Радиофизика и радиоастрономия, 2002, т. 7, №3, с. 232-245

УДК 532, 533.95, 523, 551.46

Вариационные принципы и канонические переменные для МГД течений с разрывами. I

А. В. Кац

Институт радиофизики и электроники НАН Украины,
Украина, 61085, г. Харьков, пр. Ак. Проскуры, 12
E-mail: avkats@akfirst.kharkiv.com

Статья поступила в редакцию 28 мая 2002 г.

Сформулирован ряд астрофизических задач, для решения которых необходимо исследование нелинейной стадии неустойчивости разрывных магнитогидродинамических течений (джетов, ударных волн, магнитного динамо).

В качестве первого шага в работе рассмотрены различные варианты вариационного принципа применительно к магнитогидродинамическим течениям с разрывами в эйлеровом представлении как в лагранжевых, так и в гамильтоновых (канонических) переменных. Обобщенное представление Клебша для скорости получается из функционала действия, в который включены уравнения связей. Обсуждается калибровочная свобода, связанная с введением обобщенных потенциалов, описывающих поле скорости. Используемое представление обладает теми преимуществами, что оно отвечает течениям общего вида и содержит все возможные предельные случаи (изэнтропические и баротропные течения и т. п.). При этом все инварианты (включая топологические) отличны от нуля. Кроме того, оно позволяет корректный предельный переход к случаю обычной гидродинамики, что также приводит к ненулевым значениям всех гидродинамических инвариантов, включая спиральность. Для введенных обобщенных потенциалов (играющих роль объемных и поверхностных канонических координат и импульсов) найдены такие граничные условия на разрывах, которые обеспечивают их эквивалентность обычным граничным условиям. Принципиально новым моментом рассматриваемого подхода является нетривиальная возможность описания в терминах канонических переменных не только контактных разрывов, но также ударных волн и вращательных разрывов. Дополнительного исследования требуют тангенциальные разрывы, поскольку сформулированный вариационный принцип позволяет рассматривать только те из них, у которых скачок скорости перпендикулярен скачку магнитного поля.

Предложенное описание позволяет существенно упростить решение актуальных астрофизических задач, а также может быть использовано для других родственных задач.

Сформульовано ряд астрофізичних задач, для розв’язання яких необхідне дослідження нелінійної стадії нестійкості розривних магнітогідродинамічних течій (джетів, ударних хвиль, магнітного динамо).

Першим кроком в роботі розглянуті різні варіанти варіаційного принципу, які дозволяють розглядати магнітогідродинамічні течії з розривами в ейлеровому зображенні як у лагранжевих, так і в гамільтонових (канонічних) змінних. Узагальнене зображення Клебша для швидкості отримують з функціоналу дії, до якого включені рівняння зв’язку. Зображення, яке використовується, має ті переваги, що воно відповідає течіям загального виду і містить усі можливі граничні випадки (ізентропічні та баротропні течії і т. п.). При цьому всі інваріанти (влючаючи топологічні) відмінні від нуля. Крім того, воно дозволяє коректний граничний перехід до випадку звичайної гідродинаміки, що також приводить до ненульових значень усіх гідродинамічних інваріантів, включаючи спіральність. Для введених узагальнених потенціалів (які відіграють роль об'ємних і поверхневих канонічних координат та імпульсів) знайдені такі граничні умови на розривах, які забезпечують їх еквівалентність звичайним граничним умовам. Принципово новим моментом у підході, що розглядається, є нетривіальна можливість опису в термінах канонічних змінних не тільки контактних розривів, але також ударних хвиль і обертальних розривів. Додаткового дослідження потребують тангенціальні розриви, оскільки сформульований варіаційний принцип дозволяє розглядати лише ті з них, у яких стрибок швидкості перпендикулярний до стрибка магнітного поля.

Запропонований опис дозволяє суттєво спростити розв'язання актуальних астрофізичних задач, а також може бути використаний для інших споріднених задач.

1. Введение

Магнитная гидродинамика (МГД) сформировалась как отдельное направление исследований более 50 лет назад. На всем протяжении своего развития она остается тесно связанной с астрофизикой. В частности, применение МГД описания к задачам физики космической и звездной плазмы остается весьма актуальным и в настоящее время. Особый интерес представляют разрывные МГД течения вблизи различных астрофизических объектов. Отметим здесь тангенциальные разрывы, ограничивающие поверхности джетов – замагниченных космических струй, соединяющих активные ядра галактик с удаленными протяженными компонентами, [1, 2]. Линейной теории устойчивости таких струй посвящено много работ (см. ссылки в обзоре [3]). Исследования нелинейных режимов и образования структур в джетах проводятся практически только численными методами на мощных компьютерах (см. [4]). Проблемы распространения и устойчивости ударных волн также весьма актуальны в астрофизических условиях. Укажем здесь в качестве примера круг вопросов, связанных с исследованием задачи устойчивости ударных волн в области параметров, где линейная теория устойчивости недостаточна и приводит к выводу о возможности незатухающих возмущений (нейтральная устойчивость). В результате ударная волна спонтанно излучает звук, являясь в этом смысле неустойчивой (неустойчивость Дьякова – Конторовича). В недавней работе [5] было показано, что эта неустойчивость, отсутствующая в идеальном газе, реализуется в случае Ван-дер-Ваальсова уравнения состояния, что сразу сделало проблему очень актуальной. Независимо авторы работы [6] показали, что обратное влияние релятивистских электронов, ускоренных ударной волной (и ответственных за синхротронное излучение многих астрофизических объектов), приводит к возможности развития неустойчивости Дьякова – Конторовича. В свое время С. Ф. Пименов [7] показал, что эта неустойчивость может развиться за счет влияния магнитных полей на МГД ударные волны. Гамильтонов подход в совокупности с соответствующим вариационным принципом должен оказаться весьма продуктивным в этой и других подобных нелинейных задачах, например в задаче магнитного динамо. Об этом свидетельствует тот факт, что в родственных задачах исследования гидродинамических [8-13] и магнитогидродинамических течений [14, 15] в простейшем случае разрывных течений – при наличии свободной поверхности – использование канонических переменных дало возможность (благодаря общности и хорошо развитым стандартным методам) получить результаты, которые вряд ли удалось бы получить другими менее эффективными методами.

Однако, за исключением контактных разрывов, гамильтонова техника для течений с другими типами разрывов до последнего времени отсутствовала, что было обусловлено значительными методическими и психологическими трудностями (связанными с нетривиальностью подхода). В результате, хотя описание гидродинамических и магнитогидродинамических течений с помощью канических переменных успешно используется уже весьма давно (см., например, монографии [16-18] и недавние обзоры [19, 20], а также цитируемую там литературу), вопрос описания разрывных течений в бездиссипативном случае исследован еще недостаточно. Укажем здесь пионерские работы [8, 9], в которых были введены поверхностные гамильтоновы переменные для потенциального движения несжимаемой жидкости со свободной границей, работы Крайко, посвященные сильным стационарным разрывам в газодинамике (см., например, [21], а также соответствующие ссылки в [16]); обобщение переменных В. Е. Захарова на непотенциальные течения со свободной границей в обычной и магнитной гидродинамике [22]. В недавних работах [23, 24] было показано, что гамильтоново описание применимо также для ударных волн и тангенциальных разрывов в обычной гидродинамике. Заметим, что при эйлеровом описании движения каноническими переменными являются вспомогательные переменные типа Клебша, определяющие представление скорости (см., например, [16-19]). При этом оказалось, что для движений общего типа стандартное представление Клебша, включающее помимо скалярного потенциала φ две вспомогательные скалярные переменные μ и λ, которые играют роль обобщенной координаты и сопряженного к ней импульса соответственно, является недостаточным, если ограничиться однозначными функциями. Для корректного описания необходимо введение соответствующих векторных переменных $\vec{\mu}$ и $\vec{\lambda}$. Величина $\vec{\mu}$ имеет смысл лагранжевой метки жидкой частицы и, следовательно, переносится жидкостью. Как было впервые (насколько известно автору) показано в работе [25], такое представление может быть получено введением в плотность действия члена $\vec{\lambda}D\vec{\mu}$ соответствующего связям, где $D = \partial_t + (\vec{v}, \nabla)$ обозначает субстанциональную производную, $\vec{v}$ – скорость жидкости. К этому представлению можно также прийти в результате преобразования Вебера, переходя от лагранжевого к эйлеровому описанию в обычной гидродинамике [18]. Для небаротропных течений и для ударных волн к связям, помимо векторных переменных Клебша, следует добавить энтропийное слагаемое σDs, где s – плотность энтропии, а σ – сопряженный к энтропии канонический импульс (см. обсуждение в [23, 24]). Отметим здесь, что представление скорости, включающее энтропийное слагаемое, было впервые введено в работе [26] для описания небаротропных течений идеальной жидкости без разрывов, где энтропия играла роль одной из лагранжевых меток. Однако для разрывных течений энтропия является разрывной функцией лагранжевых меток, что и обусловливает ее исключительную роль.

В настоящей работе проведено обобщение предложенного в [23, 24] вариационного принципа для разрывных гидродинамических течений на случай МГД. Вариационный принцип формулируется в эйлеровом описании как в лагранжевых, так и в гамильтоновых переменных. Основной проблемой в случае разрывных течений является определение граничных условий для вспомогательных переменных. Последние являются с физической точки зрения обобщенными потенциалами, а следовательно, определяются неоднозначно, обладая калибровочной инвариантностью. Поэтому граничные условия для них также могут быть выбраны неоднозначно. Совокупность этих граничных условий должна быть, во-первых, внутренне непротиворечивой и, во-вторых, из нее должны следовать стандартные граничные условия: непрерывность потоков энергии и импульса, нормальной компоненты магнитного и тангенциальной компоненты электрического поля. Кроме того, эти граничные условия не должны приводить ни к каким дополнительным ограничениям на течение. Удобно также потребовать, чтобы указанные граничные условия содержались в вариационном принципе, что никак не ограничивает калибровочных степеней свободы, но позволяет включить всю информацию о системе в гамильтониан.

План изложения следующий. Во втором разделе сформулирован вариационный принцип в лагранжевых переменных. Представление скорости через обобщенные потенциалы (переменные Клебша) получается при варьировании действия, включающего уравнения связей, по скорости $\vec{v}$. Вводимые уравнения связей эквивалентны обычно используемым в литературе, однако отличаются от них, что приводит к более симметричному описанию. В этом же разделе вводятся дополнительные поверхностные переменные и соответствующая поверхностная часть действия. Варьирование действия по этим переменным и по граничным значениям объемных переменных определяет совокупность граничных условий. Доказывается, что из полученных граничных условий (и соответствующих объемных уравнений) следуют стандартные МГД граничные условия. В третьем разделе описан вариационный принцип в канонических переменных и вводятся поверхностные канонические переменные.

2. Вариационный принцип для течений с разрывами

Пусть уравнение

$$R(\vec{r},t)=0 \tag{2.1}$$

определяет поверхность, разделяющую две области непрерывного течения, $R>0$ и $R<0$. В отсутствие самопересечений уравнение поверхности можно записать также в разрешенном относительно одной из координат виде:

$$R(\vec{r},t)=z-\zeta(\vec{r}_\perp,t). \tag{2.2}$$

Для пояснения способа введения канонических переменных начнем с вариационного принципа в лагранжевых переменных. Функционал действия A включает в себя объемную и поверхностную часть:

$$A=A_V+A_\Sigma. \tag{2.3}$$

Поверхностную часть A_Σ обсудим ниже, а объемная часть равна

$$A_V=\int \mathrm{d}t\,L',\qquad L'=\int \mathrm{d}\vec{r}\,\mathscr{L}', \tag{2.4}$$

где $\mathscr{L}'$ обозначает плотность лагранжиана со связями,

$$\mathscr{L}'=\mathscr{L}+\mathscr{L}_c,\quad \mathscr{L}=\rho\frac{v^2}{2}-\rho\varepsilon(\rho,s)-\frac{H^2}{8\pi}. \tag{2.5}$$

Здесь s и $\varepsilon(\rho,s)$ – плотность энтропии и внутренней энергии соответственно, ρ и $\vec{v}$ – плотность и скорость, $\vec{H}$ – магнитное поле. Слагаемое со связями можно представить в следующем виде:

$$\mathscr{L}_c=\rho D\varphi+\vec{\lambda}D\vec{\mu}+\sigma Ds+\vec{H}(\partial_t\vec{S}-\nabla\Phi-\vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{S}). \tag{2.6}$$

Вводимое таким образом в плотность лагранжиана $\mathscr{L}'$ слагаемое (2.6) обеспечивает выполнение уравнений неразрывности и переноса энтропии, динамического уравнения для магнитного поля и равенство нулю дивергенции $\vec{H}$, а также уравнения переноса векторного поля маркеров $\vec{\mu}$. В отсутствие магнитного поля (2.6) непосредственно переходит в обсуждавшееся подробно в работе [24] выражение, соответствующее наиболее общему движению.

Считая скорость и все введенные полевые переменные, а также их вариации независимыми, из условия экстремума действия получаем объемные уравнения движения и представление скорости:

$$\delta\varphi \quad\Rightarrow\quad \partial_t\rho+\mathrm{div}(\rho\vec{v})=0, \tag{2.7}$$

$$\delta\vec{\lambda} \quad\Rightarrow\quad D\vec{\mu}=0, \tag{2.8}$$

$$\delta\sigma \quad\Rightarrow\quad Ds=0, \tag{2.9}$$

$$\delta\vec{S} \quad\Rightarrow\quad \partial_t\vec{H}-\mathrm{rot}(\vec{v}\times\vec{H})=0, \tag{2.10}$$

$$\delta\Phi \quad\Rightarrow\quad \mathrm{div}\,\vec{H}=0, \tag{2.11}$$

$$\delta\rho \quad \Rightarrow \quad D\varphi = w - v^2/2, \qquad (2.12)$$

$$\delta\vec{\mu} \quad \Rightarrow \quad \partial_t \lambda_m + \operatorname{div}(\lambda_m \vec{v}) = 0, \qquad (2.13)$$

$$\delta s \quad \Rightarrow \quad \partial_t \sigma = -\rho T - \operatorname{div}(\sigma \vec{v}), \qquad (2.14)$$

$$\delta\vec{H} \quad \Rightarrow \quad \partial_t \vec{S} = \frac{\vec{H}}{4\pi} + \nabla\Phi + \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{S}, \qquad (2.15)$$

$$\delta\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \rho\vec{v} = -\rho\nabla\varphi - \lambda_m \nabla\mu_m - \sigma\nabla s - \vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{S}, \qquad (2.16)$$

где $w = \varepsilon + p/\rho$ – плотность энтальпии, p – давление жидкости, T – температура. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Нетрудно проверить, что уравнения движения для введенных переменных совместно с представлением скорости обеспечивают выполнение уравнения Эйлера,

$$\rho D\vec{v} = -\nabla p - \frac{1}{4\pi}(\vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{H}). \qquad (2.17)$$

В дальнейшем удобно считать переменные φ, $\vec{\mu}$, s и $\vec{S}$ обобщенными координатами, обозначая их совокупность $\mathcal{Q}$. Тогда ρ, $\vec{\lambda}$, σ и $\vec{H}$ являются сопряженными к ним импульсами $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{Q} = (Q, \vec{S}), \qquad Q = (\varphi, \vec{\mu}, s);$$

$$\mathcal{P} = (P, \vec{H}), \qquad P = (\rho, \vec{\lambda}, \sigma), \qquad (2.18)$$

$$\mathcal{P} \equiv \delta A/\delta\partial_t\mathcal{Q} = \delta A_V/\delta\partial_t\mathcal{Q} = \partial\mathcal{L}'/\partial\partial_t\mathcal{Q} = \partial\mathcal{L}_c/\partial\partial_t\mathcal{Q},$$

где Q и P относятся к подмножеству переменных, соответствующих обычной гидродинамике. Представление скорости удобно записать в виде:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \equiv \vec{v}_h + \vec{v}_M, \qquad (2.19)$$

$$\vec{v}_h = -\frac{P}{\rho}\nabla Q, \qquad \vec{v}_M = -\frac{\vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{S}}{\rho},$$

выделяя магнитную $(\vec{v}_M)$ и гидродинамическую $(\vec{v}_h)$ части.

2.1. Поверхностная часть действия и граничные условия

При получении объемных уравнений из (2.7) – (2.16) проводилось интегрирование по частям по пространственным переменным и времени. В результате в вариации действия остаются слагаемые, сводящиеся к интегралам по поверхности разрыва и содержащие граничные значения вариаций объемных переменных. Кроме того, в вариации объемной части действия имеется слагаемое, которое отвечает вариации самой границы и пропорционально δR. Обозначим граничное значение вариации объемной переменной X символом $\tilde{\delta}X$, $\tilde{\delta}X \equiv (\delta X)_{R=0}$. При необходимости различать граничные значения, соответствующие разным сторонам границы, будем делать это с помощью верхнего индекса $\pm$, $X^{\pm} \equiv X|_{R=\pm 0}$, используя фигурные скобки для обозначения скачка, $\{X\} \equiv X^+ - X^- = \sum_{\varsigma=\pm}\varsigma X^{\varsigma}$. Заметим, что при наличии двух областей интегрирования, разделенных границей $R = 0$, соответствующий интеграл удобно представить в виде:

$$A_V = \int dt \int d\vec{r} \sum_{\varsigma=\pm} \theta(\varsigma R)\mathcal{L}',$$

где θ – ступенчатая функция Хэвисайда. Здесь и далее мы опускаем индекс, различающий плотности лагранжиана в разных областях. Вариация объемной части действия на уравнениях движения, $(\delta A)_{\text{bound}} = (\delta A_V)_{\text{bound}}$, принимает вид:

$$(\delta A)_{\text{bound}} = \sum_{\varsigma} \varsigma \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\vec{r}\,\delta(R)\Big(\mathscr{L}'\delta R - \dot{R}\mathscr{P}\delta\mathscr{Q} -$$
$$-\nabla R\Big(P\vec{v}\delta Q + \Big[\delta\vec{S}\times[\vec{v}\times\vec{H}]\Big] - \vec{H}\delta\Phi\Big)\Big), \qquad (2.20)$$

где $\delta(R)$ – дельта-функция Дирака (не путать с вариацией границы δR) и учтены тождества $\partial\theta(\varsigma R)/\partial t = \varsigma\dot{R}\delta(R)$, $\nabla\theta(\varsigma R) = \varsigma\delta(R)\nabla R$, $\delta\theta(\varsigma R) = \varsigma\delta(R)\delta R$; точкой обозначена частная производная по времени. Выполняя в (2.20) интегрирование с помощью δ-функции, получим:

$$(\delta A)_{\text{bound}} = \int \mathrm{d}t \int \frac{\mathrm{d}\Sigma}{|\nabla R|}\big(\{\mathscr{L}'\}\delta R -$$
$$-\Big\{\mathscr{P}\Big(\vec{v}\nabla R + \dot{R}\Big)\tilde{\delta}\mathscr{Q}\Big\} - \Big\{(\vec{H}\nabla R)\Big(\vec{v}\tilde{\delta}\vec{S} + \dot{R}\tilde{\delta}\Phi\Big)\Big\}\Big), \qquad (2.21)$$

где интегрирование ведется по поверхности разрыва, $\mathrm{d}\Sigma$ означает элемент площади этой поверхности.

Выбор поверхностной части действия и независимо варьируемых на поверхности переменных определяется требованием получить в результате совокупность граничных условий, которые согласуются с объемными уравнениями и эквивалентны обычным МГД условиям на границе. В силу калибровочной инвариантности такой выбор является неоднозначным, что не облегчает, а затрудняет сформулированную задачу. Поиск решения облегчается, если решение, соответствующее предельному переходу к случаю обычной гидродинамики, уже известно (см., например, [23, 24]). Поэтому важно определить, какими должны быть граничные условия для чисто магнитной части переменных. Оказывается, что к нужному результату приводит требование непрерывности $\vec{S}$ и Φ, которое годится для любых разрывов[1]. В соответствии со сказанным поверхностную часть действия можно выбрать в виде:

$$A_{\Sigma} = \int \mathrm{d}t L_{\Sigma}, \qquad L_{\Sigma} = \int \mathrm{d}\vec{r}\,\delta(R)\mathscr{L}_{\Sigma}, \qquad (2.22)$$

[1]Отметим в связи с этим, что предложенные ранее в кратком сообщении [27] условия непрерывности $\operatorname{rot}\vec{S}$ и нормальной компоненты $\vec{S}$ не дают возможности корректного описания всех типов разрывов, в частности, такой выбор не позволяет рассматривать ударные волны.

$$\mathscr{L}_{\Sigma} = \big\{\rho(\vec{v}', \nabla R)\Gamma\big\} + \vec{F}\{\vec{S}\} + \chi\{\Phi\},$$

$$\Gamma^{\pm} = \gamma + G\varphi^{\pm} + \vec{\eta}\vec{\mu}^{\pm}, \qquad (2.23)$$

$$(\vec{v}', \nabla R) = (\vec{v}, \nabla R) + \dot{R}.$$

Первое слагаемое в $\mathscr{L}_{\Sigma}$ является линейной комбинацией связей с (поверхностными) множителями Лагранжа γ, G, $\vec{\eta}$, обеспечивая непрерывность потоков массы, потенциала скорости и лагранжевых меток, а последние два слагаемых гарантируют непрерывность $\vec{S}$ и Φ. Граничные условия следуют из требования обращения в нуль суммы $(\delta A)_{\text{bound}}$ и вариации A_{Σ}. Последнюю удобнее записать воспользовавшись уравнением границы в разрешенной форме, полагая $R = z - \zeta(\vec{r}_{\perp}, t)$. Тогда поверхностный лагранжиан L_{Σ} имеет вид

$$L_{\Sigma} = \int \mathrm{d}\vec{r}_{\perp}\mathscr{L}_{\Sigma}, \qquad (2.24)$$

и для вариации A_{Σ} получаем:

$$\delta A_{\Sigma} = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\vec{r}_{\perp}\delta\mathscr{L}_{\Sigma}, \qquad (2.25)$$

$$\delta\mathscr{L}_{\Sigma} = \big\{(K - \tilde{\rho}\dot{\zeta})\delta\tilde{\Gamma}\big\} + \big\{\tilde{\Gamma}(\delta K - \dot{\zeta}\delta\tilde{\rho})\big\} -$$
$$-\{\tilde{\rho}\tilde{\Gamma}\}\delta\dot{\zeta} + \Big\{\tilde{\vec{S}}\Big\}\delta\vec{F} + \vec{F}\Big\{\delta\tilde{\vec{S}}\Big\} + \{\Phi\}\delta\chi + \chi\{\delta\tilde{\Phi}\}, \qquad (2.26)$$

где тильдой обозначены граничные значения соответствующих величин, так что $\delta\tilde{X} \equiv \delta X\big|_{R=0}$ означает вариацию граничного значения величины X, в отличие от граничного значения вариации $\tilde{\delta}X = (\delta X)_{R=0}$; $K = \Big(\tilde{\rho}\tilde{\vec{v}}, \nabla R\Big)$,

$$K = -\tilde{P}(\tilde{\nabla}Q, \nabla R) - \Big(\tilde{\vec{H}}\times(\tilde{\nabla}\times\vec{S}), \nabla R\Big). \qquad (2.27)$$

Здесь тильда над оператором набла обозначает, что сначала производится операция дифференцирования соответствующей величины, а потом совершается переход к значению на границе. Вариацию K удобно представить в виде:

$$\delta K = \left(\tilde{\vec{v}}, \nabla R\right)\delta\tilde{\rho} + \tilde{\rho}\delta\left(\tilde{\vec{v}}, \nabla R\right) =$$

$$= \left(\delta\left(\tilde{\rho}\tilde{\vec{v}}\right), \nabla R\right) + \left(\tilde{\rho}\tilde{\vec{v}}, \delta\nabla R\right). \tag{2.28}$$

Вариация величины Γ равна

$$\delta\tilde{\Gamma}^{\pm} = \delta\gamma + G\delta\tilde{\varphi}^{\pm} + \vec{\eta}\delta\tilde{\vec{\mu}}^{\pm} + \tilde{\varphi}^{\pm}\delta G + \tilde{\vec{\mu}}^{\pm}\delta\vec{\eta}. \tag{2.29}$$

Как видно, δA_{Σ} содержит вариацию границы под знаком пространственных (слагаемое с $\delta\nabla R$ в (2.28)) и временной (член с $\delta\dot{\zeta}$ в (2.26)) производных, вариацию граничного значения скорости, а также вариации граничных значений остальных величин. Поскольку $(\delta A)_{\text{bound}}$, в отличие от δA_{Σ}, содержит не вариации граничных значений, а граничные значения вариаций, отличающиеся друг от друга линейными по вариации границы слагаемыми, для дальнейшего следует перейти к вариациям одного типа. Удобнее в качестве независимых вариаций выбрать вариацию границы и вариации граничных значений объемных переменных, а также вариации граничных значений их нормальных производных. Что касается вариаций скорости, то здесь возможны два варианта. Во-первых, можно считать скорость независимой переменной (не исключая ее из действия). Тогда в число независимых вариаций входят вариации граничных значений скорости. Во-вторых, скорость может быть зависимой переменной, связанной с остальными переменными выражением (2.19), $\vec{v} = \vec{v}_0$. В этом случае, разумеется, вариации граничных значений скорости выражаются через вариации граничных значений остальных переменных и их нормальных производных. Рассмотрим сначала первый вариант, соответствующий неисключенной скорости.

Выразим сначала $(\delta A)_{\text{bound}}$ через вариации граничных значений, для чего воспользуемся соотношением

$$\delta\tilde{X} = \tilde{\delta}X - \partial_n X \cdot \delta R/|\nabla R|, \tag{2.30}$$

где ∂_n означает нормальную производную, $\partial_n X = (\vec{n}, \nabla X)_{R=0}$, а нормаль определяется вектором $\vec{n} = \nabla R/|\nabla R|$. В результате получаем:

$$(\delta A)_{\text{bound}} = \int \mathrm{d}t \int \frac{\mathrm{d}\Sigma}{|\nabla R|}\left[\left\{\mathscr{L}' - \mathscr{P}v'_n\partial_n\mathscr{Q} + H_n\left(\vec{v}, \partial_n\vec{S}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + H_n\partial_n\Phi\right\}\delta R - |\nabla R|\left\{\mathscr{P}v'_n\delta\tilde{\mathscr{Q}} - H_n\left(\left(\vec{v}, \delta\tilde{\vec{S}}\right) + \delta\tilde{\Phi}\right)\right\}\right], \tag{2.31}$$

где $v'_n = v_n + \dot{R}/|\nabla R|$. Это выражение можно упростить, используя объемные уравнения движения для преобразования коэффициентов при вариациях. Например, $\mathscr{L}'\big|_{\text{eq}}$ (где индекс eq подчеркивает, что соответствующая величина рассматривается при условии выполнения уравнений движения) можно заменить суммой обычного и магнитного давлений. Действительно,

$$\mathscr{L}'\big|_{\text{eq}} = \mathscr{L} + PDQ + \vec{H}\left(\dot{\vec{S}} - \nabla\Phi - \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{S}\right) =$$

$$= \rho\left(v^2/2 - \varepsilon\right) + \rho\left(w - v^2/2\right) + \frac{H^2}{8\pi} = p + \frac{H^2}{8\pi}. \tag{2.32}$$

Приведем теперь граничные условия, следующие из сформулированного вариационного принципа, (ВГУ). Приравнивая нулю вариационные производные от действия по поверхностным множителям Лагранжа, получаем:

$$\delta\vec{F} \quad \Rightarrow \quad \left\{\vec{S}\right\} = 0, \tag{2.33}$$

$$\delta\chi \quad \Rightarrow \quad \{\Phi\} = 0, \tag{2.34}$$

$$\delta\gamma \quad \Rightarrow \quad \{\rho v'_n\} \equiv \{j\} = 0, \tag{2.35}$$

$$\delta G \quad \Rightarrow \quad \{\rho v'_n\varphi\} = j\{\varphi\} = 0, \tag{2.36}$$

$$\delta\vec{\eta} \quad \Rightarrow \quad \{\rho v'_n\vec{\mu}\} = j\{\vec{\mu}\} = 0, \tag{2.37}$$

где $j = \rho v'_n$ – поток массы, и в последних двух уравнениях учтена его непрерывность, следующая из (2.35).

Далее, варьирование по граничным значениям скорости и остальных объемных переменных дает следующие условия, которые должны выполняться с обеих сторон поверхности разрыва:

$$\delta\tilde{\vec{v}} \quad \Rightarrow \quad \rho\Gamma = 0, \qquad (2.38)$$

$$\delta\tilde{\rho} \quad \Rightarrow \quad \Gamma v'_n = 0, \qquad (2.39)$$

$$\delta\tilde{s} \quad \Rightarrow \quad \sigma v'_n = 0, \qquad (2.40)$$

$$\delta\tilde{\varphi} \quad \Rightarrow \quad (G+1)\, j = 0, \qquad (2.41)$$

$$\delta\tilde{\vec{\mu}} \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{\lambda}/\rho + \vec{\eta}\right) j = 0, \qquad (2.42)$$

$$\delta\tilde{\vec{S}} \quad \Rightarrow \quad \left(v'_n \vec{H} - H_n \vec{v}\right)\left|\nabla R\right| + \vec{F} = 0, \qquad (2.43)$$

$$\delta\tilde{\Phi} \quad \Rightarrow \quad H_n\left|\nabla R\right| + \chi = 0. \qquad (2.44)$$

Из уравнений (2.38) – (2.44) следуют условия, налагаемые как на поверхностные множители Лагранжа, так и на граничные значения объемных переменных, которые получаются после нахождения соответствующих скачков. При этом система уравнений (2.33) – (2.44) преобразуется поразному в зависимости от наличия или отсутствия потока массы через разрыв. Но в любом случае уравнение (2.38) приводит к условию $\tilde{\Gamma} = 0$ и, соответственно, $\{\Gamma\} = 0$ и $\{\rho\Gamma\} = 0$.

Несколько более сложным является варьирование по R. Полагая для упрощения $R = z - \zeta$, $\delta R = -\delta\zeta$, находим, что

$$\delta A_\Sigma / \delta\zeta = \partial\{\rho\Gamma\}/\partial t + \nabla_\perp\{\rho\vec{v}\Gamma\} = 0,$$

где $\nabla_\perp = (\partial_x, \partial_y)$, а обращение в нуль является следствием (2.38). Поэтому варьирование полного действия по ζ дает следующее граничное условие:

$$\delta A/\delta\zeta = (\delta A)_{\text{bound}}/\delta\zeta = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{p + \frac{H^2}{8\pi} - \mathscr{P} v'_n \partial_n \mathscr{Q} + \right.$$
$$\left. + H_n\left(\vec{v}, \partial_n \vec{S}\right) + H_n \partial_n \Phi\right\} = 0, \qquad (2.45)$$

где учтено равенство (2.32).

Переменная ζ играет роль обобщенной поверхностной координаты. Величина $\pi_\zeta = -\{\rho\Gamma\}$ является сопряженным к ней импульсом:

$$\pi_\zeta \equiv \delta A / \delta\dot{\zeta} = \delta A_\Sigma / \delta\dot{\zeta} = -\{\rho\Gamma\}. \qquad (2.46)$$

Обращение Γ в нуль приводит к $\pi_\zeta = 0$, но это равенство выполняется вследствие граничных условий, и им нельзя пользоваться до варьирования.

Система уравнений (2.33) – (2.45) обеспечивает экстремальность действия для течений с разрывами произвольного типа в случае неисключенной скорости. Как убедимся в следующем разделе, вариационный принцип с исключенной скоростью приводит к эквивалентной системе уравнений. Однако она не эквивалентна системе обычных МГД граничных условий, хотя содержит часть из них, например, условие непрерывности потока массы, тангенциальной составляющей электрического и нормальной компоненты магнитного полей (что следует из (2.43) и (2.44)). Недостающие условия можно получить анализируя систему объемных уравнений для дополнительно введенных полей. Действительно, рассматривая скачки уравнений (2.8), (2.9), (2.12) – (2.15) и делая естественное предположение об отсутствии соответствующих поверхностных источников (т. е. полагая, что вспомогательные поля имеют максимальную степень гладкости, совместимую с динамическими уравнениями), находим:

$$\partial_t\{\vec{\mu}\} + \{(\vec{v}'\nabla)\vec{\mu}\} = 0, \qquad (2.47)$$

$$\partial_t\left\{\vec{\lambda}/\rho\right\} + \left\{(\vec{v}'\nabla)\left(\vec{\lambda}/\rho\right)\right\} = 0, \qquad (2.48)$$

$$\partial_t\{\varphi\}+\left\{(\vec{v}'\nabla)\varphi\right\}=\left\{w-v^2/2\right\}, \qquad (2.49)$$

$$\partial_t\{\sigma/\rho\}+\left\{(\vec{v}'\nabla)(\sigma/\rho)\right\}=-\{T\}, \qquad (2.50)$$

$$-\left\{(\vec{u}\nabla)\vec{S}\right\}=\frac{1}{4\pi}\{\vec{H}\}+\left\{\nabla\Phi+\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{S}\right\}, \qquad (2.51)$$

где $\vec{v}'=\vec{v}-\vec{u}$, а $\vec{u}$ – скорость движения границы, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{R}+(\vec{u}\nabla R)=0, \qquad (2.52)$$

которое получается дифференцированием по времени уравнения границы $R=0$. Определение скорости $\vec{u}$ не является однозначным (к $\vec{u}$ можно добавить произвольный вектор, перпендикулярный нормали к поверхности), однако ее нормальная компонента определена однозначно, что достаточно для дальнейшего. При получении уравнений (2.47) – (2.49) учтено легко проверяемое тождество

$$\{DX\}=\partial_t\{X\}+\left\{(\vec{v}'\nabla)X\right\},$$

а также непрерывность вектора $\vec{S}$.

Как видно, уравнение (2.47) дает нам дополнительное граничное условие для всех типов разрывов, а уравнения (2.47) – (2.50) определяют динамику скачков. Однако для тех типов разрывов, на которых соответствующая величина непрерывна, производная по времени от скачка обращается в нуль и мы приходим к граничному условию, дополняющему систему уравнений (2.33) – (2.45). Очевидно, что так будет при $j\neq 0$.

Анализ полученной совокупности граничных условий показывает, что из нее следуют непрерывность потоков массы, энергии, импульса, нормальной компоненты магнитного и тангенциальных компонент электрического поля. При этом оказывается возможным рассмотрение всех типов разрывов, включая ударные волны и вращательные разрывы, что представляется нетривиальным результатом. Вместе с тем достаточно неожиданным является тот факт, что полученные выше уравнения позволяют описать только такие тангенциальные разрывы, для которых скачок скорости и магнитного поля взаимно ортогональны. Для других разрывов какие-либо ограничения отсутствуют. Это означает, что требования к вспомогательным переменным, введенные выше в вариационный принцип, являются избыточными. Представляется очевидным, что это связано с условиями, налагаемыми на вектор $\vec{S}$ и скаляр Φ (об этом свидетельствует правильность предельного перехода к случаю обычной гидродинамики). Вместе с тем автору не удалось найти такой вариант модификации ВГУ, который снимал бы указанное ограничение.

Ввиду громоздкости здесь не приводятся преобразования (отдельно для нулевого и ненулевого потока массы через границу), доказывающие сформулированные утверждения. Существенно, что полученная система оказывается совместной и, разумеется, содержит меньше независимых уравнений, чем неизвестных функций. Последнее обстоятельство связано не только с тем, что граничные условия для физических переменных (скорость, плотность, давление, энтропия и магнитное поле) должны обладать необходимым числом степеней свободы, см. [28], но и с тем фактом, что введенные дополнительные переменные обладают калибровочной свободой. При этом калибровочной свободой можно воспользоваться для упрощений в каждой конкретной задаче.

2.2. Исключение скорости

Как уже упоминалось выше, вариационный принцип с исключенной скоростью приводит к тем же объемным уравнениям. Единственное изменение сводится к тому, что представление скорости (2.16) при этом не следует из вариационного принципа, а должно добавляться к системе вариационных уравнений. Однако, исключение скорости приводит к необходимости изменения поверхностного члена в действии, поскольку меняется совокупность независимо варьируемых величин и повышается порядок объемной части лагранжиана по пространственным производным. Полагая теперь, что во всех соотношениях, в частности в лагранжиане (2.5) и в слагаемом со связями (2.6), скорость выражена через введенные переменные согласно (2.19), $\vec{v}=\vec{v}_0$, убеждаемся, что в вариации объемного действия отсутствуют слагаемые, пропорциональные $\delta\vec{v}_0$. Поэтому исключение скорости не меняет поверхностного интеграла $(\delta A)_{\text{bound}}$. Единственное изменение связано с тем, что вариация граничного значения скорости, входящая в вариацию поверхностной части действия в комбинации K, дается выражениями (2.26), (2.27). Здесь удобнее записать K в виде

$$K=\left(\tilde{\rho}\tilde{\vec{v}}_0,\nabla R\right), \tag{2.53}$$

так что при $R=z-\zeta=0$ имеем:

$$\delta K=\left(\delta\tilde{\vec{\Pi}},\nabla R\right)+\left(\tilde{\vec{\Pi}},\delta\nabla R\right)=\left(\delta\tilde{\vec{\Pi}},\nabla R\right)-\left(\tilde{\vec{\Pi}},\nabla_{\perp}\delta\zeta\right),$$

где $\tilde{\vec{\Pi}}=\tilde{\rho}\tilde{\vec{v}}_0$ – граничное значение плотности импульса жидкости. В результате для вариации $\{K\tilde{\Gamma}\}$ получаем:

$$\delta\{K\tilde{\Gamma}\}=\{K\delta\tilde{\Gamma}\}+\left\{\left(\delta\tilde{\vec{\Pi}},\nabla R\right)\tilde{\Gamma}\right\}-\left\{\tilde{\Gamma}\left(\tilde{\vec{\Pi}},\nabla_{\perp}\delta\zeta\right)\right\}=$$
$$=\{K\delta\tilde{\Gamma}\}+\left\{\tilde{\Gamma}\left(\delta\tilde{\vec{\Pi}},\nabla R\right)\right\}+\delta\zeta\nabla_{\perp}\left\{\tilde{\vec{\Pi}}\tilde{\Gamma}\right\}-\nabla_{\perp}\left\{\tilde{\vec{\Pi}}\tilde{\Gamma}\delta\zeta\right\}.$$

Вклад в вариацию действия от последнего слагаемого обращается в нуль, если отсутствуют пересечения разрывов. Действительно, он преобразуется в интеграл вдоль линии, ограничивающей поверхность разрыва, и поэтому в случае замкнутой поверхности обращается в нуль тождественно, а при бесконечной поверхности мы требуем обращения $\delta\zeta$ в нуль на бесконечности, что приводит к нулевому значению интеграла.

Учтем теперь, что вариация граничного значения импульса жидкости равна

$$\delta\tilde{\vec{\Pi}}=-\delta\tilde{P}\cdot\tilde{\nabla}Q-\tilde{P}\cdot\delta\tilde{\nabla}Q-$$
$$-\left[\delta\tilde{\vec{H}}\times\left[\tilde{\nabla}\times\vec{S}\right]\right]-\left[\tilde{\vec{H}}\times\delta\left[\tilde{\nabla}\times\vec{S}\right]\right]$$

и содержит вариации граничных значений обобщенных импульсов $\delta\mathscr{P}$ и граничных значений пространственных производных от обобщенных координат $\delta\tilde{\nabla}\mathscr{Q}$. Считая последние взаимно независимыми, а также независимыми от других вариаций, приходим к вариационным уравнениям:

$$\delta\tilde{\nabla}Q:\ \Rightarrow\ \tilde{\Gamma}\cdot\tilde{P}=0, \tag{2.54}$$

$$\delta\left[\tilde{\nabla}\times\vec{S}\right]:\ \Rightarrow\ \tilde{\Gamma}\cdot\left[\tilde{\vec{H}}\times\nabla R\right]=0. \tag{2.55}$$

Следовательно, вместо одного уравнения (2.38) мы получаем совокупность однотипных уравнений. Они допускают два решения: $\tilde{\Gamma}=0$ при произвольных граничных значениях обобщенных импульсов и $\tilde{\Gamma}\neq 0$ при нулевых граничных значениях $\tilde{P}$ и нулевых тангенциальных компонентах магнитного поля, $\tilde{\vec{H}}_{\tau}=0$. Очевидно, что вариант с $\tilde{\Gamma}\neq 0$ неприемлем, поскольку при этом для граничных значений скорости получаем:

$$\tilde{\rho}\tilde{\vec{v}}_0=-\left[\tilde{\vec{H}}\times\left[\tilde{\nabla}\times\vec{S}\right]\right]=-\tilde{H}_n\left[\vec{n}\times\left[\tilde{\nabla}\times\vec{S}\right]\right],$$
$$\tilde{\Gamma}\neq 0.$$

В частности, при $H_n=0$ граничное значение скорости обращается в нуль, так что предельный переход к обычной гидродинамике также соответствует обращению в нуль скорости.

Варьирование по граничным значениям обобщенных импульсов, за исключением плотности, приводит к условиям:

$$\delta\tilde{\lambda}_m: \;\Rightarrow\; -\tilde{\Gamma}\cdot(\nabla R, \tilde{\nabla}\mu_m) = 0, \tag{2.56}$$

$$\delta\tilde{\sigma}: \;\Rightarrow\; -\tilde{\Gamma}\cdot(\nabla R, \tilde{\nabla}s) = 0, \tag{2.57}$$

$$\delta\tilde{\vec{H}}: \;\Rightarrow\; \tilde{\Gamma}\cdot\left(\nabla R, [\tilde{\nabla}\times\vec{S}]\right) = 0. \tag{2.58}$$

Варьируя по плотности получаем:

$$\delta\tilde{\rho}: \;\Rightarrow\; -\tilde{\Gamma}\cdot\left((\nabla R, \tilde{\nabla}\varphi) + \dot{\zeta}\right) = 0. \tag{2.59}$$

Видно, что при $\tilde{\Gamma} = 0$ эти уравнения, в сравнении с предыдущими, не дают ничего нового. Поэтому можно упростить вариационный принцип, полагая, что граничные значения обобщенных импульсов не варьируются.

Варьирование по ζ, как и в случае неисключенной скорости, приводит к уравнению (2.45), поскольку при $\tilde{\Gamma} = 0$ вариационная производная $\delta A_\Sigma/\delta\zeta = 0$. Варьирование по граничным значениям обобщенных координат и величины $\tilde{\Phi}$ приводит к тем же уравнениям, что и при неисключенной скорости (см. (2.40), (2.42) – (2.44)). Точно так же не меняются уравнения (2.33) – (2.37).

Видно, что получаемая система ВГУ эквивалентна рассмотренной выше для случая неисключенной скорости. Изменение заключается в том, что вместо варьирования граничных значений скорости необходимо проводить варьирование по граничным значениям производных от обобщенных объемных координат. При этом вместо одного уравнения (2.38) получаем систему уравнений (2.54), (2.55), которая приводит к тому же условию $\tilde{\Gamma} = 0$, что и (2.38).

Проведенное исключение скорости из числа независимых переменных позволяет легко перейти к гамильтоновым переменным.

3. Канонические переменные

Сформулируем вариационный принцип в гамильтоновых (канонических) переменных. Как следует из предыдущего рассмотрения, в качестве объемных канонических координат, $\mathcal{Q} = (Q, \vec{S})$, удобно выбрать плотность жидкости, лагранжевы маркеры $\vec{\mu}$, плотность энтропии s и лагранжев множитель $\vec{S}$. Сопряженными к ним импульсами, $\mathcal{P} = (P, \vec{H})$, являются, соответственно, потенциал φ, величины $\vec{\lambda}$, σ и магнитное поле. Объемная плотность гамильтониана $\mathcal{H}_V$ равна

$$\mathcal{H}_V = \mathcal{H}_V\left(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \nabla\mathcal{Q}, \nabla\Phi\right) = \mathcal{P}\dot{\mathcal{Q}} - \mathcal{L}' =$$

$$= \frac{\rho v_0^2}{2} + \rho\varepsilon(\rho, s) + \frac{H^2}{8\pi} + \vec{H}\nabla\Phi, \tag{3.1}$$

где скорость $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(\mathcal{P}, \nabla\mathcal{Q})$ определена в (2.20). Величина $\mathcal{H}_V$ в (3.1) отличается от плотности энергии только слагаемым $\vec{H}\nabla\Phi$. Варьирование объемной части действия

$$A_V = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}\vec{r}\,(\mathcal{P}\dot{\mathcal{Q}} - \mathcal{H}_V) \tag{3.2}$$

по $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$ приводит к каноническим уравнениям:

$$\dot{\mathcal{Q}} = \delta H_V/\delta\mathcal{P}, \qquad \dot{\mathcal{P}} = -\delta H_V/\delta\mathcal{Q},$$

где

$$H_V = \int \mathrm{d}\vec{r}\,\mathcal{H}_V.$$

Варьирование (3.2) по Φ приводит, как и раньше, к уравнению $\operatorname{div}\vec{H} = 0$, которое с учетом того, что сопряженный к Φ импульс равен нулю, можно записать в форме:

$$\delta H_V/\delta\Phi = -\operatorname{div}\vec{H} = 0.$$

Наличие в гамильтониане поля Φ приводит, по сути, к тому, что мы имеем дело с расширенным гамильтоновым подходом [29]. Путем выбора калибровки $\vec{S}$ поле Φ можно в принципе исключить из гамильтониана (см. например, [19]), однако мы пока не будем фиксировать калибровку. Заметим, что уравнение $\operatorname{div}\vec{H} = 0$ в действительности не является вполне независимым: из динамического уравнения для магнитного поля следует, что $\partial_t(\operatorname{div}\vec{H})=0$, поэтому достаточно принять, что уравнение $\operatorname{div}\vec{H}=0$ выполняется в начальный момент времени. Тогда оно будет выполняться в любой момент времени и надобности во введении Φ нет.

Рассмотрим теперь поверхностный гамильтониан H_Σ. Учитывая, что сопряженный к ζ импульс $\pi_\zeta=-\{\rho\Gamma\}$, согласно стандартной процедуре получаем:

$$H_\Sigma=\int d\vec{r}_\perp \mathscr{H}_\Sigma, \tag{3.3}$$

$$\mathscr{H}_\Sigma\equiv\pi_\zeta\dot{\zeta}-\mathscr{L}_\Sigma=-\{\rho\left(\tilde{\vec{v}}_0,\nabla R\right)\Gamma\}-\vec{F}\{\vec{S}\}-\chi\{\Phi\}.$$

Поверхностный вклад в действие теперь записывается как

$$A_\Sigma=\int dt(\pi_\zeta\dot{\zeta}-H_\Sigma). \tag{3.4}$$

Поскольку при гамильтоновом подходе обобщенные координаты и импульсы варьируются независимо, здесь возникает проблема при варьировании по $\{\rho\Gamma\}$. Действительно, ρ является независимой переменной, а Γ – комбинация независимо варьируемых переменных. Простейший способ преодоления этой трудности заключается во введении двух дополнительных независимых поверхностных функций, аналогично тому, как это было сделано в случае обычной гидродинамики [24]. В качестве одной из этих функций выберем z-компоненту скорости границы u, полагая $\vec{u}=u\vec{e}_z$, (при этом $\vec{u}\nabla R=u$), вводя в поверхностную плотность лагранжиана связь $\dot{\zeta}=u$ с помощью множителя Лагранжа ψ:

$$\mathscr{L}_\Sigma=\{\rho(\vec{v}'_0,\nabla R)\Gamma\}+\vec{F}\{\vec{S}\}+\chi\{\Phi\}+\psi(\dot{\zeta}-u),$$

$$\vec{v}'_0=\tilde{\vec{v}}_0-\vec{e}_z u.$$

Очевидно, что теперь сопряженным к ζ импульсом является независимая величина ψ, а поверхностная плотность гамильтониана равна

$$\mathscr{H}_\Sigma\equiv\psi\dot{\zeta}-\mathscr{L}_\Sigma=-\{\rho(\vec{v}'_0,\nabla R)\Gamma\}-\vec{F}\{\vec{S}\}-\chi\{\Phi\}+\psi u. \tag{3.5}$$

Предполагая вариации ψ и u независимыми от вариаций других переменных, получаем при варьировании (3.4) с учетом (3.3) и (3.5) два дополнительных граничных условия:

$$\delta u:\quad\Rightarrow\quad \psi=-\{\rho\Gamma\}, \tag{3.6}$$

$$\dot{\zeta}=\delta H/\delta\psi=\delta H_\Sigma/\delta\psi=u.$$

Варьирование по ζ теперь дает:

$$\dot{\psi}=-\frac{\delta H}{\delta\zeta}=\left\{p+\frac{H^2}{8\pi}-\mathscr{P}\tilde{v}'_{0n}\partial_n\mathscr{Q}+\right.$$
$$\left.+H_n\left(\tilde{\vec{v}}_0,\partial_n\vec{S}\right)+H_n\partial_n\Phi\right\}+\nabla_\perp\left\{\tilde{\rho}\tilde{\tilde{\vec{v}}}_0\tilde{\Gamma}\right\}. \tag{3.7}$$

Последние два равенства представляют гамильтоновы уравнения для поверхностной обобщенной координаты ζ и сопряженного к ней импульса ψ. Уравнение (3.7) заменяет в рассматриваемом случае уравнение (2.45). Остальные граничные условия совпадают с рассмотренными выше. Поэтому с учетом тождества (3.6) и равенства $\Gamma=0$ убеждаемся, что ψ, $\dot{\psi}$ и $\nabla_\perp\left\{\tilde{\rho}\tilde{\tilde{\vec{v}}}_0\tilde{\Gamma}\right\}$ обращаются в нуль, так что уравнения (3.7) и (2.45) эквивалентны.

Следовательно, сформулированный вариационный принцип в канонических переменных применим для описания МГД течений с разрывами, поскольку совокупность включенных в него граничных условий та же, что и для рассмотренного в предыдущем разделе.

4. Заключение

Рассмотрены два варианта вариационного принципа, позволяющие исследовать МГД течения с разрывами в эйлеровом представлении. В частности, сформулирован вариационный принцип в канонических (гамильтоновых) переменных. При этом каноническое описание требует введения не только объемных обобщенных координат и импульсов, но также и поверхностной пары. Поверхностной обобщенной координатой является функция, определяющая уравнение поверхности разрыва (в простейшем случае – возвышение границы). Поверхностный канонический импульс обращается в нуль в силу граничных условий. Показано, что полученные вариационные принципы позволяют рассматривать МГД течения с разрывами всех допустимых типов (с единственным ограничением – в тангенциальных разрывах скачок скорости и магнитного поля взаимно ортогональны).

Отличительной особенностью рассмотренного подхода является явное включение граничных условий в вариационный принцип. Кроме того, используемое представление скорости через обобщенные потенциалы обеспечивает возможность рассмотрения наиболее общих МГД течений, без каких-либо ограничений на топологические инварианты. Полученное описание допускает предельный переход к случаю обычной гидродинамики без каких-либо ограничений на характер течения. На базе проведенного анализа возможно сформулировать упрощенные вариационные принципы, позволяющие описать разрывы частных типов, подобно тому, как это сделано в работе [24] для обычной гидродинамики. Принципиальным моментом является возможность рассмотрения в рамках гамильтонова подхода ударных волн и вращательных разрывов.

Автор признателен В. М. Конторовичу за плодотворное обсуждение вопросов, касающихся радиоастрономических и астрофизических приложений, и С. А. Деревянко за сотрудничество на подготовительном этапе работы.

Работа выполнена при поддержке INTAS (грант 00-00292).

Литература

1. C. M. Begelman, R. D. Blanford, M. J. Rees. Rev. Mod. Phys. 1984, **56**, No. 2, pp. 255-351.
2. A. H. Bridle, R. A. Perley. Annual Rev. Astron. and Astrophys. 1984, **22**, pp. 319-358.
3. С. Г. Гестрин, В. М. Конторович. Радиофизика и радиоастрономия. 1997, **2**, № 4, с. 419-438.
4. M. L. Norman et al. Astron. Astrophys. 1982, **113**, No. 1, pp. 285-302.
5. J. W. Bates, D. C. Montgomery. Phys. Rev. Lett. 2000, **84**, No. 6, pp. 1180-1183.
6. M. Mond, L. Drury. Asron. Asrophys. 1998, **338**, pp. 385-391.
7. С. Ф. Пименов. ЖЭТФ. 1982, **83**, вып. 1(7), с. 106-113.
8. В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко. ПМТФ. 1967, №5, с. 310-314.
9. В. Е. Захаров. ПМТФ. 1968, №2, с. 86-90.
10. H. D. I. Abarbanel, R. Brown, Y. M. Yang. Phys. Fluids. 1988, **31**, No. 10, pp. 2802-2809.
11. D. Lewis, J. Marsden, R. Montgomery. Physica. 1986, **18D**, pp. 391-404.
12. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. Москва, Наука, 1974, 432 с.
13. V. E. Zakharov, V. S. L'vov, G. Falkovich. Kolmogorov Spectra of Turbulence. Wave Turbulence. Springer–Verlag, N.Y., 1992, 330 pp.
14. V. A. Vladimirov, H. K. Moffatt. J. Fluid Mech. 1995, **283**, pp. 125-139.
15. V. A. Vladimirov, H. K. Moffatt, K. I. Ilin. J. Fluid Mech. 1996, **329**, pp. 187-205; J. Plasma Phys. 1997, **329**, pp. 89-120; J. Fluid Mech. 1999, **390**, pp. 127-150.
16. В. Л. Бердичевский. Вариационные принципы в механике сплошной среды. Москва, Наука, 1983, 447 с.
17. В. П. Гончаров, В. И. Павлов. Проблемы гидродинамики в гамильтоновом описании. Москва, Изд. МГУ, 1993, 196 с.
18. H. Lamb. Hydrodynamics. Cambridge Univ. Press, 1932, 459 pp.
19. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов. УФН. 1997, **167**, №11, с. 1137-1167.
20. В. М. Конторович. Радиофизика и радиоастрономия. 2001, **6**, №3, с. 165-211.

21. А. Н. Крайко. ПММ. 1981, **45**, с. 256-263.
22. В. М. Конторович, Х. Кравчик, В. Тиме. Препринт ИРЭ АН УССР. Харьков, 1980, №158, 12 с.; сб. “Взаимодействие и самовоздействие волн в нелинейных средах.” Часть II. Душанбе, изд-во Дониш, 1988, с 73-77.
23. А. В. Кац, В. М. Конторович. ФНТ. 1997, **23**, №1, с. 1137-1167.
24. A. V. Kats. Physica D. 2001, **152-153**, pp. 459-474.
25. C. C. Lin. Liquid helium. In: Proc. of Int. School of physics, Course XXI. 1963. Academic Press, New York.
26. И. М. Халатников. ЖЭТФ. 1952, **23**, №1, с. 169-176.
27. A. V. Kats, V. N. Korabel. Problems of Atomic Science and Technology. 2001, No. 6, pp. 88-90.
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Москва, Наука, 1982, 620 с.
29. Д. М. Гитман, И. В. Тютин. Каноническое квантование полей со связями. Москва, Наука, 1986, 216 с.

Variational Principles and Canonical Variables for MHD Flows with Breaks. I

A. V. Kats

In the paper some astrophysical problems are formulated relating to magnetohydrodynamic flows with breaks (jets, shocks, etc.) which solving needs investigation of the nonlinear stage of instability.

As the first step, some variants of the variational principle are under examination in application to dissipation-free magnetohydrodynamic flows with discontinuities in the Euler representation both in terms of Lagrange and Hamilton (canonical) variables. The generalized Clebsch representation for the velocity field follows from the variational principle due to including the constraint terms into the action. The gauge freedom related to the introducing of generalized potentials which describe the velocity field is discussed. The advantage of the representation introduced lies in the fact that it corresponds to the general type flows and includes all limiting cases (isentropic and barotropic flows, etc.). At the same time all the invariants of the motion (including topological invariants) possess nonzero values. Besides, the limiting transition to the case of conventional hydrodynamics also leads to the nonzero values of all hydrodynamic invariants, including helicity. There are obtained such boundary conditions on the breaks for the generalized potentials (which represent generalized coordinates and conjugate momenta) that make them equivalent to conventional boundary conditions. The principal new point of the approach proposed is the fact that it allows dealing not only with the contact breaks, but with shocks and rotational breaks as well. The case of slide breaks needs extra examining because the variational principal formulated allows dealing only with such subset of slides in which the jumps of the velocity and magnetic field are orthogonal.

The approach proposed allows essential simplification of the astrophysical problems formulated, and can be used for other analogous problems.