

Линейные и нелинейные волны (элементарное введение в теорию гамильтоновых переменных с приложениями к физике и астрофизике)

В. М. Конторович

*Радиоастрономический институт НАН Украины,
Украина, 61002, Харьков, ул. Краснознаменная, 4
E-mail: vkont@ira.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 16 июля 2000 г., после переработки 28 августа 2001 г.

На примере волн в объеме и на поверхности жидкости вводятся гамильтоновы переменные для сплошных сред, широко используемые в настоящее время в физике плазмы, гидродинамике и теории поля. Рассмотрены регулярные способы введения таких переменных, в том числе в средах с разрывами, с помощью вариационного принципа и канонических преобразований. Метод обратной задачи рассеяния приведен как нетривиальный пример канонического преобразования к переменным “действие-угол”. Приведены примеры линейных и нелинейных неустойчивостей. Настоящая публикация представляет собой первую часть обзора.

Вторая часть обзора будет посвящена кинетическим уравнениям, используемым при описании слабой турбулентности, в том числе точным методам получения неравновесных потоковых распределений. Описаны применения кинетического уравнения Смолуховского к рассмотрению процессов слияния галактик и формирования их спектра масс. Рассмотрены также нелокальные распределения и частично когерентные системы.

На прикладі хвиль в об'ємі та на поверхні рідини вводяться гамільтонові змінні для суцільних середовищ, широко використовувані в нинішній час у фізиці плазми, гідродинаміці та теорії поля. Розглянуто регулярні засоби введення таких змінних, у тому числі в середовищах з розривами, за допомогою варіаційного принципу та канонічних перетворень. Засіб зворотного розсіяння наведений як нетривіальний зразок канонічного перетворення до змінних “дія-кут”. Наведено приклади лінійних та нелінійних нестійкостей. Ця публікація є першою частиною огляду.

Друга частина огляду буде присвячена кінетичним рівнянням, що використовуються для опису слабкої турбулентності, в тому числі точним засобам отримання нерівноважних потокових розподілів. Описано застосування кінетичного рівняння Смолуховського до розгляду процесів злиття галактик і формування їх спектру мас. Розглянуто також нелокальні розподіли та частково когерентні системи.

Содержание

Часть I. Динамический подход

- 1. Звуковые волны (случай отсутствия дисперсии)*
- 2. Волны на поверхности тяжелой жидкости – пример дисперсии*

3. Волны на поверхности раздела и линейные неустойчивости

- а) Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца*
- б) Ветровая неустойчивость*

4. Гамильтоновы уравнения для движений поверхности жидкости

К внутренней энергии ϵ могут быть добавлены слагаемые, описывающие потенциальные силы, например, силу тяжести, символически выписанную в (6.1), которую ниже мы будем опускать.

Введем канонические переменные, учитывая (неинтегрируемые) связи (6.2), (6.3) методом Лагранжа. Связи вносят в лагранжиан – плотность функции Лагранжа – необходимые временные и пространственные производные

$$L \rightarrow L' = L + \varphi(\dot{\rho} + \text{div}(\rho\mathbf{v})) + \sigma \frac{ds}{dt}, \quad (6.5)$$

Варьируя действие (6.4) с лагранжевой плотностью (6.5) независимо по \mathbf{v} , ρ и s , получаем представление скорости через ГП и уравнения (которые мы выпишем ниже в более общем случае). Варьирование по φ и σ воспроизводит связи (6.2), (6.3). Поскольку действие не содержит ускорения, обобщенный импульс, сопряженный скорости, равен нулю. Варьирование по скорости приводит к явному выражению для скорости, причем для простейшего изэнтропического случая ($\sigma = 0$) приходим к чисто потенциальному течению:

$$\frac{\delta A}{\delta \mathbf{v}} = 0 \rightarrow \mathbf{v} = \nabla \varphi.$$

Лагранжев множитель при связи, выражающей закон сохранения массы, оказался ничем иным, как потенциалом скорости⁷, а это означает, что плотность ρ и потенциал φ являются канонически сопряженными переменными [6а]. Мы используем это обстоятельство ниже в более сложном случае непотенциального движения, вводя объемные векторные потенциалы Клебша, а также поверхностные ГП.

⁷Ограничение чисто потенциальным движением возникло потому, что мы не использовали в качестве дополнительных связей законы сохранения, отражающие наличие вихревой компоненты, например, сохранение циркуляции скорости.

Канонические переменные

Нетрудно записать теперь уравнения (6.1) – (6.3) (для рассматриваемого случая) в гамильтоновом виде:

$$\frac{\delta A}{\delta \varphi} = 0 \rightarrow \dot{\rho} = \frac{\delta H}{\delta \varphi}, \quad \frac{\delta A}{\delta \rho} = 0 \rightarrow \dot{\varphi} = -\frac{\delta H}{\delta \rho}; \quad (6.6)$$

$$H = \int d\mathbf{r} H, \quad H = p\dot{q} - L = \varphi\dot{\rho} - L. \quad (6.7)$$

При этом обобщенные координаты q и импульсы p равны: $q = (\rho, \mathbf{v})$, $p = (\varphi, 0)$, а H – плотность функции Гамильтона, переход к которой чувствителен к наличию в лагранжиане производной по времени от обобщенной координаты. В дальнейшем вырожденную пару $(\mathbf{v}, 0)$ будем опускать, а скорость выражать через остальные ГП.

Векторный потенциал

Попытаемся ввести векторные канонические переменные аналогично тому, как выше был введен скалярный потенциал, но используя в качестве дополнительной связи сохранение импульса [6h]:

$$L' = L + \varphi(\dot{\rho} + \text{div} \rho\mathbf{v}) + A_l(\partial_l \rho v_l + \partial_m \Pi_{lm}), \quad (6.8)$$

$$\Pi_{lm} = \rho v_l v_m + p \delta_{lm}.$$

Варьирование по \mathbf{v} приводит к

$$\delta \mathbf{v}: \quad v_l = A_l + (\mathbf{v}\nabla)A_l + v_m \partial_l A_m + \partial_l \varphi.$$

Или, разрешая полученное соотношение относительно скорости, имеем:

$$K_{lm} v_m = \partial_l \varphi + A_l, \quad (6.9)$$

$$K_{lm} \equiv \delta_{lm} - \partial_m A_l - \partial_l A_m.$$

Таким образом, множитель Лагранжа при связи, выражающей сохранение импульса, оказался векторным потенциалом скорости. Его роль в гидродинамике в силу нелинейности уравнений, однако, несравненно менее значительна, чем в электродинамике. Для данного случая обобщенные координаты и импульсы равны: $(\rho, \rho \mathbf{v})$ – координата, (ϕ, \mathbf{A}) – импульс.

Векторные переменные Клебша

Для того чтобы ввести в лагранжиан необходимую производную по времени, представим скорость естественным образом как полную производную смещения:

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\xi}} + (\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\xi}. \quad (6.10)$$

В качестве одной из обобщенных координат выберем плотность импульса $\boldsymbol{\pi} \equiv \rho \mathbf{v}$, а (6.10) используем в качестве дополнительного условия (связи) с лагранжевым множителем \mathbf{Q} :

$$L' = L + \phi(\dot{\rho} + \text{div } \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{Q}(\rho\dot{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{\pi}\nabla)\boldsymbol{\xi}). \quad (6.11)$$

Аналогично предыдущему, варьирование по $\boldsymbol{\pi}$ дает нам выражение для скорости через ГП. В результате варьирования получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\pi}}: \quad \mathbf{v} &= \nabla \phi + \mathbf{Q} - Q_m \nabla \xi_m, \\ \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\xi}}: \quad \partial_t(\rho Q_t) + \partial_m(Q_t \pi_m) &= 0, \\ \frac{\delta}{\delta \mathbf{Q}}: \quad \rho \dot{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\pi} + (\boldsymbol{\pi}\nabla)\boldsymbol{\xi} &= 0, \quad (6.12) \\ \frac{\delta}{\delta \rho}: \quad \dot{\phi} - \left(\frac{\pi^2}{2\rho} + w \right) + \mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\xi}} &= 0, \\ \frac{\delta}{\delta \phi}: \quad \dot{\rho} + \text{div } \boldsymbol{\pi} &= 0. \end{aligned}$$

Видно, что $(\rho, \boldsymbol{\xi})$ – обобщенная координата, $(\phi, \rho \mathbf{Q})$ – сопряженный импульс. Теперь легко строится гамильтониан

$$H = \phi \dot{\rho} + \rho \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\xi}} - L' \quad (6.13)$$

и выписываются канонические уравнения:

$$\dot{\rho} = \frac{\delta H}{\delta \phi}, \quad \dot{\phi} = -\frac{\delta H}{\delta \rho}; \quad (6.14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\delta H}{\delta(\rho \mathbf{Q})}, \quad \partial_t(\rho \mathbf{Q}) = -\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{\xi}}. \quad (6.15)$$

Произведем теперь сдвиг на радиус-вектор (каноническое преобразование), введя новую координату $\boldsymbol{\mu}$, которая соответствует сохраняющейся лагранжевой координате частицы как функции ее текущей координаты,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}, \\ \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu}, t), t), \quad (6.16) \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu}, 0) = \boldsymbol{\mu}.$$

Полученное представление соответствует векторному⁸ представлению Клебша [6с, h]

$$\mathbf{v} = \left. \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \right|_{\boldsymbol{\mu}} = \partial_t \mathbf{r} \Big|_{\boldsymbol{\mu}} = \dot{\boldsymbol{\xi}} \Big|_r + (\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\xi}. \quad (6.17)$$

⁸Хотя объемные ГП в обычной гидродинамике известны давно, способ их введения, особенно для непотенциального течения, как правило, оставался до самого последнего времени чисто директивным. В связи с этим, время от времени возникали вопросы, сколько должно быть пар переменных Клебша, входит ли энтропия в их число и т. п. В том, что касается представления скорости для непотенциального движения, используемый подход, по-видимому, соответствует вариационному принципу Линя [6с], и однозначно приводит к векторным потенциалам Клебша, исключая произвол в выборе их числа.

Теперь нетрудно выписать гамильтоновы уравнения в векторных переменных Клебша $q = (\rho, \boldsymbol{\mu}, s)$, $p = (\varphi, \boldsymbol{\lambda}, \sigma)$, где $\boldsymbol{\mu}$ – лагранжева координата, $\boldsymbol{\lambda}/\rho$ – лагранжев импульс. (Обсуждение см. в [2f, 6h]). Здесь приведем гамильтониан $H = \sum p\dot{q} - L'$, $p = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}}$ и представление скорости:

$$L' = L + \varphi(\dot{\rho} + \text{div}(\rho\mathbf{v})) + \boldsymbol{\lambda} \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} + \sigma \frac{ds}{dt}, \quad (6.18)$$

$$H = \rho\mathbf{v} \left(\nabla\varphi - \frac{\lambda_m}{\rho} \nabla\mu_m - \frac{\sigma}{\rho} \nabla s \right) - L - \text{div}(\rho\mathbf{v}\varphi) = \tilde{H} - \text{div}(\rho\mathbf{v}\varphi), \quad (6.19)$$

$$\tilde{H}(\rho, s, \boldsymbol{\lambda}, \sigma, \nabla\varphi, \nabla\mu_m, \nabla s) = \frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon,$$

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi - \frac{\lambda_m}{\rho} \nabla\mu_m - \frac{\sigma}{\rho} \nabla s.$$

Переход к скалярным переменным Клебша реализуется в том частном случае, когда $\boldsymbol{\lambda}/\rho$ и $\boldsymbol{\mu}$ пропорциональны одному и тому же постоянному по направлению вектору.

Гамильтоновы переменные в магнитной гидродинамике

Проведенные рассуждения непосредственно обобщаются на магнитную гидродинамику (и другие родственные системы). В случае МГД вариационный принцип принимает вид

$$A = \int dt L \leftarrow \min,$$

$$L = \int d\mathbf{r} L, \quad (6.20)$$

$$L = \frac{\rho v^2}{2} - \rho\varepsilon - \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}.$$

Связи включают условие замороженности поля $\dot{\mathbf{H}} - \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = 0$ и условие $\text{div} \mathbf{H} = 0$. В итоге лагранжиан со связями принимает вид $L \rightarrow L' = L + F$, где

$$F = \varphi(\dot{\rho} + \text{div} \rho\mathbf{v}) + \sigma \frac{ds}{dt} + \boldsymbol{\lambda} \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} + \phi \text{div} \mathbf{H} + \mathbf{S}(\dot{\mathbf{H}} - \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}]) + \text{div} \mathbf{G}. \quad (6.21)$$

Дивергентный член, как и в (6.19), существен при получении поверхностных переменных (см. [6h,i]). Гамильтониан $H = \sum p\dot{q} - L'$ строится с помощью обобщенных переменных $q = (\rho, s, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{H})$, $p = (\varphi, \sigma, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{S})$, где канонические импульсы определены согласно

$$\varphi = \frac{\delta A}{\delta \rho}, \quad \sigma = \frac{\delta A}{\delta s}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \frac{\delta A}{\delta \boldsymbol{\mu}}, \quad \mathbf{S} = \frac{\delta A}{\delta \dot{\mathbf{H}}}. \quad (6.22)$$

Гамильтоновы уравнения $\dot{q} = \frac{\delta H}{\delta p}$, $\dot{p} = -\frac{\delta H}{\delta q}$, где $H = \int d\mathbf{r} H$, соответственно совпадают с результатами варьирования действия:

$$\delta\mathbf{v}: \quad \rho\mathbf{v} - \rho\nabla\varphi + \boldsymbol{\lambda}\nabla\boldsymbol{\mu} + \sigma\nabla s - [\mathbf{H}\text{rot}\mathbf{S}] = 0,$$

$$\delta\varphi: \quad \dot{\rho} + \text{div} \rho\mathbf{v} = 0,$$

$$\delta\boldsymbol{\lambda}: \quad d\boldsymbol{\mu}/dt = 0,$$

$$\delta\sigma: \quad ds/dt = 0,$$

$$\delta\rho: \quad v^2/2 - w - d\varphi/dt = 0, \quad w = \varepsilon + p/\rho, \quad (6.23)$$

$$\delta\boldsymbol{\mu}: \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} + \nabla_m(\boldsymbol{\lambda}v_m) = 0,$$

$$\delta s: \quad \dot{\sigma} + \text{div} \sigma\mathbf{v} + \rho T = 0,$$

$$\delta\phi: \quad \text{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\delta\mathbf{S}: \quad \dot{\mathbf{H}} - \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}] = 0,$$

$$\delta\mathbf{H}: \quad \dot{\mathbf{S}} - \text{rot}[\mathbf{S}, \mathbf{H}] + \nabla\phi + \frac{\mathbf{H}}{4\pi} = 0.$$

Они соответствуют гамильтоновым переменным Захарова и Кузнецова [2f], отличаюсь векторным характером переменных Клебша.

Гамильтоново описание движения поверхностей разрыва

В случае, если имеется свободная граница

$$z = \zeta(\mathbf{r}_\perp, t), \quad \mathbf{r}_\perp = (x, y), \quad (6.24)$$

можно ввести “двумерные” канонические переменные Захарова: $\zeta(\mathbf{r}_\perp, t)$, $\Psi(\mathbf{r}_\perp, t) = \phi|_\zeta$, ($\rho = 1$). Эти гамильтоновы переменные⁹ использовались при исследовании волнения на поверхности жидкости. В связи с рассмотрением внутренних волн в работе [6] получено (довольно очевидное, но, как мы увидим, весьма важное для нас) обобщение переменной Захарова на случай границы двух сред (см. ссылки в [6]):

$$\zeta, \Psi = (\rho_1 \phi_1 - \rho_2 \phi_2) \equiv [\rho \phi]. \quad (6.25)$$

Покажем, как можно ввести поверхностные ГП, используя вариационный принцип со связями [6h]. Пусть уравнение поверхности разрыва (любого типа) имеет вид: $R(\mathbf{r}, t) = 0$, где функция R либо задана (определяя форму фиксированной жесткой границы), либо подлежит определению (например, на свободной границе) при решении гидродинамической задачи. При очевидных ограничениях локально его можно представить в разрешенной форме:

⁹При их введении использовалось объемное уравнение для потенциала скорости (уравнение Лапласа) и то, что сопряженная ему координата в рассматриваемом случае несжимаемой жидкости является константой. Ввиду последнего, потенциал может быть в принципе исключен из гамильтониана; существенными переменными в этом случае являются возвышение и граничное значение потенциала, что соответствует наличию одной (континуальной) физической степени свободы.

$$R = z - \zeta(\mathbf{r}_\perp, t). \quad (6.26)$$

Дифференцируя (6.26) по времени, получаем кинематическое условие

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla R = 0, \quad (6.27)$$

где \mathbf{u} – скорость движения границы¹⁰, которую без ограничения общности будем считать направленной по нормали \mathbf{n} (нормаль направлена из среды 1 в среду 2). Кинематическое условие используем в качестве связи в вариационном принципе с лагранжевым множителем ψ . Как и в (6.25) квадратные скобки означают скачок соответствующей величины на границе. Условия на скачке

$$[\rho v'_n] = 0, \quad [\rho \mu v'_n] = 0 \quad (6.28)$$

с лагранжевыми множителями γ и η , соответственно также будем использовать как связи ($\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ – относительная скорость на разрыве). Поверхностный лагранжиан со связями ($\Psi = \frac{\delta L}{\delta \zeta}$ – сопряженный возвышению границы импульс)

$$L_\Sigma = -\psi(\dot{R} + \mathbf{u} \nabla R) + [\rho \mathbf{v}' \Gamma] \nabla R, \quad \Gamma = \gamma + \eta \mu \quad (6.29)$$

приводит к гамильтониану

$$H_\Sigma = \psi \dot{\zeta} - L_\Sigma = \psi \mathbf{u} \nabla R - [\rho \mathbf{v}' \Gamma] \nabla R.$$

Варьируя как по объемным, так и по поверхностным переменным, получаем [6h]:

¹⁰Разумеется, существенна только ее нормальная к разрыву компонента.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}: \quad & \rho(\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\Gamma}) = 0, \\ \delta \mathbf{u}: \quad & \boldsymbol{\psi} + [\rho \boldsymbol{\Gamma}] = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\psi} = [\rho \boldsymbol{\varphi}], \\ \delta \rho: \quad & (\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\Gamma})(\mathbf{v}' \nabla R) = 0, \\ \delta \boldsymbol{\mu}: \quad & (\boldsymbol{\lambda} + \rho \boldsymbol{\eta})(\mathbf{v}' \nabla R) = 0, \\ \delta s: \quad & \sigma(\mathbf{v}' \nabla R) = 0, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \delta \zeta: \quad & \left[\sum p \dot{q} - H + \operatorname{div}(\mathbf{v} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{v}' \boldsymbol{\Gamma}) \right] - \\ & - (\partial_t \boldsymbol{\psi} + \nabla_{\perp}(\mathbf{u}_{\perp} \boldsymbol{\psi})) + \alpha \nabla_{\perp} \left(\frac{\nabla_{\perp} \zeta}{\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \zeta)^2}} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\delta \boldsymbol{\psi}: \quad \zeta - \mathbf{u} \nabla(z - \zeta) = 0,$$

$$\delta \gamma: \quad [\rho \mathbf{v}' \nabla R] = 0,$$

$$\delta \boldsymbol{\eta}: \quad [\rho \boldsymbol{\mu}(\mathbf{v}' \nabla R)] = 0.$$

При этом соотношения, не содержащие скачка, должны выполняться с каждой стороны от разрыва. Мы включили также слагаемое с поверхностным натяжением. Из системы (6.30) легко получить поверхностные ГП на контактном разрыве, на тангенциальном разрыве, на ударной волне¹¹. Заметим, что во всех случаях пара сопряженных переменных (6.25) сохраняет смысл ГП с точностью до канонического преобразования. Полученная система условий на поверхностях разрывов в канонических переменных эквивалентна обычной системе гидродинамических условий на разрывах (т. е. непрерывности потоков массы, энергии и импульса).

Поверхностные канонические переменные на разрывах в МГД

В дополнение к предыдущему используем в качестве связи уравнение движения поверхности и введем в лагранжиан соответствующую

¹¹Последнее не вполне тривиально, учитывая диссипативный характер ударной волны, но становится достаточно очевидным, если учесть идеальный характер течения по обе стороны разрыва и законы сохранения.

щее слагаемое $L_{\Sigma} = - \int d\mathbf{r}_{\perp} \boldsymbol{\psi}(\dot{R} + \mathbf{u} \nabla R) + \int d\Sigma \alpha$. Для смещения поверхности разрыва ζ найдем

сопряженный импульс $\boldsymbol{\psi} = \frac{\delta A}{\delta \zeta}$, который оказывается равным $\boldsymbol{\psi} = \{\rho \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{H}_{\tau} \mathbf{S}_{\tau}\}$. (В МГД случае фигурные скобки означают скачок на разрыве). Канонические уравнения для ζ принимают уже известный нам вид $\zeta = \frac{\delta H_{\Sigma}}{\delta \boldsymbol{\psi}}$,

$\dot{\boldsymbol{\psi}} = - \frac{\delta H_{\Sigma}}{\delta \zeta}$, причем $H_{\Sigma} = \boldsymbol{\psi} \dot{\zeta} - L_{\Sigma}$. (Подробнее см. [6g,i] и Приложение I).

7. Нелинейные процессы взаимодействия и самовоздействия волн

Удобство представления (5.10) становится очевидным при рассмотрении конкретных процессов, т. к. каждый из матричных элементов связан с каким-либо процессом, и собственно этим и определяется его физический смысл. В результате достигается значительная общность: одни и те же нелинейные процессы происходят в совершенно различных нелинейных системах. Индивидуальность нелинейности проявляется в конкретном виде матричных элементов, аналогично тому, как индивидуальность линейных свойств характеризуется видом законов дисперсии (а также, конечно, в конкретной реализации явления – связью переменных $a_{\mathbf{k}}$ с исходными естественными физическими переменными).

Рассмотрим один из простейших нелинейных процессов – возбуждение второй гармоники волной “конечной” амплитуды, которую естественно выбрать в нулевом (линейном) приближении в виде (\mathbf{k}_0 фиксировано):

$$a_{\mathbf{k}}(t) = a_{\mathbf{k}_0}^0 e^{-i\omega_0 t} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \quad \omega_0 \equiv \omega(\mathbf{k}_0). \quad (7.1)$$

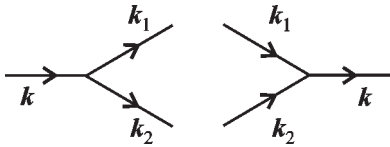
Из уравнений движения (5.13), записанных с точностью до квадратичных членов, видно, что следует удерживать только слагаемые, содержащие V^{-+} :

$$\dot{a}_k + i\omega_k a_k = -i \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 V_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{k}}^{--+} a_{\mathbf{q}_1} a_{\mathbf{q}_2} \delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}). \quad (7.2)$$

Действительно, только в них при подстановке в правую часть нулевого приближения (7.1) возникает искомая временная зависимость $e^{-2i\omega_0 t}$. Соответствующие члены в гамильтониане

$$V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}}^{--+} a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}}^* \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) + \text{к. с.} \quad (7.3)$$

можно изобразить графически с помощью диаграмм:



Удобно ввести терминологию (берущую начало от квантового описания, где величины a и a^+ являются операторами), согласно которой (в соответствии со второй диаграммой) волны $a_{\mathbf{k}_1}$ и $a_{\mathbf{k}_2}$ “исчезают”, а волна $a_{\mathbf{k}}^*$ “рождается”. Первая диаграмма соответствует “слиянию” волн с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 в волну с волновым вектором \mathbf{k} . Образование второй гармоники является частным случаем процесса слияния (волна сливается “сама с собой”).

Наглядность подобных графиков позволяет с их помощью непосредственно выписывать требуемое уравнение (в нашем случае (7.2)). Ограничившись для простоты установившимся режимом, в линейную часть уравнения “руками” введем слагаемое $\gamma_k a_k$, где γ_k – коэффициент поглощения волны (декремент) ($\gamma_k = 2\nu k^2$, если причина затухания в вязкости). После этого непосредственно получаем решение в виде ($V \equiv V_{\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_0 2\mathbf{k}_0}^{--+}$, опущены индексы):

$$a_{2\mathbf{k}_0}(t) = \frac{V a_0^2 e^{-2i\omega_0 t}}{2\omega_{\mathbf{k}_0} - \omega_{2\mathbf{k}_0} + i\gamma_{2\mathbf{k}_0}}, \quad a_0 \equiv a_{\mathbf{k}_0}^0. \quad (7.4)$$

Очевидным образом получается и нестационарное решение, описывающее возникновение второй гармоники, но мы не будем на этом останавливаться. Из вида решения следует, что вторая гармоника мала в меру малости квадрата амплитуды исходной волны a_0 , но может стать значительной за счет резонанса, когда разность частот в знаменателе (7.4) обратится в нуль:

$$2\omega_{\mathbf{k}_0} = \omega_{2\mathbf{k}_0}. \quad (7.5)$$

Разделив на $2k_0$, получим так называемое условие синхронизма:

$$V_{\mathbf{k}_0} \equiv \frac{\omega_{\mathbf{k}_0}}{k_0} = \frac{\omega_{2\mathbf{k}_0}}{2k_0} \equiv V_{2\mathbf{k}_0}, \quad (7.5')$$

т. е. равенство фазовых скоростей волны и ее второй гармоники.

В нелинейной оптике эффективное возбуждение второй гармоники было реализовано экспериментально, причем использовались низкосимметричные кристаллы, где даже в отсутствие пространственной дисперсии отличны от нуля матричные элементы $V^{(3)}$, а синхронизм достигался за счет дисперсии скорости обыкновенной и необыкновенной волн (в некоторых особых направлениях). Величина преобразования была очень большой (в рекордных ситуациях достигала 100 %). Соответственно в таких условиях уже нельзя было считать исходную волну заданной и приходилось решать связанную систему уравнений для первой и второй гармоники, а в более общем случае – для системы трех связанных волн [19d]. Заметим, что при солнечных радиовсплесках, связанных с трансформацией плазменных волн (возбуждаемых потоками ускоренных электронов) в электромагнитные, весьма эффективен процесс образования 2-й гармоники $l+l \rightarrow t$ (рис. 7.1).

В высоко симметричной (в частности, изотропной) среде возбуждение 2-й гармоники

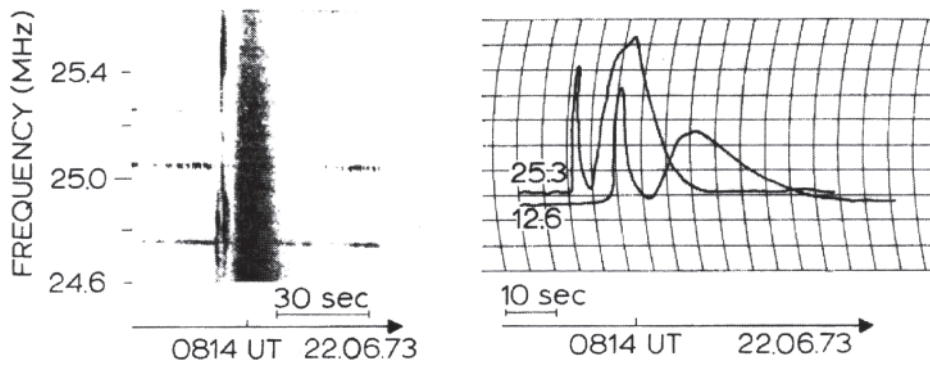


Рис. 7.1. Наблюдение 1-й и 2-й гармоники плазменной частоты короны в солнечных радио всплесках, порождаемых пронизывающими корону электронами, ускоренными при солнечной вспышке. (По данным Л. Базеляна и др. [19a] на УТР-II)

ки не столь эффективно, и в отсутствие дисперсии возбуждается 3-я (и более высокие) гармоники. За генерацию 3-й гармоники ответственно слагаемое 3-го порядка в уравнении и соответственно 4-го в гамильтониане: $V \rightarrow +aaaa * \delta^{(4)}$.

Более общее условие синхронизма, соответствующее слиянию волн, состоит в одновременном выполнении равенств (см. диаграммы):

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}, \quad \omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_k. \quad (7.6)$$

Только при точном (или почти точном) выполнении этого условия могут стать существенными процессы слияния волн и обратные им процессы распада. Условия (7.6) являются весьма жесткими. В случае волн на поверхности жидкости они могут выполняться для (неколлинеарных) капиллярных волн и невозможны для гравитационных. Условие “распадности” закона дисперсии – выпуклость функции $\omega(\mathbf{k})$ книзу. Число квазичастиц при распадных процессах не сохраняется. Возможность распадов становится очевидной при графическом решении системы законов сохранения (см. рис. 7.2). Действительно, закон дисперсии $\omega(\mathbf{k}) \approx k^{3/2}$ представляет собой поверхность вращения над плос-

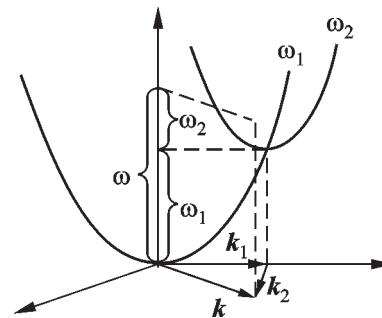


Рис. 7.2. Выполнение условия распада для капиллярных волн. Горизонтальные оси соответствуют проекциям волновых векторов в плоскости раздела

костью \mathbf{k} . Построим такую же поверхность $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ с центром в точке (ω_1, \mathbf{k}_1) . Из свойств полукубической параболы ясно, что эти поверхности пересекаются. Точкам пересечения отвечают решения системы законов сохранения. Обратный процесс по отношению к слияниям – процесс распада волны конечной амплитуды a_{k_0} (7.1) – приводит к возникновению и росту волн \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 и, таким образом, представляет собой вариант (нелинейной) неустойчивости. Как мы сейчас увидим, его инкремент пропорционален амплитуде волны \mathbf{k}_0 , которая считается заданной в виде (7.1).

Уравнения для рождающихся волн имеют вид (мы ввели линейное затухание γ):

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + i\omega a_1 + \gamma_1 a_1 &= \\ &= -i \int dk dk_2 V_{kk_1 k_2}^{-++} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_2}^*, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 + i\omega a_2 + \gamma_2 a_2 &= \\ &= -i \int dk dk_1 V_{kk_1 k_2}^{-++} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}_1}^*. \end{aligned}$$

При точном выполнении условий синхронизма (7.6) решение можно искать в виде

$$a_{1,2}(t) = b_{1,2} e^{-i\omega_{1,2} t + \nu t}, \quad (7.8)$$

откуда для связанных между собой амплитуд b_1 и b_2 находим, опуская индексы у $V \equiv V_{\mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{-++}$:

$$(\nu + \gamma_1) b_1 = -2i V a_0 b_2^*, \quad (7.9)$$

$$(\nu + \gamma_2) b_2^* = 2i V^* a_0^* b_1.$$

Положив для простоты $\gamma_1 = \gamma_2$, получаем для показателя

$$\nu_{\pm} = -\gamma \pm 2|V a_0|. \quad (7.10)$$

Видно, что один корень отрицателен и отвечает затуханию, но второй при достаточно большой амплитуде волны,

$$2|V a_0| > \gamma, \quad (7.11)$$

становится положительным, что и означает неустойчивость исходной волны. Распадная неустойчивость, открытая Сагдеевым и Оравским, – чисто нелинейное явление, ее инкремент ν_+ (в отсутствие поглощения) пропорционален амплитуде волны a_0 . Неустойчивость обладает порогом, определяемым затуханием волны (равенство в (7.11)):

$$2|V a_0|_{\text{порог}} = \gamma, \quad (7.12)$$

Основным процессом в случае нераспадного спектра становится рассеяние волн (рис. 7.3 – рис. 7.4). Общим важным эффектом, возникающим за счет $V^{(4)}$, является самовоздействие волны, приводящее к нелинейному сдвигу частоты. Впервые для волн конечной амплитуды на поверхности жидкости он был найден Стоксом. В нелинейных асимптотических методах учет нелинейного сдвига частоты, являющегося физической реакцией на появление резонансных (секулярных) членов в рядах теории возмущения, принципиален.

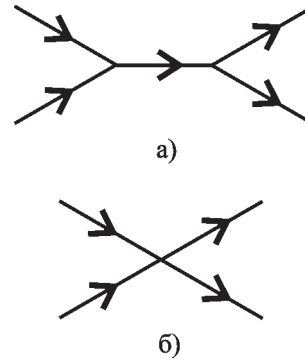


Рис. 7.3. Схема рассеяния волн: а) за счет тройных процессов во втором порядке теории возмущений; б) за счет четверных процессов

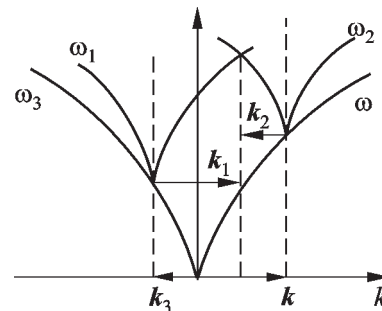


Рис. 7.4. Выполнение условий синхронизма при рассеянии коллинеарных гравитационных волн на глубокой воде.

Ответственным за нелинейный сдвиг является матричный элемент (5.11) $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}}^{++++}$. Соответствующее уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} &= \\ &= -i \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 V_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{k}}^{++++} a_{\mathbf{q}_1}^* a_{\mathbf{q}_2}^* a_{\mathbf{q}_3} \delta^{(4)} \end{aligned} \quad (7.13)$$

и для волны (7.1) переходит в

$$\dot{a}_{\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} = -i V_{\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}}^{++++} |a_{\mathbf{k}}|^2 a_{\mathbf{k}}, \quad (7.14)$$

откуда видно, что учет данного нелинейного слагаемого эквивалентен появлению сдвинутой частоты¹²

$$\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}\mathbf{k}}^{++++} |a_{\mathbf{k}}|^2. \quad (7.15)$$

Аналогично можно найти сдвиг частоты волны в поле “чужой” волны конечной амплитуды:

$$\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} + V_{\mathbf{k}_0\mathbf{k}_0\mathbf{k}\mathbf{k}}^{++++} |a_{\mathbf{k}_0}|^2. \quad (7.16)$$

Ангармонизмы третьего порядка в уравнениях (четвертого в гамильтониане) способны также привести к неустойчивости в среде, обладающей нераспадным спектром. Такая неустойчивость возникает вследствие распада волны “второй гармоники”. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\dot{a}_1 + i\tilde{\omega}_1 a_1 = -i \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}_2 T_{00/12} a_0^2 a_2^* \delta(2\mathbf{q} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2),$$

$$\dot{a}_2^* + i\tilde{\omega}_2 a_2^* = i \int d\mathbf{q} d\mathbf{q}_1 T_{00/12}^* a_0^2 a_1 \delta(2\mathbf{q} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \quad (7.17)$$

¹²Хотя структура этой формулы достаточно очевидна, сама формула не столь проста, как могло бы показаться. Коэффициент при квадрате амплитуды чувствителен к такой достаточно тонкой характеристике состояния, как ширина пакетов взаимодействующих волн, а в промежуточной области, где могут возникать солитоны огибающих, ширина пакета жестко связана с его амплитудой [5d, комментарий].

(от второго мы взяли комплексное сопряжение, переобозначение коэффициента означает включение в него слагаемых, происходящих от $\mathbb{H}^{(3)}$ во втором порядке (рис. 7.3), и комбинаторного численного коэффициента). Система уравнений здесь содержит разность частот, соответствующую неполному синхронизму:

$$\Delta\omega = 2\tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2, \quad (7.18)$$

причем частоты входят с нелинейным сдвигом, обусловленным волной конечной амплитуды a_0 . Переходя к медленным амплитудам b_i ,

$$a_i = b_i e^{-i\tilde{\omega}_i t},$$

получим систему (опуская индексы у T):

$$\dot{b}_1 = -2iTb_0^2 b_2^* e^{-i\Delta\omega t}, \quad (7.19)$$

$$\dot{b}_2^* = 2iT^* b_1 b_0^{*2} e^{i\Delta\omega t}.$$

Удобно ввести величину $g = b_2^* e^{-i\Delta\omega t}$, тогда (7.19) принимает вид системы с постоянными коэффициентами. Для решений b , $g \approx e^{\nu t}$ условие разрешимости дает ($\gamma = 0$):

$$\nu(\nu + i\Delta\omega) = 4|Tb_0^2|^2,$$

откуда

$$\nu = -\frac{i\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{4|Tb_0^2|^2 - \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2}. \quad (7.20)$$

При условии

$$|2Tb_0^2| > \frac{|\Delta\omega|}{2} \quad (7.21)$$

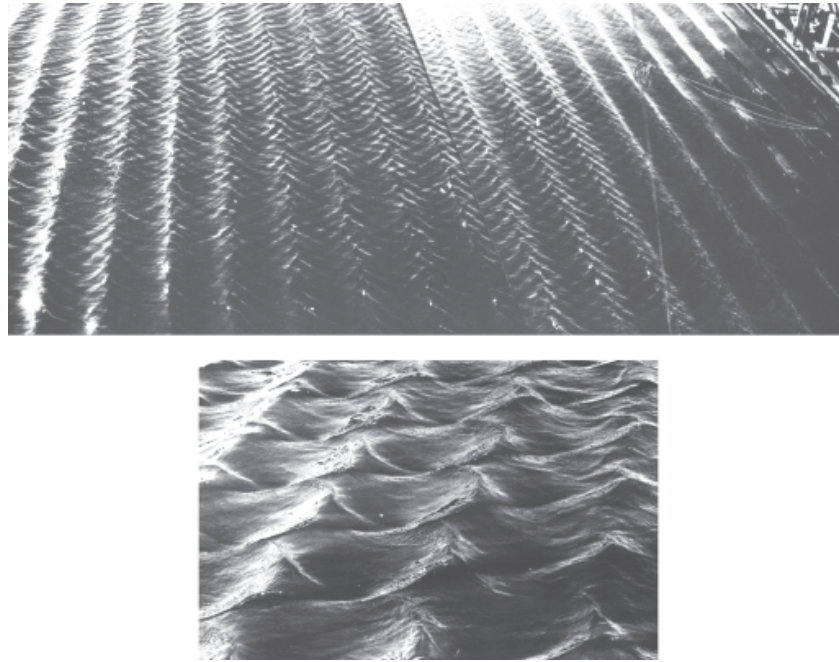


Рис. 7.5. Разрушение стоксовых волн в результате развития модуляционной неустойчивости [19b]. По мере продвижения волн, создаваемых источником (справа), неустойчивость превращает их в “трехмерные” волны, разрушаемые опрокидыванием (более крупным планом на нижнем снимке)

возникает неустойчивость (рис. 7.5). Так как в рассогласование частот $\Delta\omega$ из-за нелинейного сдвига входит квадрат амплитуды b_0^2 , добиться реализации неравенства за счет роста амплитуды, вообще говоря, нельзя. В одномерном случае соответствующий критерий приводит к модуляционной неустойчивости (т. к. в результате ее развития возникает самомодуляция волны), что соответствует $k_{1,2} = k_0 \pm \delta k$ при $\delta k \ll k_0$. При этом критерий имеет вид $\alpha v'_{\text{гр}} < 0$ (критерий Лайтхилла). Здесь α – коэффициент в нелинейном сдвиге частоты волны, $v'_{\text{гр}} \equiv \partial v_{\text{гр}} / \partial k$. Получить этот критерий удобно, исходя из уравнений для волнового числа $k(x, t)$ и (вещественного) квадрата амплитуды волны $a^2(x, t)$, определяющего нелинейный сдвиг частоты $\tilde{\omega} = \omega + \alpha a^2$ [7]:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}, \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_{\text{гр}} a^2) = 0.$$

Уравнение, аналогичное (5.13), но учитывающее в случае нераспадного спектра только процессы рассеяния волн четвертого порядка¹³,

¹³Уравнение такого типа (обычно оно записывается в терминах медленных амплитуд $b = a \exp i\omega t$) применительно к гравитационным волнам на глубокой воде принято называть уравнением Захарова, показавшим с его помощью, что гравитационные волны конечной амплитуды на глубокой воде модуляционно неустойчивы. В (7.23) условия синхронизма не должны выполняться точно, и поэтому оно описывает взаимодействие достаточно широких волновых пакетов. Существуют различные варианты, в которых реализуется модуляционная неустойчивость (наиболее известна неустойчивость Бенжамина-Фэйра), и различные приближения, достаточные для их описания. Ситуация, в действительности, очень сложна. Существенны начальные условия – как интервалы волновых чисел, их размерность, так и общий масштаб цуга волн. Отличаются кратковременное и долговременное поведение. Роль нелинейности нетривиальна – с ее ростом неустойчивость может исчезать, и, разумеется, появляются другие разновидности, например, взрывная эволюция Лонге-Хиггинса. Связанные с этим проблемы см. в [5, 15], в цитируемых в [15e] обзорах и в комментариях к обзору Юэна и Лейка [5d].

$$\dot{a}_k^\sigma - i\sigma\omega_k a_k^\sigma = i\sigma \int d\mathbf{l}d\mathbf{2}d\mathbf{3} V_{\mathbf{k}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3}^{-\sigma\sigma_1\sigma_2\sigma_3} a_{\mathbf{q}_1}^{\sigma_1} a_{\mathbf{q}_2}^{\sigma_2} a_{\mathbf{q}_3}^{\sigma_3} \times \\ \times \delta(-\sigma\mathbf{k} + \sigma_1\mathbf{q}_1 + \sigma_2\mathbf{q}_2 + \sigma_3\mathbf{q}_3) + \dots, \quad (7.23)$$

удобно получать, исключив член третьего порядка из гамильтониана с помощью соответствующего канонического преобразования (см. [2d] и Приложение 2). В частном (простейшем) случае “одноволновой” задачи, когда наиболее существен нелинейный сдвиг частоты, (7.23) сводится к чрезвычайно популярному “нелинейному уравнению Шредингера” (НУШ), которое мы приведем в безразмерных переменных (знак нелинейного члена при этом весьма существен):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi \pm 2|\psi|^2 \psi = 0. \quad (7.24)$$

Временная дисперсия может играть роль, аналогичную пространственной, что оказывается существенным, например, в современных оптических линиях передачи для когерентных волн. В силу одномерного характера распространения такой волны здесь удобно нумеровать осцилляторы их частотой ω , а волновое число k рассматривать как ее функцию $k(\omega)$, задаваемую законом дисперсии. Проиллюстрируем это в соответствии со статьями Захарова и Кузнецова [15], где использована пространственно-временная аналогия. В переменных ρ и ϕ , где

$$E = \frac{\sqrt{4\pi}}{c} \rho, \quad B = \sqrt{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \text{уравнения Максвелла для плоской линейно поляризованной волны}$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0,$$

$$D(x, t) = \hat{\epsilon}(t)E(x, t) + \chi E^3(x, t)$$

могут быть представлены в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\delta H}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\delta H}{\partial \rho}, \quad (7.25)$$

где

$$H = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2c^2} \rho \hat{\epsilon} \rho + \frac{\pi \chi}{c^4} \rho^4 \right] dt \equiv \\ \equiv \frac{1}{8\pi} \int \left[\mathbf{H}^2 + E \hat{\epsilon} E + \frac{1}{2} \chi E^4 \right] dt. \quad (7.26)$$

После перехода к нормальным координатам

$$(\text{закон дисперсии } \omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\epsilon(\omega)}):$$

$$\rho_\omega = \sqrt{\frac{\omega^2}{2k(\omega)}} (a_\omega^* + a_{-\omega}),$$

$$\phi_\omega = -i \sqrt{\frac{k(\omega)}{2\omega^2}} (a_\omega^* - a_{-\omega}), \quad \frac{\partial a_\omega}{\partial x} = i \frac{\delta H}{\delta a_\omega^*},$$

гамильтониан (7.26) принимает стандартный вид (5.11) с заменой k на ω с матричным элементом

$$T_{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4} = \frac{3\chi}{4\pi c^4} \left[\frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_4^2}{k(\omega_1)k(\omega_2)k(\omega_3)k(\omega_4)} \right]^{1/2}. \quad (7.27)$$

Уравнения для огибающих пакета волн

$$\psi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int a_\omega e^{-i(\omega-\omega_0)t - ik_0(v)x} d\omega \quad \text{с узким частотным спектром – гамильтоновы:}$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\delta H}{\delta \psi^*}, \quad (7.28)$$

причем низшим членам разложения отвечает НУШ, которое в безразмерных переменных для “фокусирующей нелинейности” приобретает вид

$$i \frac{\partial E}{\partial x} + E_{tt} + 2|E|^2 E = 0. \quad (7.29)$$

Обычному НУШ (7.24) соответствует замена $x \leftrightarrow t$.

Мы видим, что, по крайней мере, в достаточно симметричных системах возникают два наиболее типичных нелинейных слагаемых в самых низших порядках: либо нелинейность “гидродинамического” типа (как в уравнении Эйлера), либо нелинейность, ответственная за сдвиг частоты. Им соответствуют типичные простейшие нелинейные уравнения Кортевега – де Вриза (КдВ), Бюргерса и, соответственно, НУШ. В уравнении КдВ наивысший порядок (третий) имеет пространственная производная, связанная с учетом (слабой – в смысле разложения по градиентам) пространственной дисперсии. В уравнении Бюргерса, в отличие от КдВ, учтено затухание, а не дисперсия как конкурент нелинейности, и оно, также как и НУШ, имеет второй порядок. Замечательно, что все эти уравнения оказались точно интегрируемыми, о чем будет идти речь в следующем разделе обзора. Здесь мы лишь отметим, что с помощью преобразования Хопфа-Коула

$$u = -2v \frac{\theta_x}{\theta} \text{ нелинейное уравнение Бюргерса}$$

(см. ниже левую часть выражения (7.30), v – вязкость), описывающее, в частности, возникновение ударных волн, сводится к линейному уравнению теплопроводности [3]:

$$u_t + uu_x - v u_{xx} = -\frac{2v}{\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\theta_x}{\theta} \right) (\theta_t - v \theta_{xx}) = 0. \quad (7.30)$$

8. Уравнение КдВ и солитоны

Основной качественный вывод, который может быть сделан из предыдущего анализа для волны конечной амплитуды, сводится к тому, что нелинейность приводит к росту гармоник (причем фазы волн жестко связаны), а значит к укрупнению фронта волны, а дисперсия скоростей препятствует этому (малость гармоник в отсутствие синхронизма). Укрупнение фронта можно увидеть на полезном примере движения (пучка) невзаимодей-

ствующих частиц, промодулированного в виде волны в начальный момент времени. Смещение точек фронта волны описывается уравнением $dv/dt = 0$, которое в эйлеровой записи имеет вид $\partial v/\partial t + v \partial v/\partial x = 0$, т. е. содержит нелинейность гидродинамического типа. Так как каждая точка движется со своей фиксированной скоростью, в том числе при $v = 0$ покоится, то очевидна картина, в которой точки профиля с положительной скоростью обгоняют исходный профиль, а с отрицательной отстают от него, из-за чего фронт будет становиться круче. Затухание, вступающее в игру при возникновении больших градиентов (в “момент” обгона¹⁴), приводит к образованию ударных волн, где и нелинейность, и диссипация существенны. Этот процесс описывается уравнением Бюргерса, которое нелинейной подстановкой сводится к уравнению теплопроводности (см. выше) и таким образом допускает точное решение. В недиссипативной же, диспергирующей среде (плазма, мелкая вода) возникает возможность компенсации укрупнения фронта его расплыванием за счет дисперсии. Вследствие этого возникают особые решения – солитоны, которые мы рассмотрим очень кратко по мере необходимости (подробнее см. [3,4]).

Уравнение, где сосуществуют (слабая) дисперсия и нелинейность легко получить, добавляя к бездисперсионному закону $\omega = Vk$ следующий член разложения по k , который не приводит к затуханию, т. е. bk^3 . Соответствующее уравнение для скорости $u(x,t)$:

$$0 = (\omega - Vk + bk^3)u \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (8.1)$$

Восстановим здесь нелинейное слагаемое

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и опустим } V \frac{\partial u}{\partial x} \text{ (переходя в систему}$$

отсчета, где линейная волна покоится). Тогда имеем уравнение КдВ:

¹⁴Для невзаимодействующих частиц в пучках обгон совершенно реален.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (8.2)$$

На стационарных решениях $u = u(x - ct)$ оно один раз интегрируется, и при нулевой константе интегрирования принимает вид уравнения движения частицы с массой b в эффективном потенциале W :

$$bu_{xx} = -\frac{\partial}{\partial u} W(u), \quad u_x \equiv \frac{du}{dx}, \quad (8.3)$$

причем x играет роль времени, а u_x – скорость частицы.

“Потенциальная энергия” (рис. 8.1)

$$W(u) = -\frac{cu^2}{2} + \frac{u^3}{6} \quad (8.3')$$

минимальна в точке $u = 2c$, максимум при $u = 0$, где $W = 0$, а также проходит через ноль при $u = 3c$. Вблизи дна ямы имеют место малые гармонические колебания. С ростом энергии “частицы”

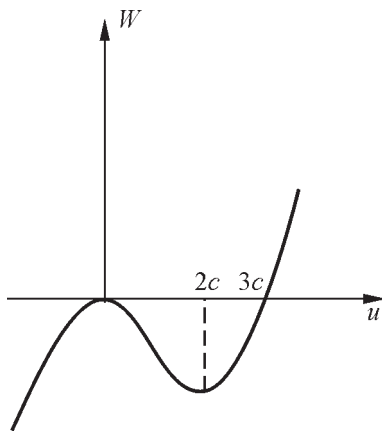


Рис. 8.1. Эффективная потенциальная энергия для частицы (8.3). Фinitному движению в яме ($I < 0$) соответствуют нелинейные периодические волны на мелкой воде. Сепаратриса ($I = 0$) соответствует солитону

$$I = b \frac{u_x^2}{2} + W(u) \quad (8.4)$$

колебания в силу непараболичности ямы становятся ангармоническими, причем решение “долго” задерживается на малых u (где малы и скорости u_x) и “быстро” проходит область больших u , где скорость u_x не мала. Это значит, что расстояния между последовательными подъемами u с уменьшением I возрастают, и, наконец, значению $I = 0$ отвечает параболическое движение и сепаратриса в “фазовой” плоскости (u_x, u) – уединенная волна. Это необычное решение было получено еще в XIX веке (Кортевегом и де Вризом), а уединенная волна наблюдалась и была описана в его начале (Скоттом Расселом), но особая роль солитонов была открыта совсем недавно.

Нетрудно убедиться, что солитону (уединенной волне) соответствует решение вида

$$u(x - ct) = \frac{u_0}{\text{ch}^2 \frac{x - ct}{\Delta}}, \quad (8.5)$$

причем параметры c , u_0 и Δ связаны условиями:

$$u_0 = 3c, \quad 12b = \Delta^2 u_0. \quad (8.6)$$

Проверим это, подставив (8.5) в выражение для энергии (8.4) и приравняв его нулю. Тогда, после дифференцирования, при выполнении условий (8.6) мы придем к тождеству.

Скорость солитона c зависит от его высоты u_0 (линейно), а ширина Δ обратно пропорциональна корню из высоты. Оказалось, что эволюция начальной волны конечной амплитуды состоит, главным образом, в последовательном отщеплении от нее солитонов в области укрупнения фронта [10e]. Обгоняя волну, отщепившиеся солитоны уходят, причем следующие имеют меньшую высоту и, соответственно, скорость. Благодаря экспоненциально ма-

лому перекрытию солитоны не взаимодействуют друг с другом.

Изучение подобных процессов подсказало замечательную процедуру точного решения нелинейного уравнения КдВ, открывшую новую страницу в изучении нелинейных уравнений, для целых классов которых удалось отыскать системы точных решений [3, 4].

К сожалению, для произвольного нелинейного уравнения в частных производных порядка выше первого в настоящее время невозможно сказать, относится ли оно к точно решаемым или нет. Но среди построенных точно решаемых уравнений есть довольно много чрезвычайно важных для физики. К ним, в частности, кроме уравнения КдВ, относится НУШ, уже упоминавшееся уравнение Бюргера, уравнение sin-Гордон при периодической нелинейности и некоторые другие.

Кратко опишем рецепт решения задачи Коши для КдВ методом обратной задачи рассеяния (МОЗР). Этот метод довольно сложен, но предполагает на каждом этапе решение только линейных уравнений [3, 4].

На первом этапе нелинейному уравнению КдВ, которое удобно записать в виде

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (8.7)$$

(при этом изменение знака означает, что повышению в исходном уравнении здесь соответствует углубление), сопоставляется пара линейных операторов (L, A) – пара Лэкса. Оператор L – это оператор Штурма-Лиувилля

$$L = -\frac{d}{dx^2} + u(x,t), \quad (8.8)$$

или, что то же, оператор Шредингера (т. е. гамильтониан частицы с потенциалом $u(x,t)$)

при таком выборе единиц, что $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$. Здесь t является параметром. Оператор A имеет специальный вид

$$A = -4i \frac{d^3}{dx^3} + 3i \left(u \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} u \right), \quad (8.9)$$

такой, что коммутатор

$$[L, A] \equiv LA - AL = -i(6uu_x - u_{xxx}),$$

благодаря чему уравнение эволюции

$$\frac{\partial L}{\partial t} = i[L, A], \quad \left(\frac{\partial L}{\partial t} = u_t \right) \quad (8.10)$$

эквивалентно выполнению уравнения КдВ для $u(x,t)$.

Операторы A и L действуют на функции ψ “частиц”, движущихся в потенциальном поле $u(x,t)$, где t является параметром (и никакого отношения ко временной переменной для ψ -частиц не имеет). Поле $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Спектр частиц ψ , т. е. собственные значения λ уравнения Шредингера

$$L\psi = \lambda\psi, \quad (8.11)$$

при этом состоит из дискретного, связанного с уровнями “частицы” в потенциальной яме $u(x)$ при $t = \text{const}$, и непрерывного, связанного с инфинитным движением частиц с положительной энергией. Набор “данных рассеяния”, к которым относятся дискретные собственные значения оператора L и асимптотик его собственных функций (коэффициентов отражения, если говорить о непрерывном спектре) достаточен для нашей цели. Итак, на первом этапе процедура состоит в определении данных рассеяния L для $u(x,0)$. С помощью оператора A находится их изменение во времени, причем собственные значения дискретного спектра вообще не меняются, а “коэффициенты отражения” имеют в случае КдВ очень простой временной вид. Найденные данные рассеяния определяют новый потенциал $u(x,t)$, который может быть определен по ним, если решается обратная задача рассеяния. В случае уравне-

ния КдВ (т. е. для оператора Шредингера L) обратная задача уже довольно давно была эффективно решена (Гельфандом и Левитаном и Марченком¹⁵), а именно сведена к решению линейного интегрального уравнения, ядро которого выражается через данные рассеяния. Таким образом, круг замыкается – конечное $u(x, t)$ находится по начальному $u(x, 0)$, но вместо того, чтобы решать нелинейное уравнение (КдВ), решаются в несколько этапов линейные уравнения (рис. 8.2).

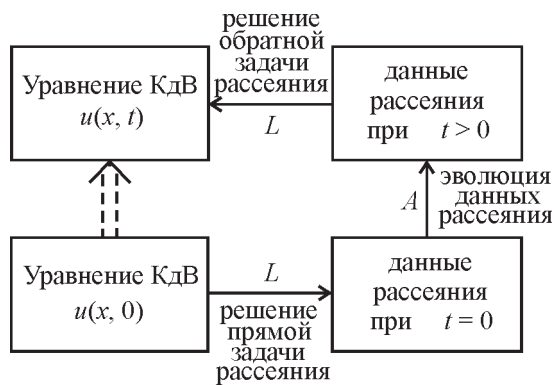


Рис. 8.2. Схема, поясняющая метод обратной задачи рассеяния

Ответ же выглядит следующим образом [10]. Если $K(x, y)$ – решение уравнения Марченко

$$K(x, y) = F(x + y) + \int_x^\infty ds K(x, s) F(s + y), \quad (8.12)$$

где $F(\xi)$ выражается через данные рассеяния¹⁶ – значения $\lambda_n \equiv -\kappa_n^2$ дискретного спек-

¹⁵Мы будем пользоваться уравнением Марченко (см., например, прекрасное изложение в [10h]), поскольку именно оно относится к рассматриваемому случаю быстро убывающих на бесконечности потенциалов.

¹⁶Более точно под данными рассеяния в непрерывном спектре понимают набор амплитуд $a(k)$ и $b(k)$, где $a^{-1}(k)$ – амплитуда рассеяния “вперед” (коэффициент прохождения волны через потенциал $u(x)$), а $b(k)/a(k)$ – амплитуда рассеяния “назад”. Уравнение эволюции Гарднера-Грина-Крускала-Миуры (ГГКМ) для $a(k)$ есть $\dot{a}(k, t) = 0$.

тра L и связанные с ними величины $M_n^2(t) = M^2(0) \exp(8\kappa_n^3 t)$, а также коэффициент отражения в непрерывном спектре $s(k, t) = s(k, 0) \exp(8ik^3 t)$, где $\lambda \equiv k^2$:

$$F(\xi) = -\sum_n M_n^2 e^{-\kappa_n \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk s(k) e^{ik\xi}, \quad (8.13)$$

то интересующее нас решение

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (8.14)$$

В частности, считая, что потенциал является безотражательным и содержит лишь один уровень, приходим с помощью указанного рецепта к солитонному решению (8.5).

Существенно, что солитонные решения реализуются вне спектра линейных волн. (Для волн на поверхности жидкости это соответствует тому, что солитон КдВ движется со скоростью, всегда превышающей скорость линейной волны, а капиллярно-гравитационные солитоны [15a-f] – со скоростью, меньшей, чем минимальная скорость V_m). Вблизи границы спектра в общем случае (солитон КдВ, локализуемый в области $k \rightarrow 0$, сюда не относится) они приобретают универсальную форму солитона НУШ¹⁷. Обратим внимание на то, что при $k_0 h < \sqrt{3}$, когда предел $k \rightarrow 0$ соответствует не максимальной, а минимальной скорости волн согласно (2.24), дисперсионное слагаемое в уравнении КдВ меняет знак, и солитоны КдВ движутся теперь со скоростью, меньшей скорости линейной волны. Заметим, что обычный солитон КдВ может находиться в резонансе с капиллярными волнами и, соответственно, испытывать дополнительное к линейному затухание. В особых случаях солитоны могут существовать нахо-

¹⁷ Следует отметить аналогию с отщеплением локализованных (примесных) уровней от края зоны сплошного спектра в кристаллах [16]. В [15c,d] отмечена также аналогия перехода через границу сплошного спектра линейных волн с фазовыми переходами второго рода либо первого рода, в том числе близкого ко второму.

дьясь в зоне спектра линейных волн (см. ссылки в [15g,h]).

Обратим внимание на важную аналогию между методом обратной задачи рассеяния и преобразованием Фурье. (Последнее применяется, конечно, к линейным задачам). Переход к фурье-образам аналогичен переходу к данным рассеяния, что позволяет отследить в обоих методах эволюцию величин в новом представлении. И, наконец, совершается обратное преобразование к исходным величинам в новый момент времени (ср. рис. 8.2). Эта аналогия является содержательной. Преобразование Фурье, как мы знаем (см. п. 5), является каноническим преобразованием. Оказывается, что описание системы с помощью данных рассеяния также является описанием в канонических переменных! При этом данные рассеяния представляют собой реализацию переменных “действие – угол”. Возможность перехода к этим переменным¹⁸ эквивалентна полной интегрируемости нелинейного уравнения и существованию бесконечного набора интегралов движения, каковыми являются в терминах данных рассеяния $a(k)$. Так, можно показать [3, 17], что величины

$$n(k) = \frac{2k}{\pi} \ln |a(k)|^2, \quad \Phi_k = \arg b(k), \quad (k > 0) \quad (8.15)$$

образуют канонически сопряженные пары. Для величин, определяемых данными рассеяния в дискретном спектре,

$$N_l = \kappa_l^2, \quad \Phi_k = 2 \ln \frac{1}{|b_l|}, \quad (8.15')$$

также выполняются условия канонического сопряжения. Уравнения эволюции ГГКМ для

¹⁸ Это было показано Захаровым и Фаддеевым для КдВ и Тахтаджяном и Фаддеевым, и Захаровым и Маннаковым для НУШ (см. обзор [17] и ссылки в нем).

данных рассеяния соответствуют уравнениям в переменных “действие – угол” с гамильтонианом КдВ

$$H = -\frac{32}{5} \sum N_l^{5/2} + 8 \int k^3 n(k) dk. \quad (8.16)$$

Таким образом, МОЗР действительно оказывается аналогом нелинейного преобразования Фурье и совершенно нетривиальным примером канонического преобразования, чем оправдывается хотя бы столь краткое включение в данный обзор этого замечательного по эффективности и красоте метода – жемчужины математической физики XX века.

Особый объект применения гамильтоновых методов представляют собой вихри, традиционно описываемые в рамках гидродинамики несжимаемой жидкости [20a,b]. В солитонную эпоху интерес к вихрям как родственным локализованным образованиям резко возрос¹⁹. Современный взгляд на проблему изложен в обзорах [20c,d,e,h,i] и статьях [20f,g], в которых можно найти дальнейшие ссылки. Мы приведем здесь в качестве классического примера известное решение для т. н. сферического вихря Хилла, придав ему, однако, гамильтонову форму. Осесимметричное течение, которое ему соответствует, представляет собой ламинарный поток, обтекающий сферу, внутри которой сосредоточен вихрь. Стоксова функция тока ψ , вводимая при осесимметричных течениях [20a,b], представляет собой единственную отличную от нуля азимутальную компоненту вектор-потенциала скорости. Решению можно придать гамильтонову форму, если в качестве обобщенной координаты выбрать (с точностью до численного коэффициента) куб расстояния от центра сферы, а в качестве обобщенного импульса –

¹⁹Первая волна интереса к вихрям была связана с вихревой моделью атома и угасла при появлении планетарной модели и квантовой механики. Впрочем интерес к вихрям никогда не ослабевал в связи с проблемой турбулентности и задачам обтекания тел.

косинус азимутального угла. Тогда вихрь сведется к частице (набору частиц) с законом дисперсии

$$H = \psi = -\frac{3U}{4a^2}(a^2 - r^2)r^2 \sin \vartheta,$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (8.17)$$

$$(H < 0, \quad r \equiv (3q)^{1/3}, \quad p \equiv -\cos \vartheta).$$

Решение двухпараметрическое, зависящее от радиуса сферы a и скорости течения U (скорости движения вихря относительно неподвижной жидкости). Локализованным внутри сферы линиям тока (частицам) соответствует отрицательная энергия. Границе вихря – сепаратриса, отвечающая нулевой энергии. Это, равно как и обязательное движение вихря, помещающее его вне зоны линейных вихревых возбуждений, роднит его с солитоном.

Вихрь Хилла представляет собой пример кольцевых вихрей, а его плоским аналогом является вихрь Ламба [6а]. Тем не менее, топология линий тока в меридиональной плоскости чрезвычайно близка к той, которая была обнаружена впоследствии для двумерных солитонных решений на поверхности вращающейся жидкости как решений уравнения Чарни-Хасегавы-Мима²⁰ (солитон Ларичева-Резника и его обобщения). Убывание поля скоростей вне области завихренности в среде без дисперсии (вихри Хилла, Ламба) – степенное, при наличии дисперсии (для волн Россби) – экспоненциальное, что еще более роднит подобные вихри с солитонами.

²⁰ В этом уравнении нелинейность существенно не одномерна и представляет собой “плоскую” компоненту векторного произведения скорости течения на ее ротор [20с,е].

Приложение 1. Гамильтоново описание непотенциального движения при наличии свободной поверхности в обычной и магнитной гидродинамике

Обсудим прием [6g], с помощью которого поверхностные переменные строятся из объемных, описывающих непотенциальное движение сжимаемой жидкости, при помощи предельного канонического преобразования. С помощью того же приема получим канонические переменные, описывающие движение поверхности разрыва в магнитной гидродинамике.

Как известно [6а, 2], для баротропной жидкости $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$ представление скорости в виде

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \frac{\lambda}{\rho} \nabla\mu \quad (П.1.1)$$

с помощью переменных Клебша λ и μ (для упрощения записи мы ограничились скалярным вариантом) позволяет написать гамильтоновы уравнения (4.9) при произвольной плавно неоднородности в объеме жидкости:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \mu} \equiv -\text{div } \mathbf{v} \lambda, \quad (П.1.2)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \lambda} \equiv -(\mathbf{v} \nabla) \mu.$$

Вариация гамильтониана (4.9) с учетом (П.1.2.) может быть записана как

$$\delta H = \int dV \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta \varphi - \frac{\partial \mu}{\partial t} \delta \lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \delta \mu \right). \quad (П.1.3)$$

Сделаем, следуя (4.10), замену и перейдем к новым координатам ζ и $\tilde{\lambda}$:

$$\rho = f(\zeta - z), \quad \lambda = \tilde{\lambda}f(\zeta - z), \quad (\text{П.1.4})$$

выбирая производящий функционал в виде

$$F(\varphi, \mu; \zeta, \tilde{\lambda}) = \int dV \{ \varphi f(\zeta - z) + \mu \tilde{\lambda} f(\zeta - z) \}. \quad (\text{П.1.5})$$

Тогда новыми канонически сопряженными парами после предельного перехода (4.11), вводящего поверхность разрыва, будут

$$(\zeta, \Psi \equiv [\rho(\varphi + \tilde{\lambda}\mu)]_{\zeta}), \quad (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}), \quad (\text{П.1.6})$$

где $[]_{\zeta}$ означает скачок на разрыве $z = \zeta$ при переходе из нижней среды в верхнюю, $\tilde{\mu} = \mu f(\zeta - z)$. Уравнения для ζ остаются прежними (4.12). На скачке $z = \zeta$ выполняется условие, соответствующее уравнению Гамильтона

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \zeta},$$

$$\left[\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tilde{\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + g\zeta \right) \right]_{\zeta} = 0,$$

а в объеме вместо (П.1.2.) имеем

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial t} + \text{div} \tilde{\lambda} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \tilde{\mu} = 0.$$

Для небаротропной жидкости $\varepsilon(\rho) \rightarrow \varepsilon(\rho, s)$ – внутренняя энергия зависит от энтропии. В этом случае плотности и переменных Клебша недостаточно. Как известно, необходимо расширить набор переменных, включив туда энтропию, что можно сделать, вводя еще одну пару канонических переменных (σ, s) и представление для скорости

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi + \frac{\lambda}{\rho} \nabla \mu + \frac{\sigma}{\rho} \nabla s. \quad (\text{П.1.7})$$

При этом для энтропии получаем, как и для переменных Клебша, закон сохранения, а σ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta s} \equiv -\text{div} \mathbf{v} \sigma + \frac{\partial \varepsilon}{\partial s},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \sigma} \equiv -\mathbf{v} \nabla s.$$

Из остальных уравнений видоизменяется только

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \rho} \equiv -\frac{v^2}{2} + \frac{\lambda}{\rho} (\mathbf{v} \nabla) \mu + \frac{\sigma}{\rho} (\mathbf{v} \nabla) s + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}.$$

Нетрудно проверить, что все законы сохранения, включая уравнение переноса тепла, выполняются. Источником поля σ является поле температур:

$$\frac{d \sigma}{dt} = T.$$

Иногда удобно каноническим преобразованием исключить часть, связанную с однородным температурным полем $\sigma_0 = \rho_0 T t$. В гамильтониане при этом $\varepsilon \rightarrow \varepsilon - T_0 \rho s$.

При наличии границы раздела аналогично предыдущему (см. (П.1.4)) с помощью производящего функционала

$$F(\zeta, \tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; \varphi, \mu, s) = \int dV f(\zeta - z) (\varphi + \tilde{\lambda} \mu + \tilde{\sigma} s)$$

переходим к новым парам переменных [6g]:

$$(\zeta, \Psi \equiv [\rho(\varphi + \tilde{\lambda} \mu + \tilde{\sigma} s)]_{\zeta}), \quad (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}), \quad (\tilde{\sigma}, \tilde{s}), \quad (\text{П.1.8})$$

где $\sigma = \tilde{\sigma}f(\zeta - z)$, $\tilde{s} = sf(\zeta - z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \tilde{s}} \equiv -\text{div } \tilde{\sigma} \mathbf{v} + \rho(T - T_0),$$

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \tilde{\sigma}} \equiv -\mathbf{v} \nabla \tilde{s}.$$

Представление вихревых полей в отличие от баротропного или изэнтропического случая, по-видимому, однозначно (ср. [13a]):

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left[\nabla \frac{\lambda}{\rho}, \nabla \mu \right] + \left[\nabla \frac{\sigma}{\rho}, \nabla s \right]. \quad (\text{П.1.9})$$

Введем теперь “поверхностные” канонические переменные в магнитной гидродинамике. В объемных уравнениях ограничимся гамильтоновыми переменными (ρ, φ) и (\mathbf{H}, \mathbf{s}) , задающими представление скорости вида [2b,f]

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} [\mathbf{H}, \text{rots}] + \nabla \varphi \quad (\text{П.1.10})$$

при гамильтониане

$$H = \int dV \left(\frac{\rho v^2}{2} + \varepsilon(\rho) + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right).$$

Совершая преобразования (4.10), (4.11), введем границу раздела и перейдем к новым каноническим переменным (ζ, ψ) и $(\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{s}})$, где

$$\rho = f(\zeta - z), \quad \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}f(\zeta - z). \quad (\text{П.1.11})$$

Выбирая производящий функционал вида

$$F(\varphi, \mathbf{s}; \zeta, \mathbf{H}) = \int dV f(\zeta - z)(\varphi + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{s}),$$

найдем после предельного перехода [6g]

$$\psi = \left[\rho(\varphi + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{s}) \right]_{\zeta}, \quad \tilde{\mathbf{s}} = sf(\zeta - z). \quad (\text{П.1.12})$$

Процедура предельного перехода позволяет получить граничные условия на разрыве и объемные уравнения для новых переменных. Так, из уравнения для магнитного поля следует

$$f \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t} - \text{rot} [\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{H}}] \right) + f' \left\{ \tilde{\mathbf{H}} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \zeta - v_z \right) + \mathbf{v} (\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{e}_z - \nabla \zeta)) \right\} = 0,$$

откуда получаем, в частности, граничные условия для магнитного поля, т. к. f' стремится к δ -функции на границе раздела.

Для потенциала $\tilde{\mathbf{s}}$ аналогичным образом получается объемное уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{s}}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \tilde{\mathbf{H}}} \equiv [\text{rot } \tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{v}] + f^2 \frac{\tilde{\mathbf{H}}}{4\pi}$$

и граничное условие

$$[\tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{v}]_{\zeta} = 0.$$

Приложение 2.

Матричные элементы гамильтониана взаимодействия для потенциального движения жидкости со свободной границей [2d]

В пренебрежении линейным затуханием уравнения движения тяжелой несжимаемой жидкости (4.6), (4.7) являются гамильтоновыми [2b] и в переменных a_k^{σ} могут быть получены из гамильтониана

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots \quad (\text{П.2.1})$$

стандартным способом: $\dot{a}_{\mathbf{k}}^{\sigma} = i\sigma\delta H/\delta a_{\mathbf{k}}^{-\sigma}$.
При этом

$$H_2 = \frac{1}{2!} \sum_1 \omega_{k_1} a_{\mathbf{k}_1}^{\sigma_1} a_{\mathbf{k}_1}^{-\sigma_1}, \quad (\text{П2.2})$$

$$H_3 = \frac{1}{3!} \sum_{1,2,3} V(1,2,3) a_1 a_2 a_3 \delta \left(\sum_{l=1}^3 \sigma_l \mathbf{k}_l \right), \quad (\text{П2.3})$$

$$H_4 = \frac{1}{4!} \sum_{1,2,3,4} V(1,2,3,4) a_1 a_2 a_3 a_4 \delta \left(\sum_{l=1}^4 \sigma_l \mathbf{k}_l \right). \quad (\text{П2.4})$$

Здесь $V(1,2,3) \equiv V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$ и т. п. Явные выражения для матричных элементов в случае конечной глубины жидкости h имеют вид:

$$V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \tilde{k}_3} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum \hat{P} \frac{\tilde{k}_1}{\omega_1} \{ \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \sigma_2 \sigma_3 \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 \}, \quad (\text{П2.5})$$

$$V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} = \frac{1}{(8\pi)^2} \left(\frac{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 \tilde{k}_4}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum \hat{P} \left\{ \frac{\sigma_1 \sigma_2 \omega_1 \omega_2}{\tilde{k}_1 \tilde{k}_2} Y(\sigma_1 \mathbf{k}_1, \sigma_2 \mathbf{k}_2 | \sigma_3 \mathbf{k}_3, \sigma_4 \mathbf{k}_4) - \right. \\ \left. - \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \frac{\alpha}{\rho} (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4) \right\}, \quad (\text{П2.6})$$

где $\sum \hat{P}$ – сумма по всем перестановкам аргументов $\left\{ \begin{matrix} \sigma_l \\ \mathbf{k}_l \end{matrix} \right\}$, $\tilde{k} = kthkh$,

$$Y(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4) = 2(k_1^2 \tilde{k}_2 + k_2^2 \tilde{k}_1) -$$

$$-k_1 k_2 [|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4| + |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|]. \quad (\text{П2.7})$$

Функция Y симметрична по перестановкам аргументов $\left(\begin{matrix} \sigma \\ \mathbf{k} \end{matrix} \right)$ в выделенных парах и обладает зеркальной симметрией. Матричные элементы $V^{(3)}$ и $V^{(4)}$ обладают симметрией относительно любых перестановок аргументов $\left(\begin{matrix} \sigma \\ \mathbf{k} \end{matrix} \right)$, а в силу вещественности полей $\zeta(\mathbf{r}, t)$

и $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ $V_k^{-\sigma} = (V_k^{\sigma})^*$, причем за счет выбора представления $V_k^{-\sigma} = V_k^{\sigma} = (V_k^{\sigma})^*$. Кроме того,

они инвариантны относительно одновременного вращения набора векторных аргументов.

Из (П2.6), (П2.7) в предельном случае глубокой воды ($kh \gg 1$, $\tilde{k} \rightarrow k$) получаем ($V_l \equiv \omega_l/k_l$):

$$V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3} = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} (V_1 V_2 V_3)^{1/2} \sum \hat{P} \frac{1}{V_1} \{ \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \sigma_2 \sigma_3 k_2 k_3 \}, \quad (\text{П2.8})$$

$$V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} = \frac{1}{2(8\pi)^2} (V_1 V_2 V_3 V_4)^{-1/2} \sum \hat{P} \sigma_1 \sigma_2 \left\{ \omega_1 \omega_2 \times \right. \\ \left. \times X(\sigma_1 \mathbf{k}_1, \sigma_2 \mathbf{k}_2 | \sigma_3 \mathbf{k}_3, \sigma_4 \mathbf{k}_4) - \sigma_3 \sigma_4 \frac{\alpha}{\rho} (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4) \right\}, \quad (\text{П2.9})$$

$$X(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4) = 2(k_1 + k_2) - \\ - [|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4| + |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4|]. \quad (\text{П2.10})$$

В капиллярной области $k \gg k_0$ тройной матричный элемент, определяющий вероятность распадов и слияний,

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{+-} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^{1/4} (kk_1k_2)^{1/4} \left[k^{-1/2} (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + k_1k_2) + k_1^{-1/2} (\mathbf{k}\mathbf{k}_2 + kk_2) + k_2^{-1/2} (\mathbf{k}\mathbf{k}_1 + kk_1) \right] \propto k^{9/4},$$

(П2.11)

$$k \gg k_0, h^{-1}$$

является однородной функцией степени 9/4. Асимптотика (П2.11) при одном малом аргументе дается выражением

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{+-} \propto k_1^{7/4} k^{1/2}, \quad k, k_2 \gg k_1 \gg k_0, h^{-1}. \quad (\text{П2.12})$$

Взаимодействие капиллярных и гравитационных волн определяется асимптотикой

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{q}}^{+--} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} g^{1/4} q^{-1/4} [\mathbf{k}\mathbf{q} + O(q)^2],$$

(П2.13)

$$k \gg k_0 \gg q \gg h^{-1}.$$

Рассеяние (прямое) гравитационных волн описывается матричным элементом третьей степени однородности

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{+++} \propto k^3, \quad k_0 \gg k, k_1, k_2, k_3 \gg h^{-1}. \quad (\text{П2.14})$$

Матричный элемент нерезонансного (тройного) взаимодействия гравитационных волн, дающий вклад в вероятность рассеяния во втором порядке теории возмущений, равен

$$V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = \frac{g^{1/4} (k_1k_2k_3)^{-1/4}}{4\pi\sqrt{2}} \left[k_1^{1/2} (\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 + \sigma_2\sigma_3k_2k_3) + k_2^{1/2} (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3 + \sigma_1\sigma_3k_1k_3) + k_3^{1/2} (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + \sigma_1\sigma_2k_2k_3) \right] \approx k^{7/4},$$

(П2.15)

$$k_0 \gg k_{1,2,3} \gg h^{-1}$$

и является однородной функцией степени 7/4.

Редуцированный матричный элемент $\tilde{V}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}^{++++}$, содержащий слагаемое со вкладом от тройных процессов во втором порядке теории возмущений (см. [2d, 5d, 15e] и ниже), в соответствии с (П2.15), (П2.14) также является однородной функцией третьей степени. Его асимптотика при двух малых аргументах –

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}^{++++} \propto k_1k_3(kk_2)^{1/2},$$

(П2.16)

$$k_0 \gg k, k_2 \gg k_1, k_3 \gg h^{-1}.$$

Асимптотическое выражение для “полудиагонального” матричного элемента –

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1}^{+--+} = \frac{1}{8\pi^2} (kk_1)^{3/2} [1 + O(k_1/k)], \quad k_1 \ll k. \quad (\text{П2.17})$$

Необходимые для определения сходимости соответствующие тройные матричные элементы равны:

$$V_{-\mathbf{k},\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{+++} = \frac{\sqrt{V_1}}{2\pi\sqrt{2}} kk_1 [1 + O(k_1/k)], \quad (\text{П2.18})$$

$$V_{-\mathbf{k},\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{+--} = -\frac{\sqrt{V_1}}{2\pi\sqrt{2}} kk_1 [1 + O(k_1/k)], \quad (\text{П2.19})$$

$$V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{--+} = \frac{\sqrt{V_1}}{2\pi\sqrt{2}} (\mathbf{k}\mathbf{k}_1) [1 + O(k_1/k)], \quad (\text{П2.20})$$

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}\mathbf{k}_1}^{+-} = \frac{\sqrt{V_1}}{2\pi\sqrt{2}} (\mathbf{k}\mathbf{k}_1) [1 + O(k_1/k)]. \quad (\text{П2.21})$$

Здесь $k_0 \gg k \gg k_1 \gg h^{-1}$, $\mathbf{k}_\pm \equiv \mathbf{k} \pm \mathbf{q}\mathbf{k}_1$,

$V_1 \equiv \omega_{k_1}/k_1$. Из (П2.17)-(П2.21) получаем

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1}^{+++} = \frac{k_1(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{2\pi^2}, \quad k_1 \ll k, \quad (\text{П2.22})$$

что является уточнением (П2.16).

Приведем также предельные выражения для мелкой воды $kh \ll 1$. В капиллярной области спектра тройной матричный элемент, отвечающий распадам, равен

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{+-} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\alpha}{\rho h} \right)^{1/4} (k^2 + \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2), \quad (\text{П2.23})$$

$$h^{-1} \gg k \gg k_0.$$

Поскольку в этой области закон дисперсии капиллярных волн квадратичен: $\omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} hk^2$, то в вероятности перехода, учитывающей закон сохранения энергии $\omega = \omega_1 + \omega_2$, последнее слагаемое в (П2.23) обращается в нуль в силу взаимной ортогональности векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 .

Для гравитационных волн на мелкой воде $k \ll k_0$, h^{-1} :

$$V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{c}{h}} (k_1k_2k_3)^{-1/2} [k_1(\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3) + k_2(\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1) + k_3(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)] (1 + O(kh)^2), \quad c = \sqrt{gh}, \quad (\text{П2.24})$$

$$V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4}^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} = \frac{h}{(8\pi)^2} (k_1k_2k_3k_4)^{1/2} \sum \hat{P} \sigma_1\sigma_2 \{ 2 k_1k_2 - [(\sigma_1\mathbf{k}_1 + \sigma_3\mathbf{k}_3)^2 + (\sigma_1\mathbf{k}_1 + \sigma_4\mathbf{k}_4)^2] \} [1 + O(kh)^2]. \quad (\text{П2.25})$$

Из (П2.24), (П2.25) следует обращение в нуль редуцированного матричного элемента $V^{(4)}$ в главном приближении по $kh \ll 1$ и углу рассеяния в соответствии с общим результатом [2g].

При рассмотрении нераспадных процессов удобно производить каноническое преобразо-

вание, устраняющее из гамильтониана H кубические члены, которые не дают вклада в вероятность перехода в первом порядке теории возмущений. В данном случае такое преобразование не может быть проведено во всем \mathbf{k} -пространстве из-за появления расходимостей, связанных с распадным характером спектра в капиллярной области при $k > \bar{k}$. Но можно произвести преобразование к новым переменным, символически записываемое в виде²¹

$$A_{\mathbf{k}}^\sigma = e^{-S} a_{\mathbf{k}}^\sigma e^S, \quad (\text{П2.26})$$

так, чтобы исключить из гамильтониана лишь запрещенные тройные процессы [2d]. При этом $A_{\mathbf{k}}^\sigma$ будут отличаться от $a_{\mathbf{k}}^\sigma$ только при $k < \bar{k}$. Для этого выделим в H_3 (5.11) слагаемое \bar{H}_3 , отвечающее запрещенным процессам. В новых переменных гамильтониан $\tilde{H}(A) \equiv H(a) = e^{S(A)} H(A) e^{-S(A)}$ не должен содержать \bar{H}_3 . Раскладывая e^S в ряд по малому S , получим

$$\tilde{H} = H_2 + (H_3 + [S, H_2]) + \left(\frac{1}{2} [S[S, H_2]] + [S, H_3] + H_4 \right) + O(A^5), \quad (\text{П2.27})$$

где квадратные скобки означают скобку Пуассона деленную на i , и вычисляются с использованием инвариантных относительно канонических преобразований соотношений:

²¹Заметим, что при выводе канонического преобразования удобно использовать квантовую аналогию, сопоставляя рассматриваемой классической системе Бозе-газ с гамильтонианом (5.11), где $a_{\mathbf{k}}^\sigma$ представляют собой операторы рождения $a_{\mathbf{k}}^+$ и уничтожения $a_{\mathbf{k}}^-$ с правилами коммутации (П2.28). Классическому каноническому преобразованию соответствует унитарное преобразование (П2.26), где S – антиэрмитова матрица. Раскладывая e^S в ряд по операторам S , можно прийти к выражению (П2.29), которое соответствует классической форме записи, если коммутант заменить скобкой Пуассона (П2.28).

$$\frac{1}{i} \{a_{\mathbf{k}}^{\sigma}, a_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}\} \equiv [a_{\mathbf{k}}^{\sigma}, a_{\mathbf{k}'}^{\sigma'}] = \sigma' \delta_{\sigma, -\sigma'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{П2.28})$$

Как видно из (П2.27), член \bar{H}_3 исчезает, если определить S равенством

$$\bar{H}_3 + [S, H_2] = 0, \quad (\text{П2.29})$$

что приводит к

$$S = \frac{1}{3} \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} S_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} a_{\mathbf{k}_1}^{\sigma_1} a_{\mathbf{k}_2}^{\sigma_2} a_{\mathbf{k}_3}^{\sigma_3} \delta \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{k}_i \right), \quad (\text{П2.30})$$

$$S_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} = \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i \omega_i \right)^{-1} \bar{V}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}.$$

Преобразование (П2.26) является каноническим, так как в силу (П2.30) и (5.9) $S_{\mathbf{k}}^{\sigma} = -S_{\mathbf{k}}^{-\sigma}$ (т. е. S – антиэрмитова, а e^S – унитарная матрица).

Таким образом приходим к эффективному гамильтониану с редуцированными матричными элементами \tilde{V}

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^* A_{\mathbf{k}} + \\ & + \frac{1}{3} \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} \tilde{V}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} A_{\mathbf{k}_1}^{\sigma_1} A_{\mathbf{k}_2}^{\sigma_2} A_{\mathbf{k}_3}^{\sigma_3} \delta \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{k}_i \right) + \\ & + \frac{1}{4} \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} d\mathbf{4} \tilde{V}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4} A_{\mathbf{k}_1}^{\sigma_1} A_{\mathbf{k}_2}^{\sigma_2} A_{\mathbf{k}_3}^{\sigma_3} A_{\mathbf{k}_4}^{\sigma_4} \delta \left(\sum_{i=1}^4 \sigma_i \mathbf{k}_i \right), \end{aligned} \quad (\text{П2.31})$$

где новые нормальные координаты связаны со старыми соотношениями:

$$A_{\mathbf{k}}^{\sigma} = a_{\mathbf{k}}^{\sigma} - [S, a_{\mathbf{k}}^{\sigma}], \quad (\text{П2.32})$$

$$A_{\mathbf{k}}^{-\sigma} = a_{\mathbf{k}}^{-\sigma} + \sigma \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} \delta \left(\sum_{i=0}^2 \sigma_i \mathbf{k}_i \right) \bar{V}_{\mathbf{k} \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma \sigma_2 \sigma_3} \left(\sum_{i=0}^2 \sigma_i \omega_i \right)^{-1} a_{\mathbf{k}_1}^{\sigma_1} a_{\mathbf{k}_2}^{\sigma_2}.$$

Эффективный матричный элемент равен

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4} = & V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4} + \\ & + \frac{2}{4!} \sum \hat{P} \int d\mathbf{5} \sigma_5 \bar{V}_{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}^{\sigma_5 \sigma_3 \sigma_4} \bar{V}_{\mathbf{k}_5 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{-\sigma_5 \sigma_1 \sigma_2} \frac{\delta(\sigma_1 \mathbf{k}_1 + \sigma_2 \mathbf{k}_2 - \sigma_3 \mathbf{k}_3)}{\sigma_1 \omega_1 + \sigma_2 \omega_2 - \sigma_3 \omega_3}. \end{aligned} \quad (\text{П2.33})$$

При этом матричный элемент \bar{V} отвечает запрещенным процессам:

$$\bar{V}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} = \begin{cases} V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}, & \text{если } k_{1,2,3} < \bar{k}, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (\text{П2.34})$$

а $\tilde{V} \equiv V - \bar{V}$ – разрешенным тройным процессам.

Содержание обзора в общих чертах соответствует курсу лекций, читавшихся автором в Харьковском национальном университете.

В обзоре использованы совместные работы с А. В. Кацем, которому автор благодарен за сотрудничество. Автор благодарен также А. М. Булгакову и А. С. Ковалеву, прочитавшим рукопись и сделавшим полезные замечания.

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS (грант 00-00292).

Литература

- [1]
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. Москва, ГИФМЛ, 1958, 206 с.
 - В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. Москва, Наука, 1974, 431 с.
 - А. С. Бакай, Ю. П. Степановский. Адиабатические инварианты. Киев, Наукова думка, 1981, 238 с.
 - А. Лихтенберг, М. Либман. Регулярная и стохастическая динамика. Москва, Мир, 1984, 528 с.
 - М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. Введение в теорию колебаний и волн. Москва, Наука, 1984, 432 с.
 - Г. М. Заславский. Стохастичность динамических систем. Москва, Наука, 1984, 271 с.

- g) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Гидродинамика. Москва, Наука, 1986, 736 с.
- h) В. С. Львов. Нелинейные спиновые волны. Москва, Наука, 1987, 271 с.
- i) А. М. Косевич, А. С. Ковалев. Введение в нелинейную физическую механику. Киев, Наукова Думка, 1989, 295 с.
- [2]
- a) В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1971, **60**, с. 1714-1726.
- b) В. Е. Захаров. Изв. вузов. Радиофизика. 1974, **17**, №4, с. 431-453.
- c) Б. Б. Кадомцев, В. М. Конторович. Изв. вузов. Радиофизика. 1974, **17**, №4, с. 511-540.
- d) А. В. Кац и В. М. Конторович. ПМТФ. 1974, №6, с. 97-106.
- e) В. П. Гончаров, В. И. Павлов. Проблемы гидродинамики в гамильтоновом описании. Москва, Изд. МГУ, 1993, 197 с.
- f) В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн. УФН. 1997, **167**, №11, с. 1137-1167.
- [3]
- a) Э. Скотт. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. Москва, Сов. радио, 1977, 368 с.
- b) В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи. Москва, Наука, 1980, 319 с.
- c) Солитоны. Под ред. Р. Буллофа, Ф. Кодри. Москва, Мир, 1983, 408 с.
- d) М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. Москва, Мир, 1987, 480 с.
- f) А. Ньюэлл. Солитоны в математике и физике. Москва, Мир, 1989, 324 с.
- [4]
- a) Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. Москва, Наука, 1979, 759 с.
- b) М. Тода. Теория нелинейных решеток. Москва, Мир, 1984, 262 с.
- c) Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. Спектральные преобразования и солитоны. Москва, Мир, 1985, 469 с.
- d) Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. Москва, Наука, 1986, 527 с.
- e) Advances in Nonlinear Mathematics and Science. Physica D. 2001, **152-153**, pp. 1-822.
- [5]
- a) J. W. Miles. J. Fluid Mech. 1957, **3**, pp. 185-204.
- b) В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1966, **51**, с. 1107-1114; ПМТФ. 1968, №2, с. 86-94.
- c) О. М. Филлипс. Динамика верхнего слоя океана. Москва, Мир, 1969, 268 с.
- d) Г. Юэн, Б. Лейк. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. Москва, Мир, 1987, 180 с.
- e) В. П. Красицкий. ЖЭТФ. 1990, **71**, №5, с. 1644-1655.
- f) Ю. А. Степанянц, А. Л. Фабрикант. Распространение волн в сдвиговых потоках. Москва, Наука, 1996, 240 с.
- g) С. Г. Гестрин, В. М. Конторович. Радиофизика и радиоастрономия. 1997, **2**, №4, с. 419-438.
- h) В. Е. Захаров, В. Г. Харитонов. ПМТФ, 1970, №5, с. 45-49.
- [6]
- a) Г. Ламб. Гидродинамика. Москва, ГТТИ, 1947, (раздел "Преобразование Клебша"), с. 312-314.
- b) Б. И. Давыдов. ДАН СССР. 1949, **69**, с. 165-168.
- c) C. C. Lin. Liquid helium. Proc. Int. School of physics, Course XXI, Acad. Press, N. Y. (1963).
- d) R. I. Seliger, G. B. Whitham. Proc. R. Soc. **A305**, No. 1 (1968). Перевод в сб. Механика. 1969. №5, с. 99-123.
- e) Ю. А. Синицын, В. М. Конторович. Взаимодействие длинных волн и мелкомасштабной турбулентности. В сб. Исследования турбулентной структуры океана. Севастополь, Изд. МГИ АН УССР, 1975, с. 96.
- f) В. М. Конторович. Изв. вузов. Радиофизика. 1976, **19**, с. 872-879.
- g) В. М. Конторович, Х. Кравчик, В. Тиме. Препринт ИРЭ АН УССР. Харьков, 1980, №158, 12 с.; Сб. "Взаимодействие и самовоздействие волн в нелинейных средах". Часть II. Душанбе, Изд-во Дошиш, 1988, с. 73-77.
- h) А. В. Кац и В. М. Конторович. ФНТ. 1998, **23**, №1, с. 120-128.
- i) A. V. Kats. Physica D. 2001, **152-153**, pp. 459-474.
- [7]
- a) Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман. УФН. 1971, **103**, с. 193-232.
- b) В. И. Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Москва, Наука, 1973, 175 с.
- c) Б. Б. Кадомцев. Коллективные явления в плазме. Москва, Наука, 1976, 238 с.
- d) Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. Москва, Мир, 1977, 622 с.
- e) П. Бхатнагар. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. Москва, Мир, 1983, 136 с.
- [8]
- a) В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко. ДАН СССР. 1966, **170**, с. 1292-1295.
- b) В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1966, **51**, с. 688-696; 1972, **62**, с. 1745-1759.
- c) В. Е. Захаров, Р. З. Сагдеев. ДАН СССР. 1970, **192**, с. 297-300.
- d) А. В. Кац и В. М. Конторович. Письма в ЖЭТФ. 1971, **14**, с. 392-395.
- f) В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1976, **71**, с. 2104-2112.
- g) А. В. Кац и В. М. Конторович. ЖЭТФ. 1977, **73**, с. 2157-2168.

- h) А. В. Кац и В. М. Конторович. Изв. вузов. Радиофизика. 1977, **20**, с. 1112-1114.
- i) А. М. Балк, В. Е. Захаров, С. В. Назаренко. ЖЭТФ. 1990, **98**, с. 446-467.
- k) V. E. Zakharov, V. S. L'vov, G. Falkovich. Kolmogorov Spectra of Turbulence. Wave Turbulence. N. Y., Springer-Verlag, 1992, 330 pp.
- l) У. Фриш, Турбулентность. Наследие Колмогорова. Москва, Фазис, 1998, 345 с.
- [9]
- a) L. I. Vinokurov, A. V. Kats and V. M. Kontorovich. J. Stat. Phys. 1985, **38**, pp. 217-229.
- b) A. Cavaliere, S. Colofrancesco and N. Menci. Astrophys. J. 1992, **392**, pp. 41-44.
- c) V. M. Kontorovich. Astron. Astrophys. Trans. 1994, **5**, pp. 259-278.
- d) V. M. Kontorovich, D. S. Krivitsky and A. V. Kats. Physica D. 1995, **87**, pp. 290-294.
- e) D. S. Krivitsky and V. M. Kontorovich. Astron. Astrophys. 1997, **327**, pp. 921-929.
- f) V. M. Kontorovich. Physica D. 2001, **152-153**, pp. 676-681.
- [10]
- a) И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан. Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951, **15**, №4, с. 309-360.
- b) Б. Я. Левин. ДАН СССР. 1956, **106**, с. 187-190.
- c) В. А. Марченко. ДАН СССР. 1955, **104**, с. 695-698.
- d) В. А. Марченко. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова думка, 1977, 332 с.
- e) N. E. Zabusky, M. D. Kruskal. Phys. Rev. Lett. 1965, **15**, p. 240.
- f) C. S. Gardner, I. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura. Phys. Rev. Lett. 1967, **19**, pp. 1095-1098.
- g) В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. ЖЭТФ. 1971, **61**, с. 118-134.
- h) В. Е. Захаров. В книге: И. А. Кунин. Теория упругих сред с микроструктурой. Москва, Наука, 1975, гл. 5, с. 226.
- [11]
- П. Дирак. Лекции по квантовой механике. Москва, Мир, 1968, 84 с.
- [12]
- a) В. Л. Покровский, И. М. Халатников. ЖЭТФ. 1976, **71**, с. 1974-1986.
- b) H. Elze, T. Codama, et al. ArXiv hep-ph / 9809570.
- [13]
- a) E. A. Kuznetsov, A. V. Mikhailov. Phys. Lett. 1980, **77A**, p. 37.
- b) H. K. Moffat. J. Fluid Mech. 1981, **106**. Перевод в сб.: "Современная гидродинамика (успехи и проблемы)", Москва, Мир, 1984, с. 49.
- [14]
- a) Л. И. Седов. Успехи мат. наук. 1965, **20**, с. 121.
- b) В. Л. Бердичевский. Вариационные принципы механики сплошной среды. Москва, Наука, 1983, 448 с.
- [15]
- a) M. S. Longuet-Higgins. J. Fluid Mech. 1989, **200**, pp. 451-470; 1993, **252**, pp. 703-711.
- b) F. Dias, G. Iooss. Physica D. 1993, **65**, pp. 399-423.
- c) В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов. ЖЭТФ. 1998, **113**, с. 1892.
- d) Е. А. Кузнецов. ЖЭТФ. 1999, **116**, №7, с. 299-317.
- e) F. Dias, C. Kharif. Ann. Rev. Fluid Mech. 1999, **31**, pp. 301-346.
- f) M. Perlin, W. Schultz. Ann. Rev. Fluid Mech. 2000, **32**, pp. 241-274.
- g) А. М. Косевич. ФНТ. 2000, **26**, №6, с. 620-625.
- h) A. R. Champneys, B. A. Malomed, J. Yang, D. J. Kaup. Physica D. 2001, **152-153**, pp. 340-354.
- [16]
- И. М. Лифшиц. Физика реальных кристаллов и неупорядоченных систем. Москва, Наука, 1987, 552 с.
- [17]
- Л. Д. Фаддеев. Гамильтонова интерпретация метода обратного преобразования рассеяния. В сб.: Солитоны. Под ред. Р. Буллафа и Ф. Кодри. Москва, Мир, 1983, с. 363-379.
- [18]
- a) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Москва, Наука, 1988, 512 с.
- b) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. Москва, Наука, 1980, 704 с.
- c) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. I. Москва, Наука, 1974, 584 с.
- [19]
- a) L. L. Bazelyan, N. Yu. Goncharov, V. V. Zaitsev, et al. Solar Physics. 1974, **39**, pp. 223-231.
- b) М. Ван-Дайк. Альбом течений жидкости и газа. Москва, Мир, 1986, 184 с.
- c) К. А. Постнов. УФН. 1999, **169**, №5, с. 545-558.
- d) Н. Бломберген. Нелинейная оптика. Москва, Мир, 1966, 424 с.
- [20]
- a) Дж. Бэтчелор. Введение в динамику жидкостей. Москва, Мир, 1973, 758 с.
- b) Л. М. Милн-Томсон. Теоретическая гидромеханика. Москва, Мир, 1964, 556 с.
- c) В. И. Петвиашвили, О. А. Похотелов. Уединенные волны в плазме и атмосфере. Москва, Энергоиздат, 1989, 200 с.
- d) Ю. А. Степанянц, А. П. Фабрикант. Распространение волн в сдвиговых потоках. Москва, Наука, 1996, 240 с.
- e) В. М. Черноусенко, В. М. Куклин, И. П. Панченко. Структуры в неравновесных средах. В сб.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Киев, Наукова Думка, 1990, с. 333-416.

- f) Г. Дим, Н. Забуски. Стационарные V-состояния, их взаимодействие, возврат и разрушение. В сб.: Солитоны в действии. Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. Москва, Мир, 1981, с. 289-304.
- g) Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан. Письма в ЖЭТФ, 1998, **67**, с. 1050-1020; ЖЭТФ, 2000, **118**, с. 893-905.
- h) В. В. Козлов. Общая теория вихрей. Изд. дом "Удмуртский университет", 1998, 239 с.
- i) В. Ф. Копьев, С. А. Чернышев. УФН. 2000, **170**, №7, с. 713-742.

**Linear and Nonlinear Waves
(an Elementary Introduction to Theory
of Hamilton's Variables with Applications
to Plasma Physics and Astrophysics)**

V. M. Kontorovich

By way of examples of volume waves as well as on the surface of a liquid the Hamiltonian variables for continuous media, widely used in plasma physics, hydrodynamics, and field theory are introduced. The regular way of introducing such variables on different kinds of surfaces including media with breaks are considered with the help of a variation principle and canonical transformations. The method of the inverse scattering problem is given as the nontrivial example of canonical transformation to variable "action-angle". The examples of linear and nonlinear instabilities are considered.

The second part of the review will be devoted to the kinetic equations used for the weak turbulence description, including exact methods of obtaining the nonequilibrium flux distributions. The applications of the kinetic Smoluchowsky equation to the galaxy merging processes and their mass spectrum formation are considered. The nonlocal distributions and partially coherent systems are also considered.

5. Комплексные нормальные координаты
6. Вариационный принцип со связями как регулярный способ введения гамильтоновых переменных
7. Нелинейные процессы взаимодействия и самовоздействия волн
8. Уравнение КдВ и солитоны (МОЗР как каноническое преобразование)

Приложение 1. Гамильтоново описание непотенциального движения при наличии свободной поверхности в обычной и магнитной гидродинамике

Приложение 2. Матричные элементы гамильтониана взаимодействия для потенциального движения жидкости со свободной границей

Введение

В последние десятилетия получило развитие использование гамильтонова формализма [1-9] в применении к распределенным системам с бесконечным числом степеней свободы [2]. Замечательные приложения он получил при решении нелинейных, в первую очередь, волновых задач, в том числе при описании и интерпретации новых точных методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее известным из них стал знаменитый метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) [3,10].

Настоящая статья, с одной стороны, представляет собой элементарное введение в предмет, с другой – касается тем, которые недостаточно отражены в обзорной литературе (см., например, [4]). Речь идет, в частности, об описании ветровой неустойчивости [5], способах введения гамильтоновых переменных как в объеме, так и на свободных границах (разрывах) [6] и т. п.

Первая часть статьи посвящена волнам. Примеры взяты из гидродинамики волн на поверхности жидкости ввиду их важности и наглядности, а также из физики плазмы, электродинамики, астрофизики [2-7].

Вторая часть, которая будет опубликована в одном из ближайших номеров журнала, посвящена кинетическим уравнениям и турбулентным спектрам [8]. Широко используются прозрачные квантовые аналогии. В рамках гамильтонова формализма рассматривается

Часть II. Стохастический подход

9. Кинетические уравнения
10. Слабая турбулентность и распределения с потоками по спектру
11. Уравнение Смолуховского и слияния галактик
12. Нелокальные распределения и спектр масс
13. Взаимодействие когерентного и стохастического полей

Приложение 3. Преобразования симметрии кинетических уравнений

Литература

описания взаимодействия стохастической и когерентной подсистем. Особая роль отводится астрофизическим приложениям и примерам [9].

1. Звуковые волны (случай отсутствия дисперсии)

Рассмотрим волны сжатия-разрежения, распространяющиеся в однородной среде – звук. Исходные уравнения записываются для поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, давления $p(\mathbf{r}, t)$ и плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ в идеальной (недиссипативной) жидкости или газе. Уравнение Эйлера

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p, \quad (1.1)$$

представляющее собой уравнение движения (закон Ньютона) жидкой “частицы”, записано с учетом сил давления (закон Паскаля). Слева стоит (субстанциональная) производная, относящаяся к веществу (так что $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, а $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$). Тожество соответствует дифференцированию сложной функции $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)$, т. е. переходу к рассмотрению поля скорости (и других величин) в данной точке \mathbf{r} в момент t .

Для плотности имеем уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.2)$$

а давление, согласно уравнению состояния вещества, есть функция двух термодинамических переменных, в качестве которых удобно выбрать ρ и энтропию s . Ограничимся простейшим изэнтропическим ($s = \text{const}$) движением. Тогда

$$p = p(\rho). \quad (1.3)$$

Линеаризуя систему (1.1) – (1.3) вблизи состояния покоя (равновесия) $\mathbf{v}_0 = 0$, ρ_0 , $p_0 = p(\rho_0)$, т. е. полагая $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$,

$$p = p_0 + p', \quad p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho', \quad p' \ll p_0, \quad \rho' \ll \rho_0,$$

получаем

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \nabla \rho', \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \text{div } \mathbf{v}', \quad (1.4)$$

откуда для штрихованных величин (возмущений) следуют волновые уравнения, например,

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = 0, \quad c^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0. \quad (1.5)$$

При этом видно, что движение потенциально:

$$\mathbf{v}' = \nabla \varphi \quad (\text{rot } \mathbf{v}' = 0). \quad (1.6)$$

Не останавливаясь на хорошо известных свойствах волнового уравнения, рассмотрим частное решение в виде плоской монохроматической волны

$$\rho' \propto p' \propto \mathbf{v}' \propto e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.7)$$

Учитывая, что для решений такого вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rightarrow i\mathbf{k},$$

получаем $(\omega^2 - c^2 k^2) \rho' = 0$,

и условием разрешимости этого уравнения ($\rho' \neq 0$) является такая связь между ω и \mathbf{k}

(закон дисперсии¹), при которой множитель при ρ' обращается в нуль:

$$\omega^2 - c^2 k^2 = 0, \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) имеет две ветви решения: волна бегущая “налево” или “направо”. Введем скорость распространения фазы в (1.7), выбрав в качестве направления распространения ось x :

$$\rho' \approx \exp \left[ik \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) \right], \quad v_{\text{фаз}} \equiv \frac{\omega}{k} = \pm c, \quad (1.9)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{v}_{\text{фаз}} \equiv \frac{\omega}{k} \mathbf{k} = \pm c \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}/k. \quad (1.9')$$

Мы видим (рис. 1.1), что фазовая скорость звука не зависит от волнового числа k (от длины волны $\lambda = 2\pi/k$), т. е. возмущения любых длин волн, на которые можно разложить звуковой сигнал, будут распространяться совместно. В этом случае говорят о “линейном законе дисперсии” или об “отсутствии дисперсии”.

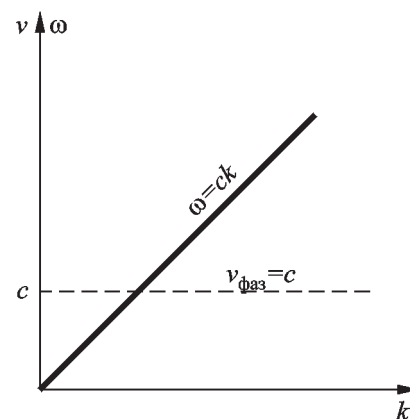


Рис. 1.1. Закон дисперсии и скорость звуковых волн

¹Закон дисперсии иногда удобно получать, используя (1.7) непосредственно в исходных линеаризованных уравнениях.

(Мы опустили решение $\omega = 0$, отвечающее вихревым возмущениям $\text{rot } \mathbf{v}' \neq 0$ (“вихревая волна”). Это видно, в частности, из того, что следствием (1.4) является $\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v}' = 0$ (при $\rho_0 = \text{const}$). При неизэнтропическом движении возникает еще одно решение $\omega = 0$, соответствующий возмущению энтропии $s' \neq 0$ (“энтропийная волна”). Оба эти возмущения покоятся относительно неподвижной жидкости.

Рассмотрим теперь в качестве состояния равновесия, вблизи которого происходят колебания, распространяющиеся в виде волн, однородное течение с $\mathbf{v}_0 = \text{const} \neq 0$. При линеаризации считаем, что $|\mathbf{v}'| \ll |\mathbf{v}_0|$. Удобно сразу перейти к плоским монохроматическим волнам (1.7). Легко видеть, что в уравнениях единственное отличие от предыдущего случая состоит в замене

$$\omega \rightarrow \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0. \quad (1.10)$$

Это не что иное, как проявление эффекта Допплера. Таким образом, достаточно, не повторяя вычислений, в (1.8) произвести замену (1.10), т. е. перейти в движущуюся со скоростью потока систему координат, где жидкость как целое покоится и где применимо предыдущее решение (принцип Галилея).

Итак, условие разрешимости принимает вид

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0)^2 = k^2 c^2, \quad (1.11)$$

откуда следуют два решения:

$$\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\mathbf{v}_0 \pm kc. \quad (1.12)$$

Для фазовой скорости имеем

$$\mathbf{v}_{\text{фаз}} = (\mathbf{v}_0 \mathbf{k}) \mathbf{k} \pm c \mathbf{k}. \quad (1.13)$$

Рассмотрим теперь скорость группы волн с близкими значениями \mathbf{k} . Максимум огибающей такого волнового пакета, как известно,

движется со скоростью² $\mathbf{v}_{\text{гр}} \equiv \partial\omega/\partial\mathbf{k}$. Это легко пояснить на простом примере сложения двух волн одинаковой амплитуды, для которого

$$\rho' \approx 2 \cos(kx - \omega t) \cos \left[\frac{\Delta k}{2} \left(x - \frac{\partial\omega}{\partial k} t \right) \right],$$

$$\Delta k = k_2 - k_1 \ll k \equiv \frac{k_1 + k_2}{2},$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega \equiv \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Из (1.12) следует

$$\mathbf{v}_{\text{гр}} = \mathbf{v}_0 \pm c \mathbf{k}, \quad (1.13')$$

откуда видно, что волна сносится движущейся средой. Здесь уже $\mathbf{v}_{\text{фаз}} \neq \mathbf{v}_{\text{гр}}$. Нетрудно убедиться в том, что вихревые (и энтропийные) возмущения переносятся потоком и им соответствует закон дисперсии $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0 = 0$.

Заметим, что выражение для групповой скорости волн соответствует уравнению Гамильтона для частицы $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ (ε – энергия, \mathbf{p} – импульс). Второму уравнению Гамильтона $\dot{\mathbf{p}} = -\partial\varepsilon/\partial\mathbf{r}$ соответствует уравнение для лучей в слабо неоднородной (нестационарной) среде $\dot{\mathbf{k}} = -\partial\omega/\partial\mathbf{r}$. В этом случае (ср. с (1.7)) возмущение пропорционально $e^{i\Psi(r,t)}$, причем

$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad \mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}},$$

а закону дисперсии (1.8) соответствует уравнение эйконала³ для фазы Ψ :

²Для волнового пакета, описываемого интегралом Фурье, это утверждение возникает в результате интегрирования вблизи точки стационарной фазы.

³Аналогичным уравнением для частицы с законом дисперсии $\varepsilon = p^2/2m$ является уравнение Гамильтона-Якоби (см. [1]), где роль фазы играет действие.

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 - c^2(r,t)(\nabla \Psi)^2 = 0.$$

“Тяжелый звук” и гравитационная неустойчивость

Рассмотрим теперь возмущения плотности в самогравитирующей среде. В правой части уравнения Эйлера (1.1) мы должны учесть силу тяжести

$$\mathbf{f}_g = -\rho \nabla \Phi,$$

где Φ – гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho. \quad (1.14)$$

Здесь G – постоянная тяготения из закона Ньютона. И сила тяжести, и уравнение для Φ вполне аналогичны соответствующим выражениям в электрическом поле⁴ и отличаются знаками в правых частях. Это отличие в знаке приводит к далеко идущим последствиям, которые проявляются, в частности, в возникновении гравитационной неустойчивости (Джинса). Она, в конечном счете, несет ответственность за слияния галактик, которые мы рассмотрим во второй части обзора.

Совершаем, как и выше, переход к возмущенным величинам⁵

$$\Delta \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (1.14')$$

⁴ $\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = -\nabla \Phi_e$, $\text{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho_e$ (\mathbf{E} – напряженность электрического поля, Φ_e – электрический потенциал, ρ_e – плотность заряда).

⁵ Процедура отбрасывания (бесконечного!) невозмущенного фона Φ_0 , которую приходится совершать при переходе от (1.14) к (1.14'), по существу означает некорректность вывода. Результат, однако, согласуется с рассмотрением устойчивости ограниченной тяготеющей массы (сферы). В космологических приложениях непротиворечивое рассмотрение проводится в рамках общей (релятивистской) теории относительности для расширяющейся Вселенной, где неустойчивость оказывается, впрочем, не экспоненциальной, а степенной [18a]. Замена же “бесконечностей” нулями (перенормировка) до сих пор является атрибутом ряда квантовых полевых теорий (например, квантовой электродинамики).

и в фурье-компонентах находим

$$\Phi' = -4\pi G \rho' / k^2. \quad (1.15)$$

Подставляя Φ' в \mathbf{f}_g , получаем

$$\mathbf{f}_g = 4\pi G i \mathbf{k} \rho' / k^2, \quad (1.16)$$

а линейризованное уравнение Эйлера принимает вид:

$$\omega \rho_0 \mathbf{v}' = \mathbf{k} (c^2 - 4\pi G \rho_0 / k^2) \rho'. \quad (1.17)$$

Учет самогравитации сводится, таким образом, к замене

$$c^2 \rightarrow c^2 - 4\pi G \rho_0 / k^2. \quad (1.17')$$

Осуществляя ее в (1.8), получаем закон дисперсии для “тяжелого” звука:

$$\omega^2 = k^2 c^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (1.18)$$

Последнее слагаемое в (1.18) удобно записать в виде квадрата частоты Джинса:

$$\omega_J^2 \equiv 4\pi G \rho_0. \quad (1.19)$$

Она является аналогом плазменной частоты $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2 / m$ и получается из нее заменой $e^2 \rightarrow Gm^2$, позволяющей перейти от закона Кулона к закону Ньютона. Знак, о котором мы говорили выше, фигурирует в (1.18) и не включен в определение ω_J . Из (1.18) видно, что, если $k^2 c^2 < \omega_J^2$, квадрат частоты становится отрицательным и возникает неустойчивость. Она реализуется на масштабах, больших длины волны Джинса

$$\lambda > \lambda_J = 2\pi / k_J \equiv 2\pi c / \omega_J \quad (1.20)$$

и, соответственно, для масс, превышающих массу Джинса,

$$M > M_J \equiv \frac{4\pi}{3} \lambda_J^3 \rho_0. \quad (1.20')$$

При сжатии, сопровождающем неустойчивость Джинса, возможен коллапс, если M_J убывает с ростом плотности. Для уравнения состояния идеального газа $p \propto \rho T$ при адиабатическом процессе $p \propto \rho^\gamma$ такому поведению M_J соответствует $\gamma < 4/3$:

$$M_J \propto (T^3/\rho)^{1/2} \propto \rho^{3(\gamma-4/3)/2}, \quad (1.21)$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – отношение теплоемкостей или, в более общем случае, показатель политропы. Как видно из (1.21), при $\gamma > 4/3$ величина M_J возрастает в процессе сжатия и неустойчивость стабилизируется. При этом однородная среда распадается на объекты масштаба длины Джинса. Если же $\gamma < 4/3$ – сжатие развивается катастрофически (коллапс⁶). Мы видим, что учет гравитации привносит в задачу о звуке определенные пространственные и временные масштабы, что приводит к возникновению дисперсии волн. (Аналогично в задаче об электромагнитных волнах к дисперсии приводят плазменные масштабы. Особенно велики эти эффекты для продольных волн, которые в длинноволновом пределе вырождаются в колебания электронов относительно ионов с формально бесконечной фазовой скоростью).

⁶Для звезды это может означать взрыв с возникновением сверхновой и компактного ядра, в котором сжатие либо останавливается квантовыми нетепловыми процессами (белые карлики, нейтронные звезды), либо происходит образование “черной дыры”, если масса остатка превосходит предельную массу Ландау-Чандрасекара [18с]. В последнее время коллапс в черную дыру связывают с возможным возникновением “гиперновой”, сопровождаемым мощнейшими космологическими вспышками [19с].

2. Волны на поверхности тяжелой жидкости – пример дисперсии

Обратимся теперь к примеру, который будет играть важную роль во многих разделах – к волнам на поверхности жидкости. Неоспоримое преимущество этого примера не только в богатстве качественно различных предельных случаев и важности приложений, но и в наглядности. Несмотря на очевидную возможность наблюдать как различные совокупности волн, так и развитое волнение – аналог турбулентности, природа многих явлений прояснилась сравнительно недавно, а во многом, что касается нелинейных волн, остается загадочной до сих пор.

Рассмотрим вначале волны на глубокой воде (на поверхности моря, например). В уравнение (1.1) введем потенциальную силу тяжести $-\rho \nabla g z$. Ось z направим вертикально вверх, а плоскость $z=0$ пусть совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, занимающей полупространство $z < 0$ (рис. 2.1).

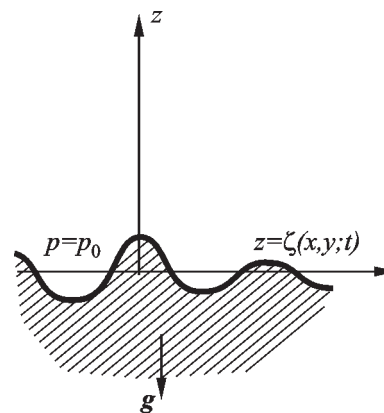


Рис. 2.1. Колеблующаяся поверхность несжимаемой жидкости в поле тяжести, занимающая полупространство $z < \zeta(x, y, t)$; g – ускорение свободного падения

Среду будем считать несжимаемой ($\rho = \text{const}$), что формально означает $c^2 \rightarrow \infty$, при этом уравнение непрерывности вырождается в $\text{div } \mathbf{v} = 0$ или для интересующего нас потенциального движения (1.6) – в уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (2.1)$$

Из линеаризованного уравнения движения жидкости

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho g z + p \right) = 0 \quad (2.2)$$

получаем интеграл (Коши-Лагранжа), откуда, включив константу интегрирования в потенциал φ , для давления на возмущенной границе раздела

$$z = \zeta(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} = (x, y) \quad (2.3)$$

имеем $p = p_0 + p'$, где

$$p' \Big|_{z=\zeta \rightarrow 0} = -\rho \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta \rightarrow 0} + g\zeta \right). \quad (2.4)$$

В полупространстве $z > \zeta$ (в “атмосфере” или “воздухе”) достаточно считать давление неизменным (равным “атмосферному” давлению p_0). Условие равенства давлений при $z = \zeta \rightarrow 0$ приводит к соотношению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} + g\zeta = 0. \quad (2.5)$$

(Поскольку $\partial\varphi/\partial t$ само по себе мало в меру малости возмущений границы, производную $\partial\varphi/\partial t$ берем при $z = 0$). Второе соотношение, связывающее потенциал скорости и возвышение границы, получим, используя определение вертикальной компоненты скорости

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\zeta \equiv v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta}, \quad (2.6)$$

или в линейном приближении:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (2.6')$$

Уравнения (2.5) и (2.6') еще не составляют полную систему, так как в кинематическое условие (2.6') входит производная $\partial\varphi/\partial z$, определяемая поведением потенциала в объеме жидкости. Поэтому обращаемся к уравнению (2.1) при $z < 0$, решение которого найдем, предполагая, что по поверхности бежит плоская волна $\zeta \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$.

Потенциал ищем в виде $\varphi(\mathbf{r}, z, t) = \varphi(z, t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, и из (2.1) для $\varphi(z, t)$ находим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - k^2\varphi = 0, \quad z < 0. \quad (2.7)$$

Решение имеет вид

$$\varphi = Ae^{kz} + Be^{-kz}, \quad (2.7')$$

причем в силу граничного условия $\varphi \rightarrow 0$, $z \rightarrow -\infty$ коэффициент $B = 0$.

Итак, волна носит поверхностный характер, затухая в глубину жидкости на масштабах длины волны, $\varphi = \varphi(0, t)e^{kz}$, а производная соответственно равна

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = k\varphi. \quad (2.8)$$

Окончательно система уравнений для φ и ζ принимает вид:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = k\varphi(0, t), \quad \frac{\partial\varphi(0, t)}{\partial t} = -g\zeta. \quad (2.9)$$

Отсюда немедленно следует закон дисперсии (рис. 2.2)

$$\omega^2 = gk, \quad (2.10)$$

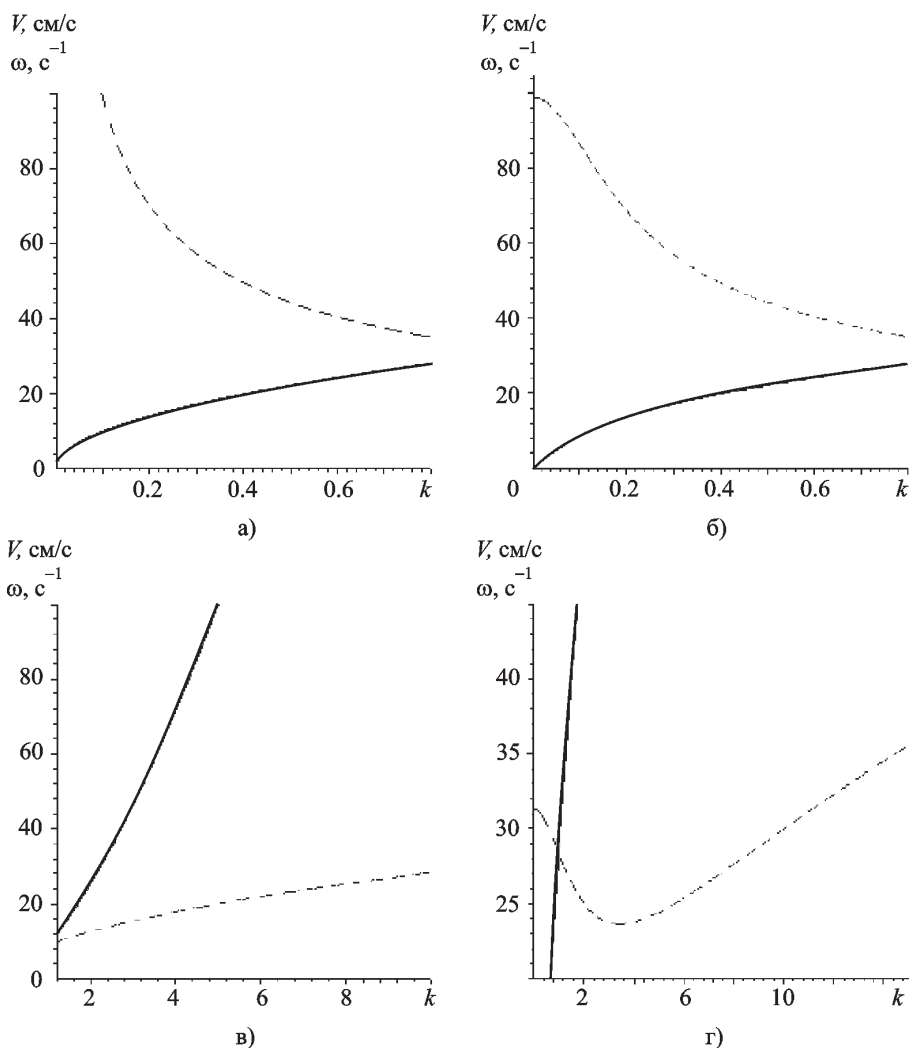


Рис. 2.2. Частота (сплошные линии) и скорость волн (пунктир) на поверхности жидкости для границы вода – воздух:
 а) для гравитационных волн на глубокой воде,
 б) гравитационных волн при глубине бассейна $h = 9.8$ см,
 в) капиллярных волн,
 г) капиллярно-гравитационных волн

причем каждая из функций ζ или $\varphi(0,t)$ удовлетворяет уравнению осциллятора $\ddot{\zeta} + \omega^2 \zeta = 0$. (Опущенный индекс \mathbf{k} нумерует осцилляторы). В отличие от звука, скорость распространения зависит от длины волны $v_\phi = \sqrt{g/k}$, увеличиваясь с ее ростом (положительная дисперсия). Групповая скорость $v_{гр} = \sqrt{g/4k}$, т. е. вдвое меньше фазовой. То, что более длинные волны распространяются быстрее

коротких, по-видимому, замечали многие. Так, часто из области разыгравшегося далекого шторма внезапно набегает на берег самые быстрые (самые длинные) волны, после чего уже поднимается волнение.

Рис. 2.2, а сразу же заставляет подумать о судьбе самых длинных и коротких волн, для которых соответственно $v_{гр} \rightarrow \infty$ или $v_{гр} \rightarrow 0$. Ясно, что в этих областях использованная теория нуждается в изменении.

Если длина волны настолько велика, что уже сравнима с глубиной бассейна, то решение уравнения Лапласа для $\varphi(z, t)$ должно учитывать это обстоятельство. А именно, удовлетворять условию непротекания жидкости через дно $v_z(-h) = 0$:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0. \quad (2.11)$$

Отсюда, используя полное уравнение (2.7), для интересующей нас производной с учетом (2.6') находим, что

$$\left. \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \varphi(0, t) k \operatorname{th} kh. \quad (2.12)$$

Таким образом, результат сводится к замене в выражении для производной (2.8)

$$k \rightarrow k \operatorname{th} kh. \quad (2.13)$$

Соответственно закон дисперсии в бассейне конечной глубины можно получить из (2.10) заменой (2.13):

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh. \quad (2.14)$$

Рассмотрим в этой формуле предельный случай столь длинных волн, что $kh \ll 1$. Тогда $\operatorname{th} kh \approx kh$, и мы получаем “звуковой”, линейный закон дисперсии:

$$\omega = \pm \sqrt{gh} k, \quad kh \ll 1. \quad (2.14')$$

Видно, что скорость волны при $\lambda \rightarrow \infty$ выходит на “насыщение” – постоянное значение \sqrt{gh} , а дисперсия исчезает (рис. 2.2, б). В море эта скорость может быть довольно большой, а в океане ($h \approx 4$ км) достигает 200 м/с. Тем не менее эта большая скорость существенно меньше скорости звука в океане, что

оправдывает используемое приближение несжимаемой жидкости. Такие длинные волны, возбуждаемые в океане землетрясениями, при набегании на берег (цунами) могут быть причиной значительных разрушений.

Рассмотрим теперь короткие волны. Здесь становится существенным эффект Лапласа: возникает разность давлений по обе стороны от искривленной поверхности за счет вклада поверхностного натяжения. Ее нетрудно вычислить, используя выражение для площади поверхности $\int \sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2} dx dy$. В случае малых градиентов $|\nabla \zeta| \ll 1$ эта разность давлений есть

$$p - \bar{p} = \alpha \Delta \zeta, \quad z = \zeta \rightarrow 0, \quad (2.15)$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения границы “вода – воздух”, а \bar{p} – давление в воздухе. Таким образом, используя (2.15), из (2.4) получаем вместо (2.5) соотношение на границе для плоской волны:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0} + \left(g + \frac{\alpha}{\rho} k^2 \right) \zeta = 0. \quad (2.16)$$

Видно, что в результате ускорение g заменилось на $g_{\text{эфф}}$:

$$g \rightarrow g_{\text{эфф}} = g + \frac{\alpha k^2}{\rho}. \quad (2.17)$$

Сделав эту замену в законах дисперсии (2.10) и (2.14), получаем для капиллярно-гравитационных волн на глубокой воде формулу Томсона:

$$\omega^2 = \left(g + \frac{\alpha k^2}{\rho} \right) k, \quad kh \gg 1, \quad (2.18)$$

а в общем случае произвольной глубины

$$\omega^2 = \left(g + \frac{\alpha k^2}{\rho} \right) k \operatorname{th} kh. \quad (2.19)$$

3. Волны на поверхности раздела и линейные неустойчивости

3а. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

Получим дисперсионное уравнение с учетом того, что плотности сред по обе стороны от границы раздела могут быть сравнимы и каждое полупространство может двигаться как целое (со своей скоростью \mathbf{U}) (условно можно говорить о “ветре” и “течении”). Как мы уже убеждались, в объемных уравнениях движение среды проявляется в замене частоты на доплеровски сдвинутую согласно (1.10), то же происходит и в кинематическом граничном условии (2.6). Пронумеруем среды так, чтобы нижняя среда имела индекс 2, верхняя – 1 (рис. 3а.1). Условие для скачка давлений (2.15) приобретает вид

$$-i\rho_1(\omega - \mathbf{k}\mathbf{U}_1)\varphi_1 + i\rho_2(\omega - \mathbf{k}\mathbf{U}_2)\varphi_2 + (\rho_1 - \rho_2)g\zeta - \alpha k^2\zeta = 0. \quad (3а.1)$$

Поскольку в верхней среде решение убывающее при $z \rightarrow \infty$ есть e^{-kz} , то

$$\left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \right|_{\zeta+0} \rightarrow -k\varphi_1|_0, \quad z > \zeta. \quad (3а.2)$$

Сравнивая с (2.8), видим очевидное отличие в знаке. Поэтому выражая φ_1 и φ_2 через ζ

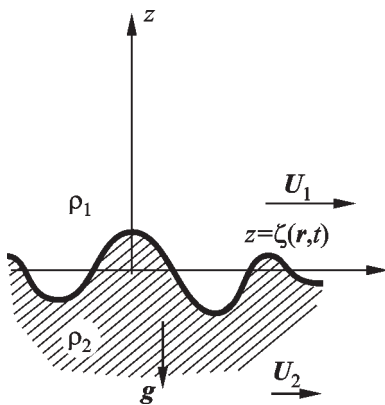


Рис. 3а.1. Колеблющаяся поверхность раздела двух сред в поле тяжести при наличии течения (скорость U_2) и ветра (скорость U_1)

с помощью (2.6), (2.8) и (3а.2) и подставляя в (3а.1) получаем, приравнявая нулю коэффициент при ζ , дисперсионное уравнение

$$\rho_1(\omega - \mathbf{k}\mathbf{U}_1)_1^2 + \rho_2(\omega - \mathbf{k}\mathbf{U}_2)_2^2 + (\rho_1 - \rho_2)gk - \alpha k^3 = 0. \quad (3а.3)$$

Решение выпишем, полагая $U_2 = 0$, $U_1 = U$:

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \mathbf{k}\mathbf{U} \pm \sqrt{D},$$

$$D = \frac{(\rho_2 - \rho_1)gk + \alpha k^3}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (\mathbf{k}\mathbf{U})^2. \quad (3а.4)$$

Рассмотрим частные случаи.

1) Самый простой – две неподвижные среды: $U = 0$, поверхностное натяжение пренебрежимо мало ($\alpha = 0$), $\rho_2 > \rho_1$,

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}} gk. \quad (3а.5)$$

При $\rho_2 \gg \rho_1$ получаем знакомый закон дисперсии (2.10), из которого выпала плотность. Если величина $\rho_2 - \rho_1$ положительна, но мала по сравнению с $\rho_2 + \rho_1$, получаем низкочастотную ветвь т. н. “внутренних” волн, возникающих на слабом скачке плотности из-за скачка температуры (“термоклин”), солёности (например, при впадении рек в море и т. п.). При малой разности плотностей, естественно, мал и коэффициент поверхностного натяжения α . (Рассмотренная нами мода лишь простейший представитель целого спектра внутренних волн, определяемых ходом градиента плотности $\partial\rho/\partial z$).

Замечание. Термоклин возникает из-за прогрева и перемешивания штормами верхнего слоя океана, моря и т. п., залегает соответственно на разных глубинах (в океане около 100 м, в Каспийском море около 40 м), и играет важную роль в биологии моря. Из-за малой

“упругости” могут раскачиваться волны значительно большей амплитуды, чем на поверхности. Эти “штормы”, по-видимому, могут быть безразличны для подводных судов.

2) $U = 0, \alpha = 0, \rho_2 < \rho_1$ – тяжелая жидкость лежит на легкой. Частоты при этом чисто мнимы и один из корней с $\gamma = \text{Im } \omega > 0$ отвечает неустойчивости Рэлея-Тейлора (РТ). Она часто встречается в природе и ответственна за некоторые важные процессы в астрофизике. Механическая аналогия подсказывает нарастающее отклонение от неустойчивого положения равновесия в максимуме потенциальной энергии. В данном случае $\text{Re } \omega = 0$, т. е. неустойчивость аperiодическая.

Замечание. Роль g может играть ускорение произвольной природы (принцип эквивалентности). В частности, испарение и разлет мишени в вариантах инерциального термоядерного синтеза из-за вклада внешней более плотной оболочки приводит к нежелательной неустойчивости РТ, с которой приходится специально бороться. Она существенна в оболочках сверхновых, в галактических дисках. Этот список легко продолжить.

3) $U \neq 0, g = \alpha = 0$ – тангенциальный разрыв:

$$\omega = \pm i \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}} (kU)^2. \quad (3a.6)$$

Видна неустойчивость, которая ответственна за “полоскание” флагов и имеет также множество аналогов в процессах, происходящих в окружающей нас природе и в космосе.

4) За счет сил тяжести и капиллярных сил возможна стабилизация неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (КГ): $U \neq 0, g, \alpha \neq 0$.

Условием устойчивости является положительность дискриминанта в (3a.4) $D > 0$. Граница устойчивости $D = 0$ приводит к квадратному уравнению относительно k , откуда в свою очередь условие на его дискриминант $\tilde{D} < 0$ приводит к условию устойчивости

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} U^2 < \sqrt{4(\rho_2 - \rho_1)g\alpha}, \quad (3a.7)$$

или при $\rho_2 \gg \rho_1$ (например, в случае “вода-воздух”)

$$\rho_1 U^2 < \rho_2 (V_{\text{фаз}}^2)_{\text{min}}. \quad (3a.8)$$

Условие это имеет простой физический смысл. Пусть на границе раздела, отделяющей покоящуюся воду от движущегося со скоростью $U = \text{const}$ воздуха, возникает возвышение ζ с характерным размером λ (играющим роль длины волны). Потенциальное обтекание этого возвышения (рис. 3a.2) в силу закона Бернулли вызывает появление подъемной силы, приводящей к дальнейшему росту возвышения. Действительно, скорость воздуха над возвышением из-за уменьшения поперечного сечения увеличивается, вследствие чего давление падает. Сила тяжести, препятствующая поднятию жидкости, и сила поверхностного натяжения, препятствующая искривлению поверхности, создают возвращающую силу, стремящуюся стабилизировать неустойчивость. Таким образом, условие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца можно переписать в виде $\rho V_{\text{min}}^2 < \rho_{\text{возд}} U^2$, или

$$U > V_{\text{min}} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\text{возд}}}} \equiv U_{\text{КГ}}.$$

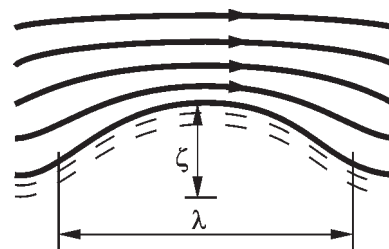


Рис. 3a. 2. Обтекание возвышения ламинарным потоком

Из-за малой плотности воздуха (малости подъемной силы) этот механизм приводит к очень большим критическим скоростям:

$U_{\text{кг}} \approx 6$ м/с, значительно превышающим те, при которых возникает волнение. Долгое время было совершенно непонятно, в чем здесь дело. Проблема просуществовала около полувека и разгадка привела Майлса и Филлипса к открытию ветровой неустойчивости.

3б. Ветровая неустойчивость

Источником волнения на поверхности моря, как правило, является ветер. Парадоксально, что лишь относительно недавно был выяснен истинный механизм ветровой неустойчивости (ВН). Ответственным за неустойчивость оказался резонанс.

Посмотрим на закон дисперсии поверхностных волн. Он имеет типично “сверхтекучий” характер по известному критерию Ландау. Согласно этому критерию законы сохранения не позволяют рождаться возбуждениям (волнам) при скоростях, меньших $V_{\text{крит}}$, которая определяется наклоном касательной, проведенной из начала координат. Касание происходит при $k = k_0$, т. е. при $V_{\text{крит}} = V_{\text{min}}$, откуда получаем условие возбуждения волн в виде (рис. 3б.1)

$$U > V_{\text{min}}, \quad V_{\text{min}} \approx 23 \text{ см/с.}$$

Это условие соответствует значительно меньшим критическим скоростям, чем условие Кельвина-Гельмгольца, так как в нем отсутствует большой множитель $\sqrt{\rho/\rho_{\text{возд}}}$ при V_{min} . Его физический смысл состоит в возникновении резонанса между вихрями в воздухе, переносимыми со скоростями ветра, и поверхностными волнами, причем резонанс возникает, как только скорость вихрей (скорость потока) начинает превосходить наименьшую скорость волн V_{min} . Неоднородность профиля скоростей ветра $U(z)$ приводит к тому, что резонанс осуществляется лишь в “слое совпадения”, в котором средняя скорость течения равна скорости волны (рис 3б.2). Можно считать, что слой совпадения возникает на ∞ и с ростом скорости U_{∞} приближается к поверхности раздела (т. е. вихри как бы приходят из бесконечности). Инкремент существенно зависит от положения слоя совпадения и пропорционален второй производной ($-U''(z)$)

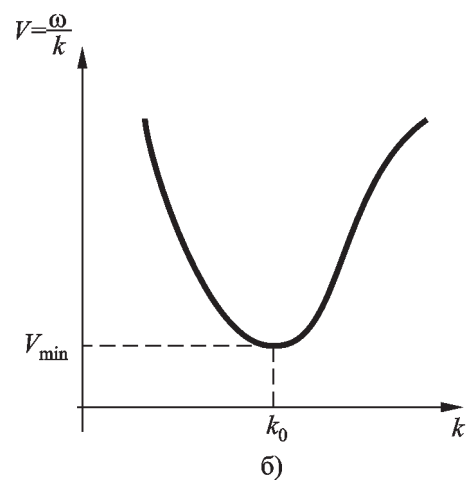
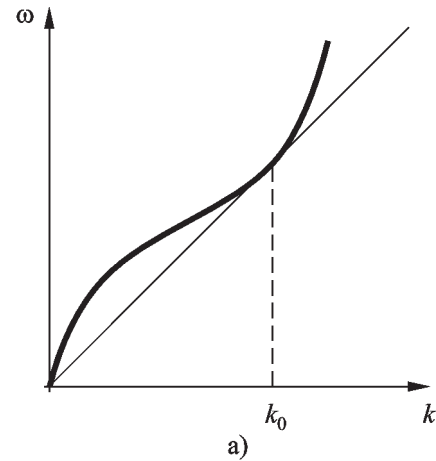


Рис. 3б. 1. а) Критерий Ландау возбуждения волн потоком (применительно к волнам на поверхности жидкости) в терминах закона дисперсии; б) то же в терминах скоростей волн

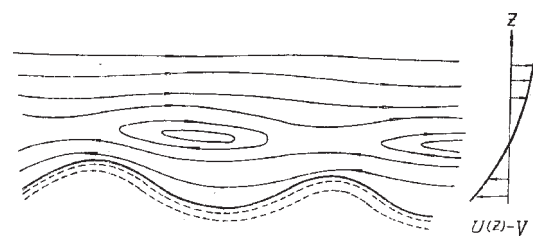


Рис. 3б. 2. Связанные условием резонанса поверхностные волны и вихри в слое совпадения [5с]

в этом слое. Поэтому эффект отсутствует при линейном профиле скоростей. При повышении скорости ветра условие резонанса выполняется для гравитационных волн со все меньшими

значениями V . Источник смещается, таким образом, в сторону малых волновых чисел.

Найдем инкремент ветровой неустойчивости.

Для описания непотенциального движения в несжимаемой жидкости удобно ввести векторный потенциал \mathbf{B} : $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{B}$, тогда уравнение $\text{div } \mathbf{v} = 0$ удовлетворяется тождественно. Профиль скорости в потоке задан:

$$\mathbf{U}(z) = (U(z), 0, 0). \quad (36.1)$$

Возмущение ищем в виде $\mathbf{v}' = \text{rot } \Phi$, причем считаем его не зависящим от y . Двумерный характер движения (плоское течение) позволяет исходить из закона сохранения завихренности

ти $\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = 0$, который для плоского течения несжимаемой жидкости следует из теоремы

Томсона $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ сохранения циркуляции скорости $\Gamma = \oint \mathbf{v} d\mathbf{l}$. Действительно, для малого контура $\Gamma = \iint \text{rot } \mathbf{v} ds \approx \text{rot } \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{s}$, где $\delta \mathbf{s} = \delta x \delta z \mathbf{e}_y$, откуда $\Gamma \approx \text{rot}_y \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{s}$. В свою очередь, в силу несжимаемости

$$\frac{d\delta \mathbf{s}}{dt} = \delta v_x \delta z + \delta x \delta v_z = \delta \mathbf{s} \left(\frac{\delta v_x}{\delta x} + \frac{\delta v_z}{\delta z} \right) = \delta \mathbf{s} \cdot \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Таким образом, из $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ следует (в этом

случае) $\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = 0$. Для плоского течения удобно также выразить векторный потенциал через скалярную величину – функцию тока согласно $\mathbf{B} = -\mathbf{e}_y \psi$, $\Phi = -\mathbf{e}_y \phi$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot rot } \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B} = \mathbf{e}_y \Delta \psi = (U'(z) + \Delta \phi) \mathbf{e}_y. \quad (36.2)$$

Уравнения приобретают гамильтонов вид, где роль обобщенного импульса играет одна из координат, а роль гамильтониана играет функ-

ция тока: $\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}$, $\dot{z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Для возмущенной функции тока, которую ищем в виде плоской волны

$$\phi = \phi(z) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (36.3)$$

закон сохранения завихренности (36.2) приводит к уравнению Рэлея:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} - \left(k^2 - \frac{U''(z)}{U(z) - V} \right) \phi = 0, \quad (V \equiv \frac{\omega}{k}, U'' \equiv \frac{d^2 U}{dz^2}). \quad (36.4)$$

Следуя Рэлею, умножаем (36.4) на ϕ^* и, проинтегрировав по z от 0 до ∞ , получаем условие

$$\int_0^\infty dz \left[|\phi'|^2 + k^2 |\phi|^2 + \frac{U''(z)}{U(z) - \frac{\omega}{k}} |\phi|^2 \right] = \phi^* \phi' \Big|_0^\infty = -\phi_0^* \phi_0', \quad (36.4')$$

где правая часть комплексна. Полюсная особенность в уравнении Рэлея соответствует резонансу $U(z_c) = V$, о котором мы уже говорили. Ее наличие позволяет в резонансном приближении выразить мнимую часть логарифмической производной ϕ'/ϕ на возмущенной границе раздела через величину, которую можно оценивать значительно грубее, – отношение квадрата модулей функций тока в критическом слое и на границе. Правило обхода особенности $V \rightarrow V + i0$ соответствует адиабатическому включению возмущения на $-\infty$ по t .

Взяв мнимую часть, получим формулу Майлса

$$\text{Im} \frac{\phi_0'}{\phi_0} = -\pi \frac{U_c''}{|U_c'|} \left| \frac{\phi_c}{\phi_0} \right|^2, \quad \phi_c \equiv \phi(z_c). \quad (36.5)$$

Аналогично тому, как это делалось в терминах потенциала, получим граничные усло-

вия в терминах функции тока, а из непрерывности давлений на границе раздела получим “дисперсионное соотношение”

$$\rho_1 \left[(\omega - kU_0) \frac{\phi'_0}{\phi_0} + kU'_0 \right] (\omega - kU_0) = k\rho_2 \omega^2. \quad (36.6)$$

Кавычки поставлены потому, что в (3.б.6) входит величина ϕ'_0/ϕ_0 , которую еще следует найти из уравнения Рэля. Сделать это в общем случае невозможно из-за наличия профиля $U(z)$. Однако если ограничиться вычислением малого инкремента, то (при $U_0 = 0$, что нас вполне устраивает) находим из (36.6) для $\rho_2/\rho_1 \gg 1$

$$\gamma = \text{Im}\omega = -\frac{\rho_1}{\rho_2} V_\phi \text{Im} \frac{\phi'_0}{\phi_0}, \quad V_\phi \equiv -\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{U'_0}{k}. \quad (36.7)$$

(Заметим, что выражение для инкремента через V_ϕ является более общим, чем конкретное выражение для V_ϕ в (36.7)). Используя выражение для $\text{Im} \frac{\phi'_0}{\phi_0}$ (36.5), получаем

$$\gamma = \pi \frac{\rho_1}{\rho_2} V_\phi \frac{U''_c}{|U'_c|} \left| \frac{\phi_c}{\phi_0} \right|^2. \quad (36.8)$$

Оценить отношение модулей, входящее в (36.8), можно, например, со стороны больших k , где решение имеет простой вид поверхностной волны

$$\phi(z) = \phi(0) e^{-kz}$$

и, соответственно, инкремент экспоненциально убывает с ростом k :

$$\gamma(k) = \pi \frac{\rho_1}{\rho_2} V_\phi \frac{U''_c}{(U'_c)} \exp(-2kz_c), \quad kz_c \gg 1. \quad (36.9)$$

Учитывая, что при малых k инкремент мал (в силу того, что узкий резонансный слой неэффективно взаимодействует с очень длинной волной), приходим к важному выводу о том, что для ветровой неустойчивости $\gamma(k)$ имеет максимум при $kz_c \approx 1$. Это обстоятельство весьма существенно, поскольку приводит к возникновению выделенных масштабов, важных во многих приложениях. Инкремент пропорционален мнимой части интеграла, даваемой полувычетом в точке резонанса, и таким образом определяется величиной $U''(z)$ в этой точке.

Формула Майлса верна, если инкремент достаточно мал. Если отказаться от этого предположения, то левая сторона равенства (3.4') после взятия мнимой части примет вид:

$$\text{Im}V \int_0^\infty dz \left[\frac{U''(z)}{(U(z) - \text{Re}V)^2 + (\text{Im}V)^2} |\phi|^2 \right], \quad (36.10)$$

откуда в отсутствие резонанса и при жесткой границе, когда правая часть (36.4') обращается в нуль, следует известная теорема Рэля об устойчивости течений без точек перегиба. В условиях резонанса при $\text{Im}V \rightarrow 0$ и $U'_c \neq 0$, вынося числитель в точке резонанса за знак интеграла и используя разложение $U(z) - \text{Re}V \approx U'_c(z - z_c)^2$, возвращаемся к (36.5). Предоставляем читателю получить инкремент ветровой неустойчивости в случае $U'_c = 0$. Инкремент ВН для магнитогидродинамических систем см. в [5g] (магнитосферная модель облаков радиогалактик, космических струй (джетов), кометных хвостов). Здесь заметим только, что поверхностная МГД-волна распространяется с альфвеновской скоростью

$$\mathbf{v}_a = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho_{\text{эфф}}}}. \quad \text{Если скорость}$$

ветра меньше звуковой, результат соответствует приведенному в тексте с заменой $V_\phi \rightarrow v_a$. При сверхзвуковом движении максимум инкремента соответствует возбуждению спиральной волны, что на плоской границе раздела отвечает волнам, бегущим под углом к потоку.

4. Гамильтоновы уравнения для движений поверхности жидкости

Все разобранные выше примеры сводятся к гамильтоновой форме, что, однако, непосредственно не видно в естественных переменных ρ , \mathbf{v} и p , но, как было показано В. Е. Захаровым [2a,b], проявляется после перехода к каноническим переменным, которыми в данном случае являются возвышение $\zeta(\mathbf{r}, t)$ и потенциал на поверхности жидкости $\psi = \varphi(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t)$. Проверим это вначале на рассмотренных выше линеаризованных уравнениях. Роль функции Гамильтона будет играть энергия системы E , отнесенная к единице массы ($\rho = \text{const}$, h – глубина бассейна):

$$H = \frac{E}{\rho} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int_{-h}^{\zeta(\mathbf{r})} dz (\nabla\varphi)^2 + \int d\mathbf{r} \int_0^{\zeta(\mathbf{r})} dz gz. \quad (4.1)$$

Проварьируем ее по возвышению, ограничившись квадратичными слагаемыми по малым ζ и $\nabla\varphi$, что соответствует линейному приближению в уравнениях. Это означает, что верхний предел в кинетической энергии должен быть заменен нулем. Тогда имеем

$$\delta H = \int d\mathbf{r} g \zeta \delta \zeta, \quad g \zeta(\mathbf{r}) \equiv \frac{\delta H}{\delta \zeta(\mathbf{r})}. \quad (4.2)$$

Выписанная здесь функциональная производная является обобщением частной производной на случай континуальных (распределенных) систем. Сравнивая со вторым уравнением (2.9), видим, что оно принимает вид

$$\left. \frac{\delta \varphi}{\delta t} \right|_{z=0} = - \frac{\delta H}{\delta \zeta(\mathbf{r})}. \quad (4.3)$$

Проварьируем в этом же приближении H по φ . Интегрируя по частям, получаем,:

$$\delta H = \int d\mathbf{r} \int_{-h}^0 dz \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta \varphi \right) -$$

$$- \int d\mathbf{r} \int_{-h}^0 dz \Delta \varphi \delta \varphi = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} \delta \varphi(0). \quad (4.4)$$

Мы учли, что благодаря несжимаемости $\Delta \varphi = 0$. Таким образом, и первое из уравнений (2.9) приобретает гамильтонов вид

$$\frac{\delta \zeta}{\delta t} = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad \text{где} \quad \frac{\delta H}{\delta \psi} \equiv \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad \psi = \varphi_0. \quad (4.5)$$

Замечательно, что гамильтонов вид имеют и точные нелинеаризованные уравнения для потенциального движения (В. Е. Захаров [2a,b]):

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=\zeta} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \Big|_{z=\zeta} + g \zeta = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \varphi \Big|_{z=\zeta} \nabla \zeta = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=\zeta}. \quad (4.7)$$

Вывод аналогичен предыдущему. При интегрировании по частям нужно учесть также вклад верхнего предела во внутреннем интеграле для кинетической энергии, а в выражении для ζ учесть конвективный член. Ответ:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \zeta}, \quad \psi \equiv \varphi(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t). \quad (4.8)$$

Уравнения сохраняют вид (4.8) и при учете капиллярных членов [2b]. Дополнительное слагаемое в энергии имеет вид

$$\frac{\alpha}{\rho} \int d\mathbf{r} \left(\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \zeta)^2} - 1 \right).$$

Гамильтонова структура уравнений означает симметрию системы относительно канонических преобразований, скрытую в исходных переменных. Это, в свою очередь, позволяет осуществить выбор переменных, удобных для требуемого анализа, используя хоро-

шо разработанный и весьма общий подход. Существенная трудность состоит, однако, в нахождении канонических переменных (т. е., по существу, в конструктивном доказательстве гамильтоновости системы). Обсуждавшиеся выше переменные были, на самом деле, угаданы авторами [2]. Впоследствии было выяснено, что существует способ регулярного перехода от объемных к поверхностным каноническим переменным [6g, 5], который мы изложили ниже, и в Приложении 1.

Известно, что в баротропной жидкости каноническими переменными, описывающими потенциальное движение, являются плотность ρ и потенциал скорости ϕ ($\mathbf{v} = \nabla\phi$) [6a]:

$$\frac{\delta H}{\delta \rho} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \frac{\delta H}{\delta \phi} = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (4.9)$$

$$H = \int dV \left(\frac{\rho v^2}{2} + \varepsilon(\rho) \right),$$

где внутренняя энергия $\varepsilon(\rho)$ может включать потенциальные поля, например, однородное поле тяжести, а из термодинамических переменных зависит только от плотности. Используя это, рассмотрим переход от непрерывной неоднородной среды к двум несжимаемым жидкостям с плотностями ρ_1 и ρ_2 , разделенными резкой границей $z = \zeta(\mathbf{r}, t)$. Для этого введем представление

$$\rho = f(\zeta - z) \equiv \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)\Theta(\zeta - z), \quad (4.10)$$

где функцию Θ устремим к функции скачка

$$\Theta(\zeta - z) \rightarrow \theta(\zeta - z) = \begin{cases} 1, & \zeta > z \\ 0, & \zeta < z. \end{cases} \quad (4.11)$$

Естественно, что после предельного перехода изменение плотности в данной точке определяется только движением границы раздела и описывается функцией $\zeta(\mathbf{r}, t)$. Уравнения гидродинамики после предельного перехода

содержат, кроме обычных объемных слагаемых (различных при $\zeta > z$ и $\zeta < z$ в силу разрывности ρ), слагаемые с производной f' , которая при предельном переходе стремится к δ -функции. Последнее дает естественные граничные условия на поверхности разрыва.

Например, уравнение непрерывности переходит в

$$f' \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \zeta - \mathbf{e}_z) \right) + f \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4.12)$$

что после предельного перехода эквивалентно уравнению $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ в объеме несжимаемой жидкости ($z \neq \zeta$) и граничному условию

$$\frac{d\zeta}{dt} = v_z \text{ на разрыве } (z = \zeta \pm 0).$$

Перейдем теперь от старой координаты ρ и импульса ϕ к новым каноническим переменным, потребовав, чтобы возвышение ζ было новой координатой. Выбирая производящий функционал, зависящий от старого импульса и новой координаты $F(\phi, \zeta)$, в виде

$$F(\phi, \zeta) = \int dV \phi f(\zeta - z), \quad (4.13)$$

совершим предельный переход (4.11). Тогда

$$F(\phi, \zeta) = \int d\mathbf{r} \left\{ \int_{\zeta}^{\zeta} \rho_2 \phi_2 dz + \int_{\zeta} \rho_1 \phi_1 dz \right\}, \quad (4.14)$$

и вариация по ζ дает новый импульс

$$\frac{\delta F}{\delta \zeta} = (\rho_2 \phi_2 - \rho_1 \phi_1) \Big|_{z=\zeta} \equiv [\rho \phi]_{\zeta}. \quad (4.15)$$

Таким образом, замена (4.10), (4.11) с производящим функционалом (4.13) позволяет совершить переход от канонических переменных (ρ, ϕ) к поверхностным каноническим переменным $(\zeta, \Psi \equiv [\rho \phi]_{\zeta})$ в несжимаемой жидкости, которые при $\rho_1 \rightarrow 0$ (с точностью до

постоянного множителя ρ) переходят в переменные Захарова ζ , $\varphi(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t)$.

Указанный способ непосредственно обобщается на случай вихревого движения. Это обобщение, а также поверхностные гамильтоновы переменные в магнитной гидродинамике приведены в Приложении 1. В разделе 6 мы получим эти (и более общие) переменные, используя вариационный принцип со связями.

5. Комплексные нормальные координаты

Для анализа слабо нелинейных процессов, когда еще сохраняется индивидуальность линейных волн (волновых пакетов), но уже становятся существенными процессы их взаимодействия, чрезвычайно удобна аналогия волн с частицами, которая наиболее адекватно проявляется при некотором специальном выборе в качестве переменных линейных комбинаций канонических координат и импульсов. Указанная аналогия чрезвычайно широкое распространение получила не в классической, а в квантовой механике и теории поля.

Чтобы пояснить специфику и удобство новых переменных, рассмотрим сначала линейный осциллятор (чтобы не загромождать анализ будем считать его частоту и массу равными единице) с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2). \quad (5.1)$$

Его координата q и импульс p удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (5.2)$$

и для них выполняются следующие отсюда осцилляторные уравнения

$$\ddot{q} + q = 0, \quad \ddot{p} + p = 0. \quad (5.3)$$

Решение этих уравнений представляет собой сумму двух слагаемых, соответствующих “положительной” и “отрицательной” частотным ветвям:

$$q(t) = Ae^{it} + Be^{-it}. \quad (5.4)$$

Такое свойство осцилляторных переменных тесно связано с симметрией относительно изменения знака времени и вещественностью координаты $q(t)$ и импульса $p(t)$ осциллятора. Однако при анализе взаимодействий осцилляторов (волн) наличие положительной и отрицательной частот в одной переменной становится неудобным. Поэтому чрезвычайно полезным оказывается переход к комплексным переменным (решениям тех же линейных осцилляторных уравнений), в которых разделены положительные и отрицательные частоты. Достигается это факторизацией гамильтониана. Введя величину iq , мы получаем H в виде разности квадратов $\frac{1}{2}(p^2 - (iq)^2)$, которая разлагается на сомножители и определяет выбор новых переменных:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - iq), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + iq), \quad (5.5)$$

после чего гамильтониан приобретает вид квадрата модуля комплексной величины a : $H = a^* a$. При $\omega \neq 1$ для системы, представляющей собой счетную последовательность осцилляторов,

$$H = \sum_j \omega_j a_j^* a_j, \quad a_j = \sqrt{\frac{\omega_j}{2}} q_j - i \frac{p_j}{\sqrt{2\omega_j}}. \quad (5.6)$$

Переходу от переменных p и q к переменным a и a^* соответствует преобразование, приводящее уравнения (5.2) к виду

$$\dot{a}_i = -i \frac{\partial H}{\partial a_i^*}, \quad (5.7)$$

или в случае непрерывной среды:

$$\dot{a}_i(\mathbf{r}, t) = -i \frac{\delta H}{\delta a_i^*(\mathbf{r}, t)}. \quad (5.8)$$

Введем удобное в дальнейшем обозначение a_i^σ , где $\sigma = \pm$. По существу, мы ввели “спиновый” индекс σ , и набор a^σ представляется “столбцом”, причем мнемонически удобно комплексное сопряжение обозначать индексом (+), а его отсутствие индексом (-). Тогда уравнения (5.8) и комплексно-сопряженные к ним переписутся в виде:

$$\dot{a}_i^\sigma(\mathbf{r}, t) = i\sigma \frac{\delta H}{\delta a_i^{-\sigma}(\mathbf{r}, t)}. \quad (5.9)$$

В случае, когда нелинейность слаба (имеется малый параметр, например, малый угол наклона возвышений в случае поверхностных волн и т. п.), представляет интерес разложение гамильтониана в ряд по нелинейному взаимодействию. В терминах переменных a^σ это разложение выглядит весьма общим и (символически) простым:

$$H = H^L + H^{NL}, \quad H^L \equiv H^{(2)},$$

$$H^{NL} = H^{(3)} + H^{(4)} + \dots,$$

или

$$H = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{3} \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} V_{123} a_1 a_2 a_3 \delta^{(3)} +$$

$$+ \frac{1}{4} \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} d\mathbf{4} V_{1234} a_1 a_2 a_3 a_4 \delta^{(4)} + \dots \quad (5.10)$$

Здесь использована символическая запись

$$\int d\mathbf{l} \dots \equiv \sum_{\sigma_1} \int d\mathbf{k}_1 \dots, \quad \delta^{(3)} \equiv \delta \left(\sum_{\sigma_i} \sigma_i \mathbf{k}_i \right), \quad (5.11)$$

$$V_{123} \equiv V_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}, \quad a_1 \equiv a_{\mathbf{k}_1}^{\sigma} \text{ и т. д.}$$

Множители $1/3$ в $H^{(3)}$, $1/4$ в $H^{(4)}$ выбраны так, чтобы после варьирования исчезал соответствующий коэффициент (3 или 4 соответственно), связанный с использованной симметризацией в приведенной выше символической записи. Уравнения движения приобретают в слабо нелинейном случае вид:

$$\dot{a}_{\mathbf{k}}^\sigma - i\sigma \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\sigma = i\sigma \int d\mathbf{l} d\mathbf{2} d\mathbf{3} V_{\mathbf{k} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}^{-\sigma \sigma_1 \sigma_2} a_{\mathbf{q}_1}^{\sigma_1} a_{\mathbf{q}_2}^{\sigma_2} \times$$

$$\times \delta(-\sigma \mathbf{k} + \sigma_1 \mathbf{q}_1 + \sigma_2 \mathbf{q}_2) + \dots \quad (5.12)$$

(легко выписываются и следующие члены разложения).

Получим критерий того, что преобразование к новым нормальным координатам $a \rightarrow b$ является каноническим, т. е. сохраняет вид уравнений (5.8). Так как $b = b\{a\}$, то

$$\dot{b}^\sigma(\mathbf{r}, t) = \sum_{\sigma'} \int d\mathbf{r}' \frac{\delta b^\sigma(\mathbf{r}, t)}{\delta a^{\sigma'}(\mathbf{r}', t)} \dot{a}^{\sigma'}(\mathbf{r}', t),$$

и мы должны привести это выражение к виду (5.8). Подставляя \dot{a}^σ , из (5.9), где H рассматривается как функционал $H\{b\{a\}\}$, т. е.

$$\dot{a}^{\sigma'}(\mathbf{r}', t) = i\sigma' \sum_{\sigma''} \int d\mathbf{r}'' \frac{\delta H}{\delta b^{\sigma''}(\mathbf{r}'', t)} \frac{\delta b^{\sigma''}(\mathbf{r}'', t)}{\delta a^{-\sigma'}(\mathbf{r}', t)},$$

получим критерий каноничности в виде условия для скобки Пуассона (детальнее см. [1h]):

$$\sum_{\sigma'} \sigma' \int d\mathbf{r}' \frac{\delta b^{\sigma'}(\mathbf{r}'', t)}{\delta a^{-\sigma'}(\mathbf{r}', t)} \cdot \frac{\delta b^\sigma(\mathbf{r}, t)}{\delta a^{\sigma'}(\mathbf{r}', t)} \equiv$$

$$\equiv [b^{\sigma'}(\mathbf{r}''), b^\sigma(\mathbf{r})]_{a^{-\sigma'}, a^{\sigma'}} = \sigma \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}) \delta_{-\sigma', \sigma}. \quad (5.13)$$

Теперь нетрудно проверить, что переход от $a(\mathbf{r}, t)$ к фурье-образам $a_{\mathbf{k}}(t)$ является каноническим преобразованием. Согласно определению (d – размерность \mathbf{k} -пространства),

$$a^\sigma(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} a_{\mathbf{k}}^\sigma e^{-i\sigma\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

$$a_{\mathbf{k}}^\sigma(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^{d/2}} a^\sigma(\mathbf{r}) e^{i\sigma\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

функциональные производные новых координат по старым равны:

$$\frac{\delta a_{\mathbf{k}}^\sigma}{\delta a^\sigma(\mathbf{r})} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{i\sigma\mathbf{k}\mathbf{r}} \delta_{\sigma\sigma'}.$$

Вычисляя скобку $[a_{\mathbf{k}''}^{\sigma'}, a_{\mathbf{k}}^\sigma]_{a^\sigma(\mathbf{r}), a^{\sigma'}(\mathbf{r})}$, находим, что она равна $\sigma\delta_{\sigma', -\sigma}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'')$, т. е. требуемое условие выполняется. Видно, что нормировка фурье-преобразования должна быть симметричной. В физике, впрочем, часто используют несимметричную нормировку. Запишем, опуская несложные выкладки, уравнения движения (4.6), (4.7) в фурье-представлении, используя несимметричное преобразование Фурье (множители 2π собраны в интеграле по \mathbf{r}):

$$A_{\mathbf{k}} \equiv \langle A \rangle_{\mathbf{k}} \equiv \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(\mathbf{r}), \quad (5.14)$$

$$A(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \langle A \rangle_{\mathbf{k}};$$

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} \right\rangle_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{q} q \varphi_{\mathbf{q}}(t) \langle e^{q\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}},$$

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} \right\rangle_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{q} \frac{\delta\varphi_{\mathbf{q}}(t)}{\delta t} \langle e^{q\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}, \quad (5.15)$$

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{z=\zeta} \cdot \nabla\zeta \right\rangle_{\mathbf{k}} = - \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) \varphi_{\mathbf{q}_1} \zeta_{\mathbf{q}_2} \langle e^{q\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2},$$

$$\begin{aligned} \left\langle (\nabla\varphi)^2 \Big|_{z=\zeta} \cdot \nabla\zeta \right\rangle_{\mathbf{k}} &= \\ &= \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 (q_1 q_2 - \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) \varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{\mathbf{q}_2} \langle e^{(q_1+q_2)\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}. \end{aligned}$$

Потенциал скорости равен

$$\varphi(\mathbf{r}, z, t) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \varphi_{\mathbf{k}}(z, t) \equiv \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{kz} \varphi_{\mathbf{k}}(t), \quad (5.16)$$

таким образом, величина $\varphi_{\mathbf{k}}(t)$ – фурье-компонента потенциала при $z=0$. Приведем также связь $\varphi_{\mathbf{k}}$ и фурье-компоненты потенциала скорости на границе раздела ζ (последняя является гамильтоновой переменной) $\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, \zeta(\mathbf{r}, t), t)$:

$$\psi_{\mathbf{k}}(t) = \int \frac{d\mathbf{r}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{q} \varphi_{\mathbf{q}}(t) \langle e^{q\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}. \quad (5.17)$$

Чтобы записать уравнения для $\psi_{\mathbf{k}}$ и $\zeta_{\mathbf{k}}$ с учетом квадратичных членов используем разложение $\langle e^{q\zeta} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} = \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + q\zeta_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \dots$, после чего имеем из (5.15) – (5.16):

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \psi_{\mathbf{k}} - \int d\mathbf{q}_1 q_1 \psi_{\mathbf{q}_1} - \zeta_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_1} + \dots$$

Окончательно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_{\mathbf{k}}}{\partial t} + g\zeta_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \psi_{\mathbf{q}_1} \psi_{\mathbf{q}_2} \times \\ &\times (q_1 q_2 + \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\zeta_{\mathbf{k}}}{\partial t} + k\psi_{\mathbf{k}} &= \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \psi_{\mathbf{q}_1} \zeta_{\mathbf{q}_2} \times \\ &\times (\mathbf{k}\mathbf{q}_1 - kq) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2). \end{aligned}$$

Приведем квадратичную часть гамильтониана, выраженную через $\psi_{\mathbf{k}}$ и $\zeta_{\mathbf{k}}$:

$$H^L = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \mathbf{dr} \int (\nabla\phi)^2 dz + \int_{\mathbf{dr}} \int_0^{\xi} dz g z =$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{2} \int d\mathbf{q} (q\psi_{\mathbf{q}}\psi_{-\mathbf{q}} + g\zeta_{\mathbf{q}}\zeta_{-\mathbf{q}}). \quad (5.19)$$

Перейдем теперь от $\psi_{\mathbf{k}}$ и $\zeta_{\mathbf{k}}$ к комплексным нормальным координатам и вычислим “матричные элементы” для системы (5.18). Отличие от (5.6) состоит в том, что исходные “координата” и “импульс” теперь комплексные и связь имеет вид:

$$\zeta_{\mathbf{k}} = \gamma_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^*), \quad \psi_{\mathbf{k}} = -i\beta_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^*). \quad (5.20)$$

Ответ [2]:

$$H = \int d\mathbf{q} \omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^*, \quad \omega_{\mathbf{q}} = \sqrt{gq}, \quad V \equiv \frac{\omega}{q} \quad (5.21)$$

$$\beta_{\mathbf{k}}^2 = \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2(2\pi)^2 k}, \quad \gamma_{\mathbf{k}}^2 = \frac{k}{2(2\pi)^2 \omega_{\mathbf{k}}};$$

$$V_{123} = \frac{(2\pi)^2}{4} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \sum_{\text{перестановки}} \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 + \sigma_1 \sigma_2 q_1 q_2}{V_3}, \quad (5.22)$$

Чтобы вычислить “матричные элементы” V_{1234} для системы (4.6) – (4.7) нужно провести значительно более громоздкие выкладки, результат которых приведен в [2]. См. также Приложение 2.

6. Вариационный принцип со связями и введение гамильтоновых переменных

В настоящем разделе принцип наименьшего действия формулируется в таком виде, что позволяет ввести гамильтоновы потенциалы в объеме как лагранжевы множители при связях, используя в качестве последних законы сохранения. Заметим, что обычно вариацион-

ный принцип применяется для вывода уравнений. Мы же будем считать уравнения (или законы сохранения, которые, по существу, эквивалентны уравнениям движения) известными и будем использовать их как связи для отыскания условного экстремума действия. При таком подходе лагранжевы множители при связях оказываются ни чем иным, как гамильтоновыми переменными (ГП). Отметим, что такой подход плодотворно использовался Дираком в квантовой электродинамике, а применительно к сплошным средам – спорадически в отдельных работах, из которых следует отметить раннюю работу Давыдова [6b]. Излагается также способ вывода этим методом поверхностных ГП (как естественных граничных условий вариационной задачи). Он является более общим, чем описанный выше предельный переход от гамильтоновых переменных в плавно неоднородной среде к разрывным течениям. Оба подхода могут быть использованы и в других случаях: магнитная гидродинамика, плазма, магнетики, сверхтекучая [12a] или релятивистская [12b] среда и т. п.

Вариационный принцип со связями

Объемные гамильтоновы уравнения должны быть эквивалентны уравнениям гидродинамики идеальной жидкости:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla). \quad (6.3)$$

Будем получать их используя вариационный принцип для действия:

$$A = \int dt L = \min, \quad L = \int d\mathbf{r} L, \quad L = \frac{\rho v^2}{2} - p\epsilon. \quad (6.4)$$