Радиофизика и радиоастрономия, 2004, т. 9, №1, с. 66-72

УДК 537.874

Дифракция E_{0p}-волны на ограниченной периодической последовательности кольцевых щелей в круглом волноводе

С. А. Погарский, В. А. Чумаченко

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина
Украина, 61077, пл. Свободы, 4
E-mail: Sergey.A.Pogarsky@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 21 июля 2003 г.

Рассмотрена задача дифракции аксиально-симметричных собственных волн электрического типа в круглом волноводе на периодических последовательностях аксиально-симметричных кольцевых щелей. Задача решена с использованием операторного метода с привлечением метода моментов. Проведено сравнение результатов математического моделирования и экспериментальных данных для ограниченной последовательности периодически расположенных щелей.

Розглянуто задачу дифракції аксіально-симетричних власних хвиль електричного типу в круглому хвилеводі на періодичних послідовностях аксіально-симетричних кільцевих щілин. Задачу вирішено з використанням операторного методу із залученням методу моментів. Здійснено порівняння результатів математичного моделювання та експериментальних даних для обмеженої послідовності періодично розташованих щілин.

Интерес к аксиально-симметричным структурам обусловлен как уникальностью их физических свойств, так и рядом важных практических приложений. При проектировании различного рода функциональных устройств СВЧ и КВЧ диапазонов (например, невыступающих антенных систем, преобразователей волн, элементов систем дальней связи) возникает необходимость исследовать вопрос о трансформации волноводных волн или об излучении в свободное пространство на участке волновода с поперечными (относительно направления распространения волноводных волн) щелями. В общем случае дифрагированные поля в этой ситуации имеют континуальный пространственный спектр, однако приближенное решение задачи с учетом некоторых упрощений удается построить используя матричные, а не интегральные операторы рассеяния.

Одно из упрощающих предположений – малое взаимное влияние между щелями волновода, обусловленное излучением в свободное пространство. В таком приближении поле, излученное из любой щели в свободное пространство, не изменяет комплексных амплитуд волноводных волн на участках волновода с другими щелями. Очевидно, что погрешность такого приближенного решения будет тем меньше, чем уже щели и чем больше период их размещения по сравнению с длиной волны. Электродинамическая задача в такой постановке является по сути модельной, однако ее решение может представлять интерес не только в методическом плане, но и в плане реализации ряда волноводных и антенных приложений. Кроме того, решение для случая узкой щели позволяет провести сравнение с известными из литературы экспериментальными данными, а также с решениями, полученными с помощью эвристических методов, и определить границы применимости этих методов.

1. Алгоритм решения граничной задачи

Следуя идеям работы [1], можно построить алгоритм нахождения поля, рассеянного полубесконечной системой идентичных объектов. Будем предполагать, что отдельно взятый "элементарный" объект структуры характеризуется операторами отражения $\hat{r}$ и прохождения $\hat{t}$. Задача состоит в построении суммарного оператора рассеяния всей полубесконечной структуры $\hat{R}$, фрагмент которой представлен на рис. 1, $(r,\ \varphi,\ z)$ - цилиндрическая система координат.

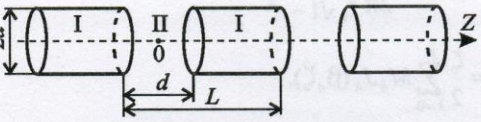

Рис. 1. *Геометрия исследуемой структуры (I, II – частичные области): 2a -диаметр волновода; d - ширина щели; L - период следования щелей*

Ключевой задачей в данном случае является задача о дифракции волноводной волны на кольцевой щели в стенке круглого волновода, а ключевым элементом структуры является соединение двух соосных круглых волноводов (рис. 1). Такого рода задача стала уже классической [2, 3], однако ряд элементов решения, и в первую очередь, метод преобразования системы парных интегральных уравнений к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), до сих пор актуальны.

Будем предполагать, что на стык двух соосных круглых волноводов (область II на рис. 1) набегает одна из аксиально-симметричных волн E_{0p}-типа единичной амплитуды. Пусть соотношение длины волны и диаметра волновода позволяет распространяться любой из E_{0p}-волн с индексом $1 \le p \le m,\ m = 1, 2, \ldots$.

Будем считать, что падающая волна имеет индекс $p = n$. Постоянная распространения падающей волны может быть представлена в виде $\beta_n = \sqrt{\xi^2 - \mu_n^2}$, $\xi = ka$, $k = 2\pi/\lambda$, где μ_n – n-й корень уравнения $J_0(\mu) = 0$. Решение граничной задачи может быть найдено в виде преобразования Фурье относительно единственной отличной от нуля компоненты магнитного поля в области щели

$$H_\varphi^{\mathrm{II}}(r,z) = \begin{cases} \dfrac{ikh}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\beta) J_1(hr/a) \times \\ \times \exp(i\beta z/a) \mathrm{d}\beta\ ; \quad r \le a, \\ \dfrac{ikh}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\beta) \dfrac{J_0(h)}{H_0^{(1)}(h)} H_1^{(1)}(hr/a) \times \\ \times \exp(i\beta z/a) \mathrm{d}\beta; \quad r \ge a, \end{cases} \qquad (1)$$

где $h = \sqrt{\xi^2 - \beta^2}$.

Функции в формуле (1) удовлетворяют уравнениям Гельмгольца в частичных областях I ($r \le a$) и обеспечивают непрерывность магнитного поля в области щели. Если при этом спектральные функции $F(\beta)$ будут еще удовлетворять уравнениям, вытекающим из граничных условий, – равенству нулю тангенциальной компоненты полного электрического поля на стенках волновода и равенству нулю электрического тока на щели, – то будет обеспечена непрерывность полей и в направлении распространения волн в отрезках волноводов и на щели. Система парных интегральных уравнений с учетом выражения для вронскиана функций Бесселя $J_0(x)H_1^{(1)}(x) - J_1(x)H_0^{(1)}(x) = -2i/\pi x$ [4] может быть представлена в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_n(\beta)}{h^2 J_0(h) H_0^{(1)}(h)} \exp(i\beta z/a) \mathrm{d}\beta =$$

$$= -\frac{i\pi}{2\mu_n} J_1(\mu_n) \exp(i\beta z/a), \quad |z| < d/2, \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_n(\beta)\exp(i\beta z/a)\mathrm{d}\beta = 0, \quad |z| > d/2, \qquad (3)$$

где $X_n(\beta) = F_n(\beta)h^2 J_0(h)H_0^{(1)}(h)$. Очевидно, что неизвестные спектральные функции $X_n(\beta)$ с точностью до постоянного множителя являются преобразованием Фурье тангенциальной компоненты электрического поля E_z на щели:

$$E_z|_{r=a} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} X_n(\beta)\exp(i\beta z/a)\mathrm{d}\beta.$$

Система уравнений (2), (3) позволяет находить решение граничной задачи при произвольных параметрах структуры. Переход от системы парных интегральных уравнений к соответствующей СЛАУ может быть осуществлен с помощью метода моментов [5].

Хорошо известно, что электрическое поле E_z имеет корневую особенность на краях щели. В этой связи представляется наиболее целесообразным представление поля в виде разложения по базису из функций Чебышева $T_n(z)\left[1-\left(\frac{2z}{d}\right)^2\right]^{-1/2}$. Существуют теоремы о том, что оптимальными по компактности таблицами широкого класса функций являются таблицы коэффициентов разложения этих функций в ряды Фурье-Чебышева [6]. Введем параметр так называемой узости щели $\zeta = \frac{d}{2a}$ (см. рис. 1) и осуществим замену переменных в уравнениях (2), (3) $t = 2z/d$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_n(\beta)}{h^2 J_0(h)H_0^{(1)}(h)}\exp(i\beta\zeta t)\mathrm{d}\beta +$$

$$+\frac{i\pi}{2\mu_n}J_1(\mu_n)\exp(i\beta_n\zeta t) = 0; \qquad |t| \le 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_n(\beta)\exp(i\beta\zeta t)\mathrm{d}\beta = 0; \qquad |t| \ge 1.$$

Таким образом, неизвестная функция E_z может быть представлена в виде:

$$E_z(t) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} X_n(\beta)\exp(i\beta\zeta t)\mathrm{d}\beta =$$

$$= \frac{1}{a}\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} M_n T_n \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}; & |t| < 1, \\ 0; & |t| > 1. \end{cases}$$

Отсюда, неизвестные спектральные функции $X_n(\beta)$ могут быть представлены в виде рядов функций Бесселя и их производных вплоть до порядка N с неизвестными коэффициентами [4]:

$$X_n(\beta) = \frac{\zeta}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_N(t)}{\sqrt{1-t^2}}\exp(i\beta\zeta t)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\zeta}{2}\sum_{k=0}^{N} M_k J_k(\beta_n\zeta).$$

Принимая во внимание факторы полноты и линейной независимости системы базисных функций на интервале $[-1, 1]$, получим систему линейных алгебраических уравнений I-го рода для определения коэффициентов M_k:

$$\frac{\zeta}{2}\sum_{k=0}^{N} M_k \int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_k(\beta\zeta)J_m(\beta\zeta)}{h^2 J_0(h)H_0^{(1)}(h)}\mathrm{d}\beta +$$

$$+\frac{i\pi}{2\mu_n}J_1(\mu_n)J_m(\beta_n\zeta) = 0; \quad (m = 0, 1, \dots N). \quad (4)$$

Таким образом, если известны коэффициенты M_k, можно определить спектральные функции $X_n(\beta)$ поля в структуре и другие параметры при произвольных соотношениях характерных геометрических размеров структуры. Однако наиболее интересным с практической точки зрения является случай узких щелей. В такой ситуации возможно использовать приближение заданного поля, а следовательно, необходимо определить лишь ограниченное число коэффициентов M_k из уравнения (4). Приближение заданного поля обеспечивает точность расчета характеристик полей в дальней зоне (включая элементы матрицы рассеяния) вследствие стационарности этих характеристик в зависимости от заданного распределения полей на щелях [2, 4].

Найденные спектральные функции $X_n(\beta)$ позволяют записать выражения для поверхностной плотности тока:

$$j_z = A\Big[\exp(i\beta_n z/a) + \frac{2\mu_n}{\pi J_n(\mu_n)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{X_n(\beta)\exp(i\beta z/a)\mathrm{d}\beta}{h^2 J_0(h) H_0^{(1)}(h)}\Big], \qquad (5)$$

где $A = C\xi J_1(\mu_n)/4\pi\mu_n$ – амплитуда тока E_{0p}-волны. Интегрирование в комплексной плоскости приводит выражение (5) к виду:

$$j_z = A\Big[\exp(i\beta_n z/a) + \sum_{p=1}^{m} r_{np}\exp(-i\beta_p z/a)\Big],$$

$$z << -d/2,$$

$$j_z = A\sum_{p=1}^{m} t_{np}\exp(i\beta_p z/a), \qquad z >> d/2,$$

где введены обозначения:

$$r_{np} = \frac{i\pi\mu_n}{J_1(\mu_n)} \frac{\mu_p}{\beta_p} X_n(-\beta_n);$$

$$t_{np} = \delta_{np} + \frac{i\pi\mu_n}{J_1(\mu_n)} \frac{\mu_p}{\beta_p} X_n(\beta_n), \qquad n, p \le m,$$

δ_{np} – символ Кронекера. Величины r_{np} и t_{np} определяют соответственно матричные операторы отражения и прохождения по току.

2. Моделирование параметров ограниченной последовательности щелей. Экспериментальная верификация

Таким образом, найденные операторы отражения и прохождения для ключевой структуры (в случае одномодового режима это только коэффициенты) могут при определенных условиях выступать в качестве начальных приближений для решения операторного уравнения, определяющего суммарный оператор $\hat{R}$ (коэффициент) отражения полубесконечной последовательности щелей. Оператор $\hat{R}$ зависящий от $\hat{r}$ и $\hat{t}$ является корнем соответствующего операторного уравнения второго рода [1]. Решение таких уравнений может быть проведено различными методами, однако наиболее предпочтительным оказывается метод Ньютона, особенно в случаях, когда начальное приближение оказывается достаточно далеко от корня, либо когда начальное приближение оказывается в особых областях параметров задачи, например, в областях возбуждения высших E_{0p}-типов волн. В таких ситуациях используются специальные схемы поиска начального приближения [7, 8]. Эффективность одной из таких схем была показана при исследовании стыка гладкого и диафрагмированного круглого волновода с полубесконечной периодической последовательностью толстых диафрагм [9].

Далее будем рассматривать отражение волн полубесконечной системой узких щелей волновода в одноволновом режиме и отыскивать коэффициент отражения R. Преобразование операторного уравнения к виду $f(R)=0$ приводит к введению вспомогательной функции $f(R) = R - r - t\left[I - \varphi R\varphi r\right]^{-1}\varphi R\varphi t$. Здесь $\varphi = \exp\left[i\beta_n(L-d)\right]$ описывает изменение фазы поля волноводных волн между соседними щелями. Вычислительную процедуру нахождения начального приближения можно организовать по схеме:

$$R^{(k+1)} = R^{(k)} - \left[f'\left(R^{(k)}\right)\right]^{-1}\varepsilon^{(k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Здесь $\varepsilon^{(k)}$ – вещественные вспомогательные параметры,

$$\left|\varepsilon^{(k)}\right| = \min\left\{\left|f(R^{(k)})\right|, \left(2D\left\|\left[f'(R^{(k)})\right]^{-1}\right\|^{2}\right)^{-1}\right\},$$

$$\operatorname{sign}\varepsilon^{(k)} = \operatorname{sign} f(R^{(k)}), \quad D \geq \max\left\{\frac{\left|f''(R^{(k)})\right|}{\left|f'(R^{(k)})\right|}\right\},$$

где D – вспомогательный параметр [10].

Одна из зависимостей коэффициента отражения полубесконечной структуры в одномодовом режиме – $\left|R_{11}\right|$ (L/λ) – представлена на рис. 2. Зависимость носит квазипериодический характер, период близок к 0.5.

Зависимость фазы θ коэффициента отражения от параметра L/λ представлена на рис. 3. Она также квазипериодическая с тем же периодом, причем в точках максимальной прозрачности структуры наблюдаются резкие изменения фазы колебаний.

Решение для полубесконечной структуры является в свою очередь ключевой задачей при исследовании структур с ограниченной последовательностью идентичных эквидистантных элементов. Соответствующие коэффициенты (операторы) отражения ρ_s и прохождения τ_s от s-й неоднородности могут быть найдены в виде [1]:

$$\rho_s = \frac{(r-R)e^{-ik_{nz}L}}{1 - re^{ik_{nz}L}Re^{-ik_{nz}L}};$$

$$\tau_s = \left(1 + Re^{ik_{nz}L}\rho\right)e^{ik_{nz}L}t,$$

где R – коэффициент (оператор) отражения соответствующей полубесконечной структуры, k_{nz} – постоянные распространения собственных волн в направлении оси Oz.

Суммарные операторы (коэффициенты) для ограниченной периодической структуры могут быть получены с использованием методов теории цепей. Изложенный подход был реализован для структуры, состоящей из 10 периодически расположенных кольцевых щелей. Результат моделирования зависимости $\left|R_{11}\right|$ от L/λ для такой структуры представлен на рис. 4 сплошной линией. Зависимость остается квазипериодической с тем же периодом, что и у соответствующей полубесконечной структуры. Характерной особенностью является расширение зон относительной прозрачности и появление в них

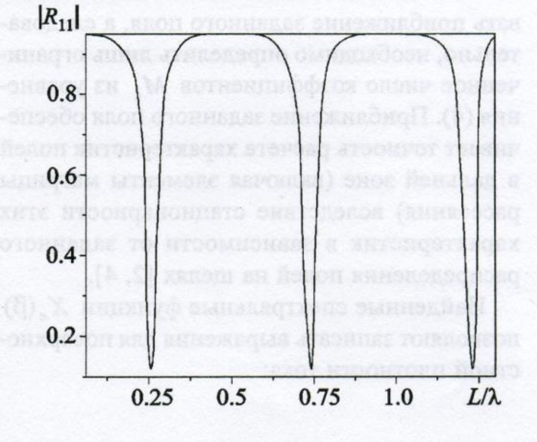

Рис. 2. *Зависимость модуля коэффициента отражения от параметра L/λ (2a = 28.5 мм, d = 0.1 мм)*

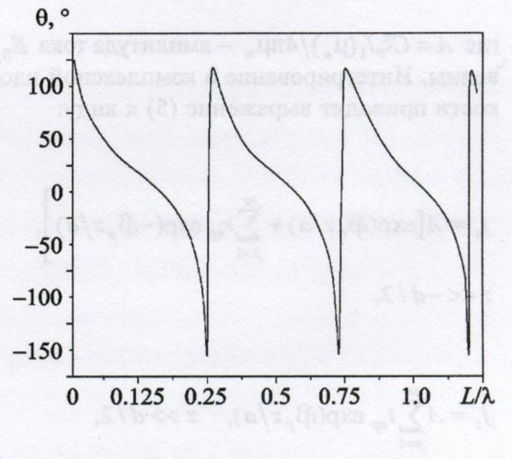

Рис. 3. *Зависимость фазы коэффициента отражения от параметра L/λ (2a = 28.5 мм, d = 0.1 мм)*

дополнительных резонансов. Эти резонансы связаны именно с фактором ограниченности структуры вдоль направления распространения электромагнитной волны.

Для определения границ применимости предложенного подхода была осуществлена серия экспериментов. Главная задача экспериментальных исследований состояла в том, чтобы установить предельные значения геометрических параметров структуры, при которых выполняется условие отсутствия взаимного влияния щелей по излучаемомому полю, и их связь с частотным параметром. Важным является установление значений центральных частот полос прозрачности и запирания. Экспериментальные значения суммарного коэффициента отражения для структуры, состоящей из 10 щелей, представлены на рис. 4 пунктирной линией.

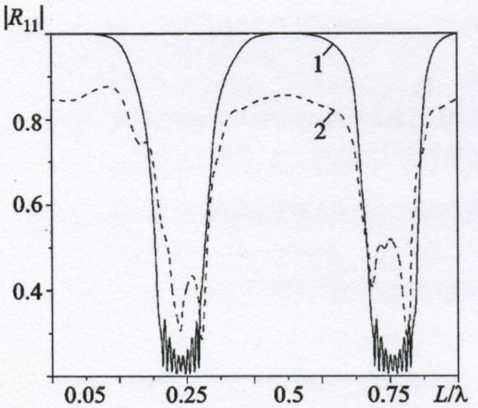

Рис. 4. *Зависимость коэффициента отражения ограниченной структуры от параметра* L/λ *(*$2a = 28.5$ *мм,* $d = 0.1$ *мм). Кривая 1 – расчетная, кривая 2 – экспериментальная*

Экспериментально установлено, что при выполнении условия $\zeta = d/2a << ka$, а в абсолютных значениях при $\zeta = 0.003 \div 0.034$, доля энергии, излучаемой во внешнее пространство, не превосходит $0.1 \div 1$ %. При этом величина коэффициента стоячей волны по напряжению (КСВН) (связанного с модулем коэффициента отражения) превышает значение 60 в полосах запирания и не превосходит значения 1.1 в полосах прозрачности. При изучении вопроса влияния периода следования щелей на величину коэффициента излучения установлено, что минимальное расстояние, при котором долей излученной энергии можно пренебречь, должно подчиняться условию $\dfrac{L-d}{2a} > \dfrac{ka}{20}$. Измерения величин центральных частот полос запирания и пропускания показали их совпадение с теоретическими значениями в пределах погрешности эксперимента. Функциональные зависимости измеренных величин (КСВН и затухания) также подобны теоретическим. Небольшое различие амплитуд в пределах каждой из полос (до 15 %) может быть объяснено погрешностями в изготовлении экспериментальных макетов и несовершенством методики измерения.

Заключение

Таким образом, проведенное исследование позволяет утверждать, что интегральный оператор рассеяния может быть заменен матричным оператором рассеяния при выполнении определенных условий – в случае узости щели по сравнению с длиной волны и при определенном соотношении между периодом следования щелей и длиной волны. В эксперименте была получена точность измерения коэффициента отражения, приемлемая для практических приложений. Результаты исследований могут найти применение в антенной технике и при создании новых типов функциональных элементов СВЧ диапазона.

Авторы благодарны Л. Н. Литвиненко и С. Л. Просвирнину за ценные замечания и дискуссии при анализе результатов работы.

Литература

1. Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин. Радиофизика и радиоастрономия. 1999, **4**, № 3, с. 276-280.
2. Р. Митра, С. Ли. Аналитические методы теории волноводов. Москва, Мир, 1974, 327 с.
3. С. И. Лапта, В. Г. Сологуб. В сб.: Тез. докл. Всеукраинской конференции “Основные направления в развитии радиоэлектроники, вычислительной техники и коммуникации”. Киев, 1973, с. 30.

4. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Москва, Наука, 1974, т. 2, 296 с.
5. Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев, Наукова думка, 1984, 239 с.
6. Ю. Люк. Специальные математические функции и их аппроксимации. Москва, Мир, 1980, 608 с.
7. М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. Приближенное решение операторных уравнений. Москва, Наука, 1969, 325 с.
8. О. Ю. Кульчицкий, Л. И. Шимелевич. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974, **14**, № 4, с.1016-1018.
9. С. А. Погарский, В. А. Чумаченко. Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. 2002, № 570, с.150-152.
10. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ. Москва, 1977, 742 с.

E_{0p}-Wave Diffraction by Bounded Periodic Sequence of Circumferential Slots in a Circular Waveguide

S. A. Pogarsky, V. A. Chumachenko

The diffraction problem of the electric axial-symmetric eigenwaves by the bounded periodic sequence of circumferential slots in a circular waveguide has been examined. The operator method has been used in combination with the method of moments. The mathematically simulated and experimental data for a bounded periodic sequence of slots have been compared.