однозначного продолжения сформулированы в теореме Карлсона ([10], с. 378; [13], с. 73).

Записав суммирование по p в обратном порядке, можно преобразовать (20) к виду:

$$F^{E,M}(n) = \sum_{n_4=0}^{\infty} \sum_{p=-n_4}^{n_4} F^{E,M}(n, n_4, n-p). \quad (30)$$

Исследуем поведение (30) при замене

$$n \rightarrow -n-1, \quad (v_1 \rightarrow -v_1). \quad (31)$$

После этой замены вместо (30) получим:

$$F^{E,M}(-n-1) = \sum_{n_4=0}^{\infty} \sum_{p=-n_4}^{n_4} F^{E,M}(-n-1, n_4, -n-1-p). \quad (32)$$

В Приложении А показано, что для аналитического продолжения ККГ можно выбрать ветвь, обладающую “зеркальной” симметрией, что соответствует стандартному выбору фаз ККГ в области физических значений моментов. Однако в формуле (30) ККГ в комбинации с другими выражениями образуют однозначные функции в комплексной плоскости n . Для доказательства представим $F^{E,M}(n, n_4, n+p)$ в виде четной (e) и нечетной (o) части по отношению к значениям $n_4 - p$:

$$F^{E,M}(n, n_4, n+p) = \sum_{\pm} \frac{1 \pm (-1)^{n_4-p}}{2} F^{E,M(e,o)}(n, n_4, n+p), \quad (33)$$

где знаку “+” соответствует индекс (e), а знаку “-” индекс (o). На основании (16)-(19) и (21)-(28) нетрудно получить:

$$F^{E(e)}(n, n_4, l) = 2A \left[(-1/x - \hat{\Omega}_l^- / \hat{\Omega}_l^+) A_1 + \sqrt{n(n+1)l(l+1)} / (x^2 \hat{\Omega}_l^+) \right] \times \\ \times \left[(1 - \tilde{\eta}_0^2) A_1 - \sqrt{n(n+1)l(l+1)} / x^2 \right] \times \\ \times C^2(n, n_4, l; 0, 0, 0), \quad (34)$$

$$F^{M(e)}(n, n_4, l) = 2A \left[(-1/x + \hat{\Omega}_l^+ / \hat{\Omega}_l^-) A_1 - i\tilde{\eta}_0 \sqrt{n(n+1)l(l+1)} / (x^2 \hat{\Omega}_l^-) \right] \times \\ \times \left[(1 - \tilde{\eta}_0^2) A_1 + \tilde{\eta}_0^2 \sqrt{n(n+1)l(l+1)} / x^2 \right] \times \\ \times C^2(n, n_4, l; 0, 0, 0), \quad (35)$$

$$F^{E(o)}(n, n_4, l) = 2A(1 - \tilde{\eta}_0^2) (-1/x + \hat{\Omega}_l^+ / \hat{\Omega}_l^-) \times \\ \times A_2^2 C^2(n-1, n_4-1, l-1; 0, 0, 0), \quad (36)$$

$$F^{M(o)}(n, n_4, l) = 2A(1 - \tilde{\eta}_0^2) (-1/x - \hat{\Omega}_l^- / \hat{\Omega}_l^+) \times \\ \times A_2^2 C^2(n-1, n_4-1, l-1; 0, 0, 0). \quad (37)$$

При этом для краткости обозначаем $n+p=l$, а величины $A_1 = A_1(n, n_4, l)$ и $A_2 = A_2(n, n_4, l)$ приведены в Приложении А.

Для функций Риккати-Ханкеля имеем ([17], с. 90):

$$\hat{\zeta}_{n+p}^{(1,2)}(x) = \hat{\zeta}_{-n-1-p}^{(1,2)}(x) \exp(\mp i(n+p+1/2)\pi), \quad (38)$$

$$\ln' \hat{\zeta}_{n+p}^{(1,2)}(x) = \ln' \hat{\zeta}_{-n-1-p}^{(1,2)}(x).$$

Следовательно, в силу линейности операторов (29)

$$\hat{\Omega}_{n+p}^{\pm} = \hat{\Omega}_{-n-1-p}^{\pm}. \quad (39)$$

В выражениях (34), (35) можно вынести за квадратные скобки множитель $\sqrt{n(n+1)l(l+1)}$. Получаемые при этом сомножители в (34) и (35) являются однозначными функциями n , инвариантными по отношению к замене $n \rightarrow -n-1$, $p \rightarrow -p$ (или $n \rightarrow -n-1$, $l \rightarrow -l-1$). Это легко видеть на основании (39) и доказанной в Приложении А инвариантности комбинаций (A16). Аналогичное утверждение верно и для (36), (37) на том же основании. В результате,

$$F^{E,M}(-n-1, n_4, -n-1-p) = F^{E,M}(n, n_4, n+p), \quad (40)$$

а в силу тождественности (30) и (20) получаем, что аналитическое продолжение (20) для добавки в эффективном импедансе,

$$F^{E,M}(-n-1) = F^{E,M}(n), \quad (41)$$

симметрично по отношению к преобразованию (31). Из (41) и $\tilde{\eta}_0 = \text{const}$ следует, что (5) и (6) симметричны,

$$R_{-n-1}^{E,M} = R_n^{E,M}. \quad (42)$$

Это влечет за собой, с учетом (11), равенство

$$X^\beta(-n-1) = X^\beta(n). \quad (43)$$

Анализ остальных сомножителей в (10) при замене (31) повторяет случай гладкой сферы, приводящий и в нашем случае к нечетности $f_\alpha^\beta(v_1)$:

$$f_\alpha^\beta(-v_1) = -f_\alpha^\beta(v_1). \quad (44)$$

Следующим этапом исследования является выбор способа деформации контура C' в (9) с целью эффективного вычисления асимпто-

тики, чему посвящена следующая часть работы. Необходимые для этого асимптотики функций Лежандра приведены в Приложении В.

Приложение А Симметрия коэффициентов Клебша-Гордана

Полученное в работе [15] (часть II) представление для коэффициента Клебша-Гордана с нулевыми проекциями моментов запишем в виде:

$$C(j_1, j_2, j_3; 0, 0, 0) = \left[\frac{1+z_1+z_2}{\pi(1+z_0)} f(z_1)f(z_2)f(z_3)/f(z_0) \right]^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}z_3\right), \quad (A1)$$

где $z_0 = j_1 + j_2 + j_3$, $z_i = z_0 - 2j_i$ ($i=1, 2, 3$),

$f(z) = \Gamma\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)$. Отметим здесь в качестве уточнения к работе [15] (часть II), что условие получения асимптотики (A1) есть условие применимости формулы Стирлинга к каждой из этих гамма-функций: $|z_i| \gg 1$ ($i=0, 1, 2, 3$), а не $|j_i| \gg 1$, ($i=1, 2, 3$), как в [15] (часть II). Коэффициент $C(j_1, j_2, j_3; 1, 0, 1)$ связан с выражением (A1) соотношением:

$$C(j_1, j_2, j_3; 1, 0, 1) = A_1 C(j_1, j_2, j_3; 0, 0, 0) + A_2 C(j_1-1, j_2-1, j_3-1; 0, 0, 0), \quad (A2)$$

где $A_{1,2}$ определяются формулой (29) [15] (часть II)

$$A_1 = \frac{y_1 - y_2 + y_3}{2\sqrt{y_1 y_3}}, \quad (A3)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{(1+z_1+z_2)z_1 z_2 z_3}{(-1+z_1+z_2)z_0 y_1 y_3} (z_0^2 - 1) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$y_i = j_i(j_i + 1), \quad (i=1, 2, 3).$$

Оба коэффициента Клебша-Гордана входят в решение рассматриваемой задачи со значениями параметров $j_1 = n$, $j_2 = n_4$, $j_3 = n + p$, p – целые числа: $n_4 = 0, 1, 2, \dots; -n_4 \leq p \leq n_4$. Для доказательства рассматриваемого ниже типа симметрии удобно записать

$$C(n, n_4, n + p; 0, 0, 0) = \{\pi^{-1} f(n_4, p) g(n, n_4, p)\}^{1/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n_4 - p)\right), \quad (A4)$$

где

$$f(n_4, p) = \left[\Gamma\left(\frac{n_4 + p}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_4 - p}{2} + \frac{1}{2}\right) \right] \times \left[\Gamma\left(\frac{n_4 + p}{2} + 1\right) \times \Gamma\left(\frac{n_4 - p}{2} + 1\right) \right]^{-1} \quad (A5)$$

четная функция p и не зависит от n , а

$$g(n, n_4, p) = \frac{\left(n + \frac{n_4 + p}{2}\right) \left(n + p + \frac{1}{2}\right)}{\left(n - \frac{n_4 - p}{2}\right) \left(n + \frac{n_4 + p}{2} + \frac{1}{2}\right)} \times \frac{\left(n - \frac{n_4 - p}{2}\right) \left(n - \frac{n_4 - p}{2} + 1\right) \dots \left(n + \frac{n_4 + p}{2} - 1\right)}{\left(n - \frac{n_4 - p}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{n_4 - p}{2} + \frac{3}{2}\right) \dots \left(n + \frac{n_4 + p}{2} - \frac{1}{2}\right)} \quad (A6)$$

При этом учтено свойство Γ -функции $\Gamma(z + n_4)/\Gamma(z) = z(z + 1) \dots (z + n_4 - 1)$ и тот факт, что p и n_4 – целые числа. Нули числителя и знаменателя $g(n, n_4, p)$ являются точками ветвления функции $C(n, n_4, n + p; 0, 0, 0)$ в комплексной плоскости n . С шагом $1/2$ они заполняют интервал $\left(-\frac{n_4 + p}{2} - \frac{1}{2}, \frac{n_4 - p}{2} - \frac{1}{2}\right)$. Совместив разрез плоскости n с этим интервалом, будем проводить отсчет аргумента от положительной вещественной полуоси.

Рассмотрим поведение функции (A3) при преобразовании

$$n \rightarrow -n - 1, \quad p \rightarrow -p. \quad (A7)$$

Для него

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(n_4 - p)\right) \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}(n_4 + p)\right) = (-1) \cos\left(\frac{\pi}{2}(n_4 - p)\right), \quad (A8)$$

$$g(-n - 1, n_4, -p) = \frac{\left(-n + \frac{n_4 - p}{2} - 1\right) \left(-n - p - \frac{1}{2}\right)}{\left(-n - \frac{n_4 + p}{2} - 1\right) \left(-n + \frac{n_4 - p}{2} - \frac{1}{2}\right)} \times \frac{\left(-n - \frac{n_4 + p}{2} - 1\right) \left(-n - \frac{n_4 + p}{2}\right) \dots \left(-n + \frac{n_4 - p}{2} - 2\right)}{\left(-n - \frac{n_4 + p}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(-n - \frac{n_4 + p}{2} + \frac{1}{2}\right) \dots \left(-n + \frac{n_4 - p}{2} - \frac{3}{2}\right)} \quad (A9)$$

Сравнивая (A9) и (A6), видим, что каждому двучлену $(n + \alpha)$ из (A6) отвечает в (A9) двучлен $-(n + \alpha) = e^{i\pi}(n + \alpha)$. Знак в показателе экспоненты зависит от направления обхода соответствующей точки ветвления. Поскольку число таких двучленов в числителе и знаменателе одинаково, $(n_4 + 2)$, то аргументы $g(-n - 1, n_4, -p)$ и $g(n, n_4, p)$ совпадают, так что

$$g^{1/2}(-n - 1, n_4, -p) = g^{1/2}(n, n_4, p). \quad (A10)$$

Поэтому для

$$C(-n - 1, n_4, -n - p - 1; 0, 0, 0) = (-1)^{n_4} C(n, n_4, n + p; 0, 0, 0) \quad (A11)$$

получаем симметрию, названную авторами [18] для физических значений n “зеркальной”. Как указывают авторы [18] (с. 179), она следует из выбора стандартной системы фаз собственных волновых функций углового момента.

Аналогичным образом формула (A2) записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 C(n, n_4, n+p; 1, 0, 1) &= \{\pi(n+p)(n+p+1)n(n+1)\}^{-1/2} \times \\
 &\times \left\{ \frac{1}{2} [(n+p)(n+p+1) + n(n+p) - n_4(n_4+1)] \times \right. \\
 &\times f^{1/2}(n_4, p) g^{1/2}(n, n_4, p) \cos\left(\frac{\pi}{2}(n_4-p)\right) + \\
 &+ 2(n+p+1/2) f^{-1/2}(n_4, p) g^{-1/2}(n, n_4, p) \times \\
 &\left. \times \sin\left(\frac{\pi}{2}(n_4-p)\right) \right\}. \quad (A12)
 \end{aligned}$$

Точки ветвления функции в первой фигурной скобке $-p-1, -p, -1, 0$. Соединив их разрезом и приняв условие $\arg n = 0$ на положительной вещественной полуоси правее разреза, с учетом ранее выбранной ветви функции $g^{1/2}(n, n_4, p)$ однозначно определим ветвь коэффициента $C(n, n_4, n+p; 1, 0, 1)$ в комплексной плоскости n с разрезом $[-\max((n_4+p+1)/2, p+1, 1), \max((n_4+p+1)/2, -p, 0)]$.

Применим преобразование (A7) к (A12). Для первого сомножителя получим $\arg(n+p) \times (n+p+1)n(n+p) = \sum \alpha_i$, $\arg(-n-p-1) \times (-n-p)(-n-1)(-n) = \sum \alpha_i + 4\pi$, где α_i – аргумент каждого из сомножителей до преобразования (A7). Следовательно, первый сомножитель инвариантен при преобразовании (A7). Далее,

$$\begin{aligned}
 2(n+p+1/2) &\rightarrow 2(-n-p-1/2) = \\
 &= -2(n+p+1/2), \quad (A13)
 \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(n_4-p)\right) \rightarrow -(-1)^{n_4} \sin\left(\frac{\pi}{2}(n_4-p)\right). \quad (A14)$$

Принимая во внимание (A8), (A10), (A13) и (A14), получим соотношение “зеркальной” симметрии для ККГ с проекциями моментов 1, 0, 1:

$$\begin{aligned}
 C(-n-1, n_4, -n-p-1; 1, 0, 1) &= \\
 &= (-1)^{n_4} C(n, n_4, n+p; 1, 0, 1). \quad (A15)
 \end{aligned}$$

В работах [12] (часть II) проблема разрезов должна была обсуждаться при выводе формулы (A18) (27) из-за выбора ветви ($m=m_s=0$) корня $\{(-J-t)(-J-t-1)\}^{1/2}$ и при выводе (A14) (26), где точки ветвления определяются величиной s . Авторы [12] (II) свой выбор ветви не обсуждают, хотя полученный ими тип симметрии ККГ является следствием этого выбора.

В выражение (20) для слагаемого $i\Delta_2 \tilde{\Gamma}_{\text{eff}}^{E,M}(n)$, определяющего эффективный импеданс, зависимость от n , не считая функций Ω_{n+p}^{\pm} , входит в виде следующих комбинаций:

$$y_1, y_3, A_1 \{y_1 y_3\}^{-1/2}, C^2(n, n_4, n+p; 0, 0, 0), \quad (A16)$$

$$A_2^2 C^2(n-1, n_4-1, n+p-1; 0, 0, 0).$$

Из определений входящих сюда функций следует, что эти комбинации являются однозначными функциями во всей плоскости комплексного переменного n . Все они также инвариантны относительно замены

$$n \rightarrow -n-1, \quad p \rightarrow -p. \quad (A17)$$

Действительно,

$$y_1 = n(n+1) \rightarrow (-n-1)(-n) = y_1, \quad (A18)$$

$$\begin{aligned}
 y_3 &= (n+p)(n+p+1) \rightarrow \\
 &\rightarrow (-n-1-p)(-n-p) = y_3.
 \end{aligned}$$

Из (A11) следует, что

$$\begin{aligned}
 C^2(-n-1, n_4, -n-p-1; 0, 0, 0) &= \\
 &= C^2(n, n_4, n+p; 0, 0, 0) \quad (A19)
 \end{aligned}$$

независимо от выбора ветви. Аналогично из равенства

$$A_2 C(n-1, n_4-1, n+p-1; 0, 0, 0) = \\ = \{\pi y_1 y_3\}^{-1/2} 2(n+p+1/2) f^{-1/2}(n_4, p) \times \\ \times g^{-1/2}(n, n_4, p) \sin\left(\frac{\pi}{2}(n_4-p)\right), \quad (A20)$$

четности $f(n_4, p)$ по p , формул (A12), (A13), (A9) следует инвариантность относительно замены (A17) функции $A_2^2 C^2(n-1, n_4-1, n+p-1; 0, 0, 0)$.

Приложение В Асимптотика функций Лежандра

В качестве аналитического продолжения функций Лежандра используем их представление через гипергеометрический ряд

$$P_\nu(z) = F(-\nu, \nu+1, 1; (1-z)/2), \quad (|1-z| < 2), \quad (B1)$$

$$Q_\nu(z) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)} (2z)^{-\nu-1} \times \\ \times F(\nu/2+1, \nu/2+1/2; \nu+3/2; z^{-2}), \quad (|z| > 1), \quad (B2)$$

который является аналитической функцией ν ([19], с. 126, формула (3)). Для них известны асимптотики:

$$P_\nu(x+i0) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)} \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right)^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \cos[(\nu+1/2)\theta - \pi/4] + O(\nu^{-1}) \right\}, \quad (B3)$$

$$Q_\nu(x+i0) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)} \left(\frac{2}{\pi} \sin \theta\right)^{-1/2} \times \\ \times e^{-i(\nu+1/2)\theta - i\pi/4} \left[1 + O(\nu^{-1}) \right], \quad (B4)$$

$\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$, $|x| < 1$, $|\nu| \gg 1$. При малых углах $\theta \ll 1$ воспользуемся выражением (10) из [19], с. 148, полагая $\mu = 0$:

$$P_\nu(\cos \theta) = J_0(\alpha) \left[1 + O(\theta^2/4) \right], \quad (B5)$$

где $\alpha = (2\nu+1)\sin(\theta/2)$. Если $\theta \ll 1$, а $\alpha \gg 1$, то ([5], с. 163, формула (2)) выражение (B5) переходит в

$$P_\nu(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\nu\theta}} \cos[(\nu+1/2)\theta - \pi/4]. \quad (B6)$$

Если же $\theta \ll 1$ и $\alpha \ll 1$, то из (B5) имеем:

$$P_\nu(\cos \theta) = 1 - \frac{(\nu+1/2)^2 \theta^2}{4} + \dots = 1 + O(\alpha^2/4). \quad (B7)$$

Отсюда для не слишком малых углов θ и $\pi - \theta$ при $|\nu| \gg 1$ получаем:

$$\sec \pi \nu_1 P_{\nu_1-1/2}(-\cos \theta) \approx \nu_1^{-1/2} e^{-\theta|\operatorname{Im} \nu_1|}, \quad (B8)$$

а для $\pi - \theta \ll 1 -$

$$\sec \pi \nu_1 P_{\nu_1-1/2}(-\cos \theta) \approx e^{-\pi|\operatorname{Im} \nu_1|}. \quad (B9)$$

Работа выполнена в рамках проекта УНТЦ № 2116.

Литература

1. Е. Л. Фейнберг. В сб.: Исследования по распространению радиоволн. Под ред. Б. А. Введенского. Москва-Ленинград, Изд-во АН СССР, 1948, № 2, с. 97-215.
2. S. O. Rice. Commun. Pure Appl. Math. 1951, 4, № 2/3, pp. 351-378.
3. R. Schiffer. J. Opt. Soc. Am. 1989, A6, № 2, pp. 385-402.

4. H. Ogura, N. Takahashi. J. Math. Phys. 1990, **31**, № 1, pp. 61-75.
5. A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazynin. IEE Proc. 1991, **H-138**, pp. 147-150.
6. A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazynin. J. Electr. Wav. Appl.(JEWA), 1991, **5**, № 8, pp. 897-907.
7. G. N. Watson. Proc. R. Soc. 1918, **A95**, p. 83.
8. А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин. Радиофизика и радиоастрономия. 1997, **2**, № 2, с. 119-126.
9. Л. Фелсен, Н. Маркувиц. Излучение и рассеяние волн. Москва, Мир, 1978, т. 1, 547 с.; т. 2, 555 с.
10. Р. Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. Москва, Мир, 1969, 608 с.
11. М. Абрамовиц, И. Стиган. Справочник по специальным функциям. Москва, Наука, 1979, 831 с.
12. J. M. Charap, E. J. Squires. Ann. Phys. I, 1962, **20**, pp. 145-156; II, 1963, **21**, pp. 8-28.
13. П. Коллинз, Э. Сквайрс. Полюса Редже в физике частиц. Москва, Мир, 1971, 352 с.
14. M. Andrews, J. Gunson. J. Math. Phys. 1964, **5**, № 1, pp. 1391-1400.
15. А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин. Радиофизика и радиоастрономия. 2002, **7**, № 1, с. 74-80; 2002, **7**, № 1, с. 81-87.
16. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. Квантовая теория углового момента. Ленинград, Наука, 1975, 439 с.
17. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. II. Москва, Наука, 1974, 296 с.
18. А. П. Юцис, А. Ю. Савукина, А. А. Бандзайтис, А. В. Каросене, Э. П. Нашленас. Литов. физ. сборник. 1964, **IV**, № 2, с. 172-185.
19. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. I. Москва, Наука, 1973, 296 с.

Watson Transformation for the Coherent Electromagnetic Field Scattered by a Statistically Rough Sphere. I. Debye's Potentials in the Complex Plane of an Angular Momentum

A. S. Bryukhovetski, L. A. Pazynin

The integral representation is considered in the complex plane of an angular momentum for multipole expansion of an electric-dipole coherent electromagnetic field scattered by a statistically rough sphere. The symmetry properties of the integrand in this representation are studied.