Радиофизика и радиоастрономия, 2004, т. 9, №1, стр. 57-65

УДК 537.8

Двумерная тензорная функция Грина для среднего поля двух изотропных полупространств со случайной границей раздела

В. Н. Кочин

Радиоастрономический институт НАН Украины,
Украина, 61002, г. Харьков, ул. Краснознаменная, 4
E-mail: kochin@rian.ira.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 2 июля 2003 г.

Получена двумерная тензорная функция Грина для среднего электромагнитного поля, которое создается линейным распределением элементарных электрических диполей, расположенных вблизи случайной границы раздела двух изотропных магнитодиэлектрических полупространств. Неровности поверхности раздела предполагались малыми и пологими.

Одержано двовимірну тензорну функцію Гріна для середнього електромагнітного поля, що збуджується лінійним розподілом елементарних електричних диполів, розташованих поблизу шорсткої поверхні поділу двох ізотропних магнітодіелектричних напівпросторів. Нерівності поверхні поділу припускалися малими та пологими.

Введение

В [1] предложен способ получения двусторонних граничных условий для среднего электромагнитного поля в случае шероховатой поверхности в приближении Буре теории многократного рассеяния. Подобные граничные условия наиболее целесообразно использовать при исследовании задач дифракции, в которых рассматривается бесконечная последовательность многократных рассеяний на случайных возмущениях границы. К этому классу задач, в частности, относятся задачи распространения электромагнитных волн в областях, ограниченных двумя и более рассеивающими границами, или в полубесконечных областях, когда роль второй границы играет какой-либо “возвращающий” фактор [2] (например, диэлектрический [3] или металлический цилиндр). В последнем случае волна, однократно рассеянная на неровностях границы раздела, после рассеяния на цилиндре снова рассеивается на неровностях границы и т. д. Для решения задачи рассеяния электромагнитной волны на металлическом цилиндре, расположенном вблизи границы раздела двух сред, удобно использовать метод интегральных уравнений [4]. В этом случае ищется решение интегрального уравнения относительно тока, наведенного на поверхности цилиндра, а влияние окружающей цилиндр среды учитывается соответствующей функцией Грина, которая входит в ядро интегрального уравнения. Для такой задачи функция Грина должна удовлетворять неоднородному волновому уравнению и граничным условиям на границе, разделяющей полупространства. Таким образом, возмущение границы раздела необходимо учитывать только при решении вспомогательной задачи нахождения функции Грина.

Цель настоящей работы – получение двумерной тензорной функции Грина для среднего электромагнитного поля, которое создается линейным распределением электрических диполей [5],

© В. Н. Кочин, 2004

расположенных вблизи случайной границы раздела двух изотропных магнитодиэлектрических полупространств.

Для случая импедансной поверхности в [6] определены первые два ненулевые момента трехмерной функции Грина, которая является более общей с точки зрения размерности пространства.

Отметим, что двусторонние граничные условия для среднего поля в случае шероховатой границы между изотропными полупространствами в [1] приведены с ошибками (формулы (15)), что делает невозможным их применение. В используемых ниже граничных условиях эти ошибки устранены.

Постановка задачи

Пусть $z=\varsigma(x, y)$ – уравнение поверхности, разделяющей два изотропных полупространства $1\ (z<\varsigma)$ и $2\ (z>\varsigma)$, диэлектрическую и магнитную проницаемости которых обозначим соответственно (ε_1, μ_1) и (ε_2, μ_2). Функция $\varsigma(x, y)$ описывает случайные отклонения границы раздела от средней границы, совпадающей с плоскостью $z=0$. Предположим, что большие отклонения границы нереализуемы $(|\varsigma_{\max}|/\lambda <<1$, λ – длина волны падающего поля) и неровности – пологие $(|\partial\varsigma/\partial x|<<1$, $|\partial\varsigma/\partial y|<<1)$. Будем считать, что рассматриваемая поверхность является статистически однородной и изотропной, т. е. функция корреляции неровностей зависит только от расстояния между ними.

Рассмотрим бесконечный линейный источник электромагнитного поля, состоящий из элементарных электрических токов, амплитуда и фаза которых постоянны вдоль линии источника. Пусть линия источника параллельна оси Ox а ориентация диполя в плоскости $x=\mathrm{const}$ произвольная. Расстояние от плоскости $z=0$ до источника – z_0. Средние поля в точке $\vec{\rho}=\vec{\rho}(y, z)$, создаваемые источником, можно полностью описать с помощью электрического векторного потенциала $\vec{A}(\vec{\rho})$, который должен удовлетворять следующему уравнению:

$$\Delta\vec{A}(\vec{\rho})+k^2\varepsilon(z)\mu(z)\vec{A}(\vec{\rho})=-\frac{4\pi}{c}\mu(z)\,\vec{j}(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0), \qquad (1)$$

где $\vec{j}(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0)$ – элементарный ток, $\vec{\rho}_0=\vec{\rho}_0(y_0, z_0)$ – радиус-вектор положения источника в плоскости $x=0$;

$$\varepsilon(z)=\begin{cases}\varepsilon_1, & z<0,\\ \varepsilon_2, & z>0,\end{cases} \qquad \mu(z)=\begin{cases}\mu_1, & z<0,\\ \mu_2, & z>0.\end{cases}$$

Средние поля на средней границе, совпадающей с плоскостью $z=0$, согласно [1] должны удовлетворять следующим двусторонним граничным условиям:

$$\begin{aligned}\left\{\vec{E}_t(\vec{r})\right\}=&\frac{\sigma^2}{ik\varepsilon_1}(k^2\varepsilon_1\mu_1+\nabla\nabla)\vec{e}_z\times\frac{\partial}{\partial z}\left\{\vec{H}(\vec{r})\right\}+\\ &+\sigma^2\frac{ikc}{4\pi}(\mu_2-\mu_1)\vec{e}_z\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\Big[\hat{G}^2_{me}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{R}_H(\vec{r},\vec{r}')\times\vec{e}_z-\\ &-\hat{G}^2_{em}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{R}_E(\vec{r},\vec{r}')\times\vec{e}_z\Big]\mathrm{d}\vec{r}'-\\ &-\sigma^2\frac{c}{4\pi}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\nabla\vec{e}_z\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\Big[\hat{G}^2_{ee}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{R}_H(\vec{r},\vec{r}')\times\vec{e}_z-\\ &-\hat{G}^2_{em}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{R}_E(\vec{r},\vec{r}')\times\vec{e}_z\Big]\mathrm{d}\vec{r}',\end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}\left\{\vec{H}_t(\vec{r})\right\}=&-\frac{\sigma^2}{ik\mu_1}(k^2\varepsilon_1\mu_1+\nabla\nabla)\vec{e}_z\times\frac{\partial}{\partial z}\left\{\vec{E}(\vec{r})\right\}+\\ &+\sigma^2\frac{ikc}{4\pi}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\vec{e}_z\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\Big[\hat{G}^2_{em}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{R}_E(\vec{r},\vec{r}')\times\vec{e}_z-\\ &-\hat{G}^2_{ee}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{R}_H(\vec{r},\vec{r}')\times\vec{e}_z\Big]\mathrm{d}\vec{r}'-\\ &-\sigma^2\frac{c}{4\pi}\left(1-\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\nabla\vec{e}_z\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\Big[\hat{G}^2_{mm}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{R}_E(\vec{r},\vec{r}')\times\vec{e}_z-\\ &-\hat{G}^2_{me}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{R}_H(\vec{r},\vec{r}')\times\vec{e}_z\Big]\mathrm{d}\vec{r}',\end{aligned}$$

где $\vec{E}_t = \hat{I}_t \cdot \vec{E}$, $\vec{H}_t = \hat{I}_t \cdot \vec{H}$ ($\hat{I}_t$ – тензор, выделяющий касательную к поверхности составляющую вектора); фигурные скобки означают разность между предельными значениями заключенных в них величин на средней границе $z = 0$ со стороны второй и первой сред; $\vec{e}_z$ – орт оси Oz, $k = \omega/c$ – волновое число; c – скорость света; σ – дисперсия неровностей; $\hat{G}_{pq}(\vec{r}, \vec{r}')$ – поверхностные тензоры Грина [1] (индексы p и q здесь и ниже могут принимать значения e (электрический) или m (магнитный)); $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$, $\vec{r}' = \vec{r}'(x', y')$;

$$\vec{R}_H(\vec{r},\vec{r}') = W(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial}{\partial z'}\{\vec{H}_t(\vec{r}')\} + \{H_z(\vec{r}')\}\nabla'_t W(\vec{r},\vec{r}'),$$

$$\vec{R}_E(\vec{r},\vec{r}') = W(\vec{r},\vec{r}')\frac{\partial}{\partial z'}\{\vec{E}_t(\vec{r}')\} + \{E_z(\vec{r}')\}\nabla'_t W(\vec{r},\vec{r}');$$

$$W(\vec{r},\vec{r}') = \sigma^2\langle\varsigma(\vec{r})\varsigma(\vec{r}')\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \tilde{W}(\vec{\kappa})\times$$

$\times\exp[i\vec{\kappa}(\vec{r}-\vec{r}')]\mathrm{d}\vec{\kappa}$ – функция корреляции шероховатостей, $\sigma^2 \ll 1$. Решение граничной задачи о нахождении поверхностных тензоров Грина приведено в Приложении. Здесь и ниже используется диадная форма записи тензоров. В работе используется гауссова система единиц; зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$.

Векторные потенциалы среднего поля

Поскольку распределение элементарных токов вдоль линии источника постоянно, то $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$. Решение дифференциального уравнения (1) можно представить в виде:

$$\vec{A}(\vec{\rho}) = \frac{4\pi}{c}\mu(z)\int \mathrm{d}\vec{\rho}'\,\vec{j}(\vec{\rho}')\cdot\hat{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}'), \qquad (3)$$

где $\hat{G}(\vec{\rho}, \vec{\rho}')$ – искомая тензорная функция Грина. Уравнение для нее нетрудно получить, подставив (3) в (2) с учетом того, что токи, описываются двумерными δ-функциями.

Выражение для искомой тензорной функции Грина строится следующим образом. Из (3) следует, что компоненты функции Грина пропорциональны электрическому векторному потенциалу линейного источника единичной амплитуды. Плотность элементарного тока линейного источника равна

$$\vec{j}(y,z) = \vec{e}_\nu\delta(y-y_0)\delta(z-z_0), \qquad (4)$$

где $\vec{e}_\nu = \vec{e}_y$, когда $\vec{j} = \vec{e}_y j_y(y,z)$; $\vec{e}_\nu = \vec{e}_z$, когда $\vec{j} = \vec{e}_z j_z(y,z)$. Электрический векторный потенциал, обусловленный линейным источником (4), обозначим как

$$\vec{A}(y,z) = \begin{cases} A_{1\nu}(y,z)\vec{e}_\nu, & z < 0, \\ A_{2\nu}(y,z)\vec{e}_\nu, & z > 0. \end{cases}$$

Тогда электромагнитное поле можно вычислить по следующим формулам:

$$\vec{E}(y,z) = ik\vec{A}(y,z) - \frac{1}{ik\varepsilon\mu}\nabla\nabla\vec{A}(y,z),$$

$$\vec{H}(y,z) = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}(y,z). \qquad (5)$$

Для линейного источника, расположенного в области 1, $A_{1\nu}(y, z)$ и $A_{2\nu}(y, z)$ должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\Delta A_{1\nu}(y,z) + k_1^2 A_{1\nu}(y,z) =$$

$$= -\mu_1\frac{4\pi}{c}\delta(y-y_0)\delta(z-z_0), \quad z < 0, \quad z_0 < 0,$$

$$\Delta A_{2\nu}(y,z) + k_2^2 A_{2\nu}(y,z) = 0, \quad z > 0, \quad z_0 < 0,$$

$$k_1 = k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}, \quad k_2 = k\sqrt{\varepsilon_2\mu_2},$$

а также условию излучения, а средние поля – граничным условиям (1). Решение данной системы будем искать в виде разложения по плоским волнам:

$$A_{1\nu}(y,z)=\frac{i\mu_1}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\chi_y}{\chi_{1z}}\exp\left[i\chi_y(y-y_0)\right]\times$$

$$\times\left[\exp(+i\chi_{1z}|z-z_0|)+V_{1\nu}^1(\chi_y)\exp\left[-i\chi_{1z}(z+z_0)\right]\right],$$

$$A_{2\nu}(y,z)=\frac{i\mu_2}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\chi_y}{\chi_{2z}}V_{2\nu}^1(\chi_y)\times$$

$$\times\exp\left[i\chi_y(y-y_0)-i\chi_{1z}z_0+i\chi_{2z}z\right],$$

где $\chi_{1z}=\sqrt{k_1^2-\chi_y^2}$, $\chi_{2z}=\sqrt{k_2^2-\chi_y^2}$, $\operatorname{Im}\chi_z\ge 0$. Вычислив соответствующие компоненты полей и подставив полученные выражения в граничные условия (1), после громоздких, но несложных преобразований получим систему относительно неизвестных амплитуд Фурье $V_{1\nu}^1(\chi_y)$ и $V_{2\nu}^1(\chi_y)$. Опуская выкладки, приведем окончательные выражения, полученные в рамках теории возмущений в первом приближении по σ^2 из двусторонних граничных условий (1):

$$V_{1\nu}^1(\chi_y)=\phi_\nu\frac{\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}-\dfrac{\chi_{2z}}{k_2}\tilde\eta_{21}+(k_1\sigma)^2r_1(\chi_y)}{\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}+\dfrac{\chi_{2z}}{k_2}\tilde\eta_{21}+(k_1\sigma)^2s(\chi_y)},$$

$$V_{2\nu}^1(\chi_y)=\varphi_\nu(\chi_y)\frac{2\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}\left[1+(k_1\sigma)^2t_1(\chi_y)\right]}{\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}+\dfrac{\chi_{2z}}{k_2}\tilde\eta_{21}+(k_1\sigma)^2s(\chi_y)},\tag{6}$$

где

$$\phi_\nu=\begin{cases}-1, & \vec e_\nu=\vec e_y,\\ 1, & \vec e_\nu=\vec e_z;\end{cases}$$

$$\varphi_\nu(\kappa_y)=\begin{cases}1, & \nu=y,\\ m_\varepsilon\tilde\eta_{21}\dfrac{\chi_{2z}/k_2}{\chi_{1z}/k_1}, & \nu=z;\end{cases}$$

$m_\varepsilon=\varepsilon_2/\varepsilon_1$, а $\tilde\eta_{21}=\sqrt{\dfrac{\mu_2\varepsilon_1}{\varepsilon_2\mu_1}}$ – приведенный поверхностный импеданс. Далее, в формулах (6):

$$\begin{Bmatrix}s(\chi_y)\\ r_1(\chi_y)\end{Bmatrix}=\frac{\chi_{1z}}{k_1}B^{\pm}(\chi_y)\tilde\Delta_\varepsilon^{\pm}(\chi_y)+\varepsilon_1\tilde\eta_{21}^2\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d\vec\kappa\;\tilde W(\vec e_y\chi_y-\vec\kappa)\left\{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\kappa_x}{\kappa}\right)^2\frac{1}{\tilde\Delta_\mu^+(\kappa)}\times\right.$$

$$\times\left[m_\varepsilon q_\mu B^{\pm}(\chi_y)\frac{\gamma_2}{k_2}\pm m_\varepsilon m_\mu q_\mu^2\frac{\gamma_1}{k_1}\frac{\gamma_2}{k_2}+m_\varepsilon(m_\varepsilon-1)\tilde\eta_{21}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\tilde\Delta_\varepsilon^{\pm}(\chi_y)\mp q_\mu\tilde\eta_{21}\frac{\chi_{2z}}{k_2}\right]\frac{\gamma_1}{k_1}+(m_\varepsilon-1)^2\frac{\chi_{1z}}{k_1}\frac{\chi_{2z}}{k_2}\right]+$$

$$+\frac{1}{\tilde\Delta_\varepsilon^+(\kappa)}\left[m_\varepsilon B^{\pm}(\chi_y)\frac{\kappa_y}{\kappa}l_\varepsilon(\chi_y,\kappa)\frac{\gamma_1}{k_1}\pm m_\varepsilon m_\mu l_\varepsilon^{\,2}(\chi_y,\kappa)-\right.$$

$$-m_\varepsilon(m_\varepsilon-1)\tilde\eta_{21}\left[L(\chi_y,\kappa)\tilde\Delta_\varepsilon^{\pm}(\chi_y)\pm\tilde\eta_{21}\frac{\chi_{2z}}{k_2}\times\right.$$

$$\left.\left.\left.\times l_\varepsilon(\chi_y,\kappa)\right]\frac{\gamma_2}{k_2}+(m_\varepsilon-1)^2\frac{\chi_{1z}}{k_1}\frac{\chi_{2z}}{k_2}\frac{\gamma_1}{k_1}\frac{\gamma_2}{k_2}\right]\right\};$$

$$t_1(\chi_y)=2\left(\frac{\chi_{1z}}{k_1}\right)^2+\varepsilon_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d\vec\kappa\;\tilde W(\vec e_y\chi_y-\vec\kappa)\times$$

$$\times\left\{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\kappa_x}{\kappa}\right)^2\left[m_\varepsilon\tilde\eta_{21}\frac{\tilde\Delta_\varepsilon^+(\kappa)}{\tilde\Delta_\mu^+(\kappa)}-1\right]+\left(\frac{\kappa_y}{\kappa}\right)^2\times\right.$$

$$\times\left[m_\varepsilon\tilde\eta_{21}\frac{\tilde\Delta_\mu^+(\kappa)}{\tilde\Delta_\varepsilon^+(\kappa)}-1-m_\varepsilon(m_\varepsilon-1)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\tilde\eta_{21}^2\frac{\chi_y\kappa}{k_2^2}\frac{\dfrac{\gamma_1}{k_1}-m_\varepsilon\tilde\eta_{21}\dfrac{\gamma_2}{k_2}}{\Delta_\varepsilon^+(\kappa)}\right]\right\},$$

где $\gamma_1=\gamma_1(\kappa)=\sqrt{k_1^2-\kappa^2}$, $\gamma_2=\gamma_2(\kappa)=\sqrt{k_2^2-\kappa^2}$, $\kappa^2=\kappa_x^2+\kappa_y^2$; $m_\mu=\mu_2/\mu_1$; $q_\mu=1-m_\mu^{-1}$;

$$B^{\pm}(\chi_y)=\frac{\chi_{1z}}{k_1}\pm m_\varepsilon\tilde\eta_{21}\frac{\chi_{2z}}{k_2};$$

$$\tilde{\Delta}_{\varepsilon}^{\pm}(\chi_y)=\frac{\chi_{1z}}{k_1}\pm\tilde{\eta}_{21}\frac{\chi_{2z}}{k_2};\ \tilde{\Delta}_{\mu}^{\pm}(\chi_y)=\tilde{\eta}_{21}\frac{\chi_{1z}}{k_1}\pm\frac{\chi_{2z}}{k_2};$$

$$\tilde{\Delta}_{\varepsilon}^{\pm}(\kappa)=\frac{\gamma_1}{k_1}\pm\tilde{\eta}_{21}\frac{\gamma_2}{k_2};\quad \tilde{\Delta}_{\mu}^{\pm}(\kappa)=\tilde{\eta}_{21}\frac{\gamma_1}{k_1}\pm\frac{\gamma_2}{k_2};$$

$$l_{\varepsilon}(\chi_y,\kappa)=q_{\mu}\frac{\kappa_y}{\kappa}+(m_{\varepsilon}-1)\frac{\chi_y\kappa}{k_2^2};$$

$$L\ (\zeta_y,\kappa)=-\frac{\kappa_y}{\kappa}+\frac{\chi_y\kappa}{k_2^2}.$$

При $\sigma\to 0$ формулы (6) можно представить в виде:

$$V_{1\nu}^1(\chi_y)=\phi_\nu\frac{\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}-\tilde{\eta}_{21}\sqrt{1-\dfrac{\chi_y^2}{k_2^2}}}{\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}+\tilde{\eta}_{21}\sqrt{1-\dfrac{\chi_y^2}{k_2^2}}},$$

$$V_{2\nu}^1(\chi_y)=\varphi_\nu(\chi_y)\frac{2\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}}{\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}+\tilde{\eta}_{21}\sqrt{1-\dfrac{\chi_y^2}{k_2^2}}},$$

т. е. они переходят в выражения для коэффициентов отражения и прохождения при падении плоской волны на плоскую границу раздела двух однородных магнитодиэлектрических полупространств. При больших значениях показателя преломления $\left|\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\right|>>1$ для однородных волн $(\chi_y^2<k^2\varepsilon_2\mu_2)$ невозмущенное значение коэффициента отражения имеет вид:

$$V_{1\nu}^1=\phi_\nu\frac{\cos\theta-\tilde{\eta}_{21}}{\cos\theta+\tilde{\eta}_{21}}\quad \left(\cos\theta=\frac{\chi_{1z}}{k_1}\right).$$

Аналогично ищется векторный потенциал для линейного источника, размещенного в области 2 $(z_0>0)$. Амплитуды Фурье векторных потенциалов в каждом из рассматриваемых полупространств имеют вид:

$$V_{1\nu}^2(\chi_y)=\frac{1}{\varphi_\nu(\chi_y)}\frac{2\dfrac{\chi_{2z}}{k_2}\tilde{\eta}_{21}\left[1+(k_1\sigma)^2t_2(\chi_y)\right]}{\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}+\dfrac{\chi_{2z}}{k_2}\tilde{\eta}_{21}+(k_1\sigma)^2s(\chi_y)},$$
$$\qquad\qquad (7)$$
$$V_{2\nu}^2(\chi_y)=-\phi_\nu\frac{\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}-\dfrac{\chi_{2z}}{k_2}\tilde{\eta}_{21}+(k_1\sigma)^2r_2(\chi_y)}{\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}+\dfrac{\chi_{2z}}{k_2}\tilde{\eta}_{21}+(k_1\sigma)^2s(\chi_y)},$$

где

$$r_2(\chi_y)=\frac{\chi_{1z}}{k_1}B^-(\chi_y)\tilde{\Delta}_{\varepsilon}^-(\chi_y)+\varepsilon_1\tilde{\eta}_{21}{}^2\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int d\vec{\kappa}\ \tilde{W}(\vec{e}_y\chi_y-\vec{\kappa})\left\{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\kappa_x}{\kappa}\right)^2\frac{1}{\tilde{\Delta}_{\mu}^+(\kappa)}\times\right.$$

$$\times\left[m_{\varepsilon}q_{\mu}B^-(\chi_y)\frac{\gamma_2}{k_2}-m_{\varepsilon}m_{\mu}q_{\mu}^2\frac{\gamma_1}{k_1}\frac{\gamma_2}{k_2}+m_{\varepsilon}(m_{\varepsilon}-1)\tilde{\eta}_{21}\times\right.$$

$$\left.\times[\tilde{\Delta}_{\varepsilon}^-(\chi_y)+q_{\mu}\tilde{\eta}_{21}\frac{\chi_{2z}}{k_2}]\frac{\gamma_1}{k_1}-(m_{\varepsilon}-1)^2\frac{\chi_{1z}}{k_1}\frac{\chi_{2z}}{k_2}\right]+$$

$$+\frac{1}{\tilde{\Delta}_{\varepsilon}^+(\kappa)}\left[m_{\varepsilon}B^-(\chi_y)\frac{\kappa_y}{\kappa}l_{\varepsilon}(\chi_y,\kappa)\frac{\gamma_1}{k_1}-m_{\varepsilon}m_{\mu}l_{\varepsilon}{}^2(\chi_y,\kappa)-\right.$$

$$-m_{\varepsilon}(m_{\varepsilon}-1)\tilde{\eta}_{21}[L(\chi_y,\kappa)\tilde{\Delta}_{\varepsilon}^-(\chi_y)-\tilde{\eta}_{21}\frac{\chi_{2z}}{k_2}\times$$

$$\left.\left.\times l_{\varepsilon}(\chi_y,\kappa)]\frac{\gamma_2}{k_2}-(m_{\varepsilon}-1)^2\frac{\chi_{1z}}{k_1}\frac{\chi_{2z}}{k_2}\frac{\gamma_1}{k_1}\frac{\gamma_2}{k_2}\right]\right\};$$

$$t_2(\zeta_y)=m_{\varepsilon}\left[\left(\frac{\chi_{1z}}{k_1}\right)^2+\tilde{\eta}_{21}^2\left(\frac{\chi_{2z}}{k_2}\right)^2\right]+\varepsilon_1m_{\mu}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int d\vec{\kappa}\ \tilde{W}(\vec{e}_y\chi_y-\vec{\kappa})\left\{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\kappa_x}{\kappa}\right)^2\left[m_{\varepsilon}-1+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1+\tilde{\eta}_{21}^2}{\tilde{\eta}_{21}^2}\frac{\gamma_2/k_2}{\tilde{\Delta}_{\mu}^+(\kappa)}\right]+\frac{1}{\tilde{\Delta}_{\varepsilon}^+(\kappa)}\left[\left(\frac{\kappa_y}{\kappa}\right)^2\tilde{\eta}_{21}(m_{\mu}^{-1}+m_{\varepsilon})\frac{\gamma_2}{k_2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\kappa_y}{\kappa}l_{\varepsilon}(\chi_y,\kappa)\left(m_{\varepsilon}\frac{\gamma_1}{k_1}+\tilde{\eta}_{21}\frac{\gamma_2}{k_2}\right)\right]\right\}.$$

Двумерная тензорная функция Грина для среднего поля

Построим двумерную тензорную функцию Грина для среднего поля. Для искомой функции воспользуемся диадной формой записи:

$$\hat{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}_0)=\vec{e}_y\vec{G}_y(\vec{\rho},\vec{\rho}_0)+\vec{e}_z\vec{G}_z(\vec{\rho},\vec{\rho}_0), \qquad (8)$$

где $\vec{\rho}$ и $\vec{\rho}_0$ – радиус-векторы в плоскости $x=0$. С помощью выражений (3) и (4) нетрудно показать, что

$$\vec{G}_\nu(\vec{\rho},\vec{\rho}_0)=\frac{c}{4\pi\mu(z)}\vec{e}_\nu A_\nu(\vec{\rho}), \quad \nu=y,z \qquad (9)$$

для каждого из полупространств. Подставив в (9) найденные выше выражения для компонент векторного потенциала, получим искомую функцию в следующем виде:

$$\hat{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}_0)=\frac{i}{4}\Big\{\left(\vec{e}_y\vec{e}_y+\vec{e}_z\vec{e}_z\right)H_0^{(1)}\left(k_1|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|\right)-$$

$$-\left(\vec{e}_y\vec{e}_y-\vec{e}_z\vec{e}_z\right)\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\chi_y}{\chi_{1z}}\frac{\tilde{\Delta}_\varepsilon^-(\chi_y)+(k_1\sigma)^2 r_1(\chi_y)}{\tilde{\Delta}_\varepsilon^+(\chi_y)+(k_1\sigma)^2 s(\chi_y)}\times$$

$$\times\exp\left[i\chi_y(y-y_0)-i\chi_{1z}(z+z_0)\right]\Big\}, \; z_0<0, \; z<0;$$

$$\hat{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}_0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\chi_y\left(\frac{\vec{e}_y\vec{e}_y}{\chi_{2z}}+\frac{\vec{e}_z\vec{e}_z}{\chi_{1z}}\right)\frac{2\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}\left[1+(k_1\sigma)^2 t_1(\chi_y)\right]}{\tilde{\Delta}_\varepsilon^+(\chi_y)+(k_1\sigma)^2 s(\chi_y)}\times$$

$$\times\exp\left[i\chi_y(y-y_0)-i\chi_{1z}z_0+i\chi_{2z}z\right], \; z_0<0, \; z>0;$$

$$\hat{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}_0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\chi_y\left(\frac{\vec{e}_y\vec{e}_y}{\chi_{1z}}+\frac{\vec{e}_z\vec{e}_z}{\chi_{2z}}\right)\frac{2\dfrac{\chi_{2z}}{k_2}\left[1+(k_1\sigma)^2 t_2(\chi_y)\right]}{\tilde{\Delta}_\varepsilon^+(\chi_y)+(k_1\sigma)^2 s(\chi_y)}\times$$

$$\times\exp\left[i\chi_y(y-y_0)-i\chi_{1z}z+i\chi_{2z}z_0\right], \; z_0>0, \; z<0;$$

$$\hat{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}_0)=\frac{i}{4}\Big\{\left(\vec{e}_y\vec{e}_y+\vec{e}_z\vec{e}_z\right)H_0^{(1)}\left(k_2|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|\right)+$$

$$+\left(\vec{e}_y\vec{e}_y-\vec{e}_z\vec{e}_z\right)\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\chi_y}{\chi_{2z}}\frac{\tilde{\Delta}_\varepsilon^-(\chi_y)+(k_1\sigma)^2 r_2(\chi_y)}{\tilde{\Delta}_\varepsilon^+(\chi_y)+(k_1\sigma)^2 s(\chi_y)}\times$$

$$\times\exp\left[i\chi_y(y-y_0)+i\chi_{2z}(z+z_0)\right]\Big\}, \; z_0>0, \; z>0;$$

где $H_0^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка [8]. При получении выражений (10) было использовано интегральное представление для функции Ханкеля.

Рассмотрим структуру функции Грина для случая $z_0<0, \; z<0$:

$$\hat{G}(\vec{\rho},\vec{\rho}_0)=\frac{i}{4}\Big[(\vec{e}_y\vec{e}_y+\vec{e}_z\vec{e}_z)H_0^{(1)}\left(k_1|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|\right)+$$

$$+(\vec{e}_y\vec{e}_y-\vec{e}_z\vec{e}_z)H_0^{(1)}\left(k_1|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0+2\vec{e}_z(\vec{\rho}_0\cdot\vec{e}_z)|\right)\Big]-$$

$$-\frac{i}{2\pi}(\vec{e}_y\vec{e}_y-\vec{e}_z\vec{e}_z)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\chi_y}{\chi_{1z}}\frac{\dfrac{\chi_{1z}}{k_1}+(k_1\sigma)^2\left[s(\chi_y)+r_1(\chi_y)\right]}{\tilde{\Delta}_\varepsilon^+(\chi_y)+(k_1\sigma)^2 s(\chi_y)}\times$$

$$\times\exp\left[i\chi_y(y-y_0)-i\chi_{1z}(z+z_0)\right].$$

Здесь первое слагаемое описывает функцию Грина линейного источника в однородном пространстве; сумма первых двух слагаемых – функцию Грина линейного источника, расположенного в однородном полупространстве над металлической плоскостью. Оставшаяся интегральная часть учитывает, что граница между полупространствами не идеально проводящая, ее шероховатостям отвечают малые поправки $\left(O(\sigma^2)\right)$ к невозмущенному значению. Аналогичным образом может быть преобразовано выражение для функции Грина при $z_0>0, \; z>0$. При $\sigma\to 0$ (10) переходит в формулу для двумерной тензорной функции Грина в случае двух полупространств с плоской границей раздела [4, 7].

Выводы

В статье получена двумерная тензорная функция Грина для среднего поля линейного распределения элементарных электрических токов, расположенного на расстоянии z_0 от статистически неровной границы раздела двух изотропных магнитодиэлектрических полупространств. Найденное выражение может быть использовано при решении задач подповерхностного зондирования, например, задачи рассеяния электромагнитной волны на металлическом цилиндре, расположенном вблизи шероховатой поверхности раздела двух однородных магнитодиэлектрических полупространств.

Приложение
Поверхностные тензоры Грина

Поверхностные тензоры Грина для полей, создаваемых элементарными электрическими и магнитными токами, которые расположены в плоскости $z = 0,$ разделяющей два изотропных полупространства, являются решением следующей системы дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{gathered}\nabla\times\hat{G}_{ee}(\vec{R},\vec{r}')-ik\mu(z)\hat{G}_{me}(\vec{R},\vec{r}')=0,\\ \nabla\times\hat{G}_{em}(\vec{R},\vec{r}')-ik\mu(z)\hat{G}_{mm}(\vec{R},\vec{r}')=0,\\ \nabla\times\hat{G}_{me}(\vec{R},\vec{r}')+ik\varepsilon(z)\hat{G}_{ee}(\vec{R},\vec{r}')=0,\\ \nabla\times\hat{G}_{mm}(\vec{R},\vec{r}')-ik\varepsilon(z)\hat{G}_{em}(\vec{R},\vec{r}')=0\end{gathered} \tag{П1}$$

и должны удовлетворять граничным условиям:

$$\begin{gathered}\vec{e}_z\times\left[\hat{G}^2_{ee}(\vec{r},\vec{r}')-\hat{G}^1_{ee}(\vec{r},\vec{r}')\right]\hat{I}_t=0,\\ \vec{e}_z\times\left[\hat{G}^2_{em}(\vec{r},\vec{r}')-\hat{G}^1_{em}(\vec{r},\vec{r}')\right]\hat{I}_t=-\frac{4\pi}{c}\hat{I}_t\delta_s(\vec{r},\vec{r}'),\\ \vec{e}_z\times\left[\hat{G}^2_{me}(\vec{r},\vec{r}')-\hat{G}^1_{me}(\vec{r},\vec{r}')\right]\hat{I}_t=\frac{4\pi}{c}\hat{I}_t\delta_s(\vec{r},\vec{r}'),\\ \vec{e}_z\times\left[\hat{G}^2_{mm}(\vec{r},\vec{r}')-\hat{G}^1_{mm}(\vec{r},\vec{r}')\right]\hat{I}_t=0,\end{gathered} \tag{П2}$$

где $\hat{I}_t$ – тензор, выделяющий касательную к поверхности составляющую вектора (поверхностные источники имеют только тангенциальные к границе компоненты); $\delta_s(\vec{r},\vec{r}')=\delta(x-x')\delta(y-y')$, $R=\sqrt{r^2+z^2}$. Верхние индексы у тензоров Грина указывают на принадлежность точки наблюдения либо области 1, либо области 2. Применительно к граничным условиям (П2) это означает, что предельный переход $z\to 0$ $(\vec{R}\to\vec{r})$ совершается со стороны первой или второй области.

Решение системы дифференциальных уравнений (П1), удовлетворяющее граничным условиям (П2), строится следующим образом. Представим оператор ∇ в виде суперпозиции тангенциальной к поверхности и перпендикулярной к ней компонент, а искомые тензоры – в следующем виде:

$$\hat{G}_{pq}(\vec{R},\vec{r}')=\hat{G}^t_{pq}(\vec{R},\vec{r}')+\hat{G}^z_{pq}(\vec{R},\vec{r}'),$$

где $\hat{G}^t_{pq}(\vec{R},\vec{r}')=\hat{I}_t\cdot\hat{G}_{pq}(\vec{R},\vec{r}')$, $\hat{G}^z_{pq}(\vec{R},\vec{r}')=\hat{I}_z\cdot\hat{G}_{pq}(\vec{R},\vec{r}')$, $\hat{I}_z$ – тензор, выделяющий нормальную к поверхности составляющую вектора.

После ряда преобразований из первого и третьего уравнений системы (П1) можно получить выражения для $\hat{G}^t_{ee}(\vec{R},\vec{r}')$ и $\hat{G}^t_{me}(\vec{R},\vec{r}')$ через $\hat{G}^z_{ee}(\vec{R},\vec{r}')$ и $\hat{G}^z_{me}(\vec{R},\vec{r}')$:

$$\begin{gathered}\hat{G}^t_{ee}=\frac{k^2\varepsilon(z)\mu(z)}{k^2\varepsilon(z)\mu(z)-\Gamma^2}\times\\ \times\left[-\frac{1}{ik\varepsilon(z)}\nabla_t\times\hat{G}^z_{me}+\frac{i\Gamma}{k^2\varepsilon(z)\mu(z)}\vec{e}_z\times\nabla_t\times\vec{G}^z_{ee}\right],\\ \hat{G}^t_{me}=\frac{k^2\varepsilon(z)\mu(z)}{k^2\varepsilon(z)\mu(z)-\Gamma^2}\times\\ \times\left[\frac{1}{ik\mu(z)}\nabla_t\times\hat{G}^z_{ee}+\frac{i\Gamma}{k^2\varepsilon(z)\mu(z)}\vec{e}_z\times\nabla_t\times\vec{G}^z_{me}\right],\end{gathered} \tag{П3}$$

где Γ имеет смысл постоянной распространения в направлении, перпендикулярном к границе раздела. Представим поверхностные токи в (П2), а также тензоры Грина в виде интегралов Фурье:

$$\hat{I}_t\delta_s(\vec{r},\vec{r}\,')=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d\vec{\kappa}\exp\left[i\vec{\kappa}(\vec{r}-\vec{r}\,')\right], \qquad (\text{П}4)$$

$$\begin{bmatrix}\hat{G}^1_{pq}(\vec{R},\vec{r}\,')\\ \hat{G}^2_{pq}(\vec{R},\vec{r}\,')\end{bmatrix}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int d\vec{\kappa}\begin{Bmatrix}\hat{\hat{G}}^1_{pq}(\vec{\kappa})\exp(-i\gamma_1(\kappa)z)\\ \hat{\hat{G}}^2_{pq}(\vec{\kappa})\exp(i\gamma_2(\kappa)z)\end{Bmatrix}\exp\left[i\vec{\kappa}(\vec{r}-\vec{r}\,')\right], \qquad (\text{П}5)$$

где $\gamma_1(\kappa)=\sqrt{k_1^2-\kappa^2}$, $\gamma_2(\kappa)=\sqrt{k_2^2-\kappa^2}$, $\mathrm{Im}\gamma_{1,2}(\kappa)\ge 0$. Тогда

$$\Gamma=\begin{cases}-\gamma_1(\kappa), & z<0,\\ \gamma_2(\kappa), & z>0.\end{cases}$$

После подстановки (П5) в (П3), а затем полученного выражения в соответствующие граничные уравнения найдем систему уравнений относительно $\hat{\hat{G}}^z_{ee}(\vec{\kappa})$ и $\hat{\hat{G}}^z_{me}(\vec{\kappa})$ для обеих областей. С помощью решения данной системы и формул (П3) получим выражения для амплитуд Фурье тангенциальных компонент соответствующих тензоров Грина. В результате имеем следующие выражения для амплитуд Фурье поверхностных тензоров Грина:

$$\hat{\hat{G}}^1_{ee}(\vec{\kappa})=\frac{1}{\pi c}\left[\frac{\gamma_1(\kappa)\gamma_2(\kappa)}{k\varepsilon_1\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}\vec{n}\vec{n}+\right.$$

$$\left.+\frac{k\mu_2}{\Delta^+_\mu(\kappa)}(\vec{n}\times\vec{e}_z)(\vec{e}_z\times\vec{n})-\frac{\gamma_2(\kappa)}{k\varepsilon_1\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}\vec{e}_z\vec{\kappa}\right],$$

$$\hat{\hat{G}}^2_{ee}(\vec{\kappa})=\frac{1}{\pi c}\left[-\frac{\gamma_1(\kappa)\gamma_2(\kappa)}{k\varepsilon_1\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}\vec{n}\vec{n}+\right.$$

$$\left.+\frac{k\mu_2}{\Delta^+_\mu(\kappa)}(\vec{n}\times\vec{e}_z)(\vec{e}_z\times\vec{n})+\frac{\gamma_1(\kappa)}{k\varepsilon_1\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}\vec{e}_z\vec{\kappa}\right],$$

$$\hat{\hat{G}}^1_{me}(\vec{\kappa})=\frac{1}{\pi c}\left[-\frac{\gamma_2(\kappa)}{\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}(\vec{n}\times\vec{e}_z)\vec{n}-\right.$$

$$\left.-\frac{m_\mu\gamma_1(\kappa)}{\Delta^+_\mu(\kappa)}\vec{n}(\vec{e}_z\times\vec{n})-\frac{m_\mu}{\Delta^+_\mu(\kappa)}\vec{e}_z(\vec{e}_z\times\vec{\kappa})\right],$$

$$\hat{\hat{G}}^2_{me}(\vec{\kappa})=\frac{1}{\pi c}\left[\frac{m_\varepsilon\gamma_1(\kappa)}{\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}(\vec{n}\times\vec{e}_z)\vec{n}+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma_2(\kappa)}{\Delta^+_\mu(\kappa)}\vec{n}(\vec{e}_z\times\vec{n})-\frac{1}{\Delta^+_\mu(\kappa)}\vec{e}_z(\vec{e}_z\times\vec{\kappa})\right],$$

где $\vec{n}=\vec{\kappa}/\kappa$, $\vec{\kappa}=\vec{e}_x\kappa_x+\vec{e}_y\kappa_y$, $\kappa=\sqrt{\kappa_x^2+\kappa_y^2}$,

$$\Delta^\pm_\varepsilon(\kappa)=m_\varepsilon\gamma_1(\kappa)\pm\gamma_2(\kappa),\ \Delta^\pm_\mu(\kappa)=m_\mu\gamma_1(\kappa)\pm\gamma_2(\kappa).$$

Аналогично из оставшихся дифференциальных уравнений и граничных условий находятся амплитуды Фурье остальных поверхностных тензоров Грина:

$$\hat{\hat{G}}^1_{em}(\vec{\kappa})=\frac{1}{\pi c}\left[\frac{\gamma_2(\kappa)}{\Delta^+_\mu(\kappa)}(\vec{n}\times\vec{e}_z)\vec{n}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_\varepsilon\gamma_1(\kappa)}{\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}\vec{n}(\vec{e}_z\times\vec{n})+\frac{m_\varepsilon}{\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}\vec{e}_z(\vec{e}_z\times\vec{\kappa})\right],$$

$$\hat{\hat{G}}^2_{em}(\vec{\kappa})=\frac{1}{\pi c}\left[-\frac{m_\mu\gamma_1(\kappa)}{\Delta^+_\mu(\kappa)}(\vec{n}\times\vec{e}_z)\vec{n}-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma_2(\kappa)}{\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}\vec{n}(\vec{e}_z\times\vec{n})+\frac{1}{\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}\vec{e}_z(\vec{e}_z\times\vec{\kappa})\right],$$

$$\hat{\hat{G}}^1_{mm}(\vec{\kappa})=\frac{1}{\pi c}\left[-\frac{\gamma_1(\kappa)\gamma_2(\kappa)}{k\mu_1\Delta^+_\mu(\kappa)}\vec{n}\vec{n}+\right.$$

$$\left.+\frac{k\varepsilon_2}{\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}(\vec{n}\times\vec{e}_z)(\vec{e}_z\times\vec{n})-\frac{\gamma_2(\kappa)}{k\mu_1\Delta^+_\mu(\kappa)}\vec{e}_z\vec{\kappa}\right],$$

$$\hat{\hat{G}}^2_{mm}(\vec{\kappa})=\frac{1}{\pi c}\left[-\frac{\gamma_1(\kappa)\gamma_2(\kappa)}{k\mu_1\Delta^+_\mu(\kappa)}\vec{n}\vec{n}+\right.$$

$$\left.+\frac{k\varepsilon_2}{\Delta^+_\varepsilon(\kappa)}(\vec{n}\times\vec{e}_z)(\vec{e}_z\times\vec{n})+\frac{\gamma_1(\kappa)}{k\mu_1\Delta^+_\mu(\kappa)}\vec{e}_z\vec{\kappa}\right].$$

Литература

1. Н. П. Жук, О. А. Третьяков. Двусторонние граничные условия для среднего электромагнитного поля в случае шероховатой поверхности. Изв. вузов. Радиофизика. 1981, **XXIV**, № 12, с. 1476-1483.
2. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. Москва, Наука, 1972, 424 с.
3. D. E. Lawrence, K. Sarabandi. IEEE Trans. 2002, **AP-50**, № 10, pp. 1368-1376.
4. В. Н. Кочин, С. Л. Просвирнин. Препринт РИ НАН Украины. Харьков, 1991, № 54, 29 с.
5. Л. Фелсен, Н. Маркувиц. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. Москва. Мир, 1978, 558 с.
6. В. А. Светличный. О рассеянии коротких волн на взволнованной морской поверхности. Радиотехнические системы миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн. Сборник научных трудов. Харьков, 1991, с. 70-82.
7. X.-B. Xu, C. M. Butler. IEEE Trans. 1986, **AP-34**, № 7, pp. 880-890.
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва. Физматгиз, 1963, 1100 с.

2D Tensorial Green Function for EM Field Mean Value for Two Isotropic Half-Spaces with a Rough Interface

V. N. Kochin

Two-dimensional Green function is obtained for the mean of electromagnetic field excited by a linear distribution of elementary electric dipoles placed near the rough interface of magnetodielectric half spaces. The interface roughness was assumed to be small, with moderate inclination angles.