Radio Physics and Radio Astronomy, 2001, v. 6, No. 2, pp. S101–S104

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПИСАНИЯ ВНЕШНИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

О. В. Завизион

*Лаборатория теоретической астрофизики и гравитации
Уманского педуниверситета,
г. Умань, ул. Садовая, 28*

Гравитационный потенциал как характеристика гравитационного взаимодействия может быть описан многими методами. Рассмотрены особенности некоторых способов представления внешнего гравитационного потенциала небесных тел: разложение в ряд по сферическим функциям, многоточечная модель, максвеллова модель, эквигравитирующие фигуры. Проведено сравнение указанных методов описания внешнего гравитационного потенциала.

Отклонение внешнего гравитационного поля небесного тела от сферически - симметричного ньютоновского потенциала имеет порядок полярного сжатия $f = (a - c)/c$ [7]. Данное отклонение охватывает информацию о небольших флуктуациях плотности в недрах небесного тела, разность моментов инерции небесного тела относительно его главных осей и об отклонении его недр от состояния гидростатического равновесия. Отклонение состояния небесных тел от гидростатически равновесного показывает, что в них рядом с гидростатическим напряжением (давлением) действуют касательные напряжения. Отклонения небесных тел от указанного состояния незначительны и составляют величины порядка квадрата геометрического сжатия и меньше. Если рассматривать небесное тело, которое находится в состоянии гидростатического равновесия, то его внешний гравитационный потенциал выражается формулой [7, 12]:

$$V = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} P_{2n}(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right], \quad (1.1)$$

где a – экваториальная полуось,

$$J_{2n} = -\iiint\limits_V \frac{\rho(r')r'^{2n}P_{2n}(\cos\theta')dV'}{a^{2n}M}$$

четные зональные моменты, $P_n(\cos\theta) = P_n(t) = \dfrac{1}{2^n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ – полином Лежандра n-ой степени или сферическая функция первого рода, θ – полярный угол.

Существует много форм описания гравитационного потенциала небесных тел [2, 3, 10, 11], например, разложение в ряд сферических функций, по гармоникам сжатого эллипсоида вращения, рядами по функциям Ламе, потенциалом простого слоя, использованием неподвижных центров (мнимых или комплексных), комбинированием разных способов аппроксимации потенциала в отдельных частях пространства и др. При определении потенциала возникают две основные задачи: прямая и обратная. Аналитическое описание потенциала есть решением прямой потенциалографической задачи. Обратные потенциалографические задачи состоят в нахождении поверхности S и расположение на ней двух слоев – простого и двойного (дипольного) или одного из них, сумма потенциалов которых выражала бы потенциал небесного тела и допускала бы более простое определение его, чем обычно по ряду сферических функций.

Остановимся на некоторых из указанных методов решения потенциалографической задачи. Наиболее распространенной гравитационной моделью небесного тела есть описание внешнего гравитационного потенциала небесного тела в виде бесконечного ряда по сферическим функциям [2, 3, 6, 9, 11, 12]:

$$V = G\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} P_{nk}(\cos\theta)[C_{nk}(r)\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda], \quad (1.2)$$

где

$$\left\{\begin{matrix} C_{nk}(r) \\ S_{nk}(r)\end{matrix}\right\} = \frac{2(n-k)!}{(n+k)!} \times \iiint\limits_V \rho(r')r'^n P_{2nk}(\cos\theta')\left\{\begin{matrix}\cos k\lambda' \\ \sin k\lambda'\end{matrix}\right\}dV', \quad (k \geq 1),$$

$C_{no}(r) = \iiint\limits_V \rho(r')r'^n P_n(\cos\theta')dV'$ – гармонические коэффициенты или постоянные Стокса;

$$P_{nk}(\cos\theta) = P_{nk}(t) = \frac{d^k P_n(t)}{dt^k}\sin^k\theta \text{ –}$$

присоединенные функции Лежандра степени n и порядка k.

При соблюдении некоторых условий представление (1.2) упрощается. Так, если начало отсчета совместить с центром масс тела, а координатные оси – с главными осями инерции, то гармоничные коэффициенты первого порядка и три из пяти второго порядка равняются нулю: $C_{10} = C_{11} = C_{21} = S_{11} = S_{21} = S_{22} = 0$.

В случае гравитационного поля сфероида необходимо и достаточно воспользоваться тремя первыми членами разложения C_{00}, C_{20}, C_{22}, где $C_{20} = (B + A - 2C)/2$ характеризует глобальное полярное сжатие, $C_{22} = (B - A)/4$ - экваториальное сжатие, A, B, C – моменты инерции относительно главных осей инерции. Все другие гармонические коэффициенты характеризуют отклонения самогравитирующей фигуры от сфероида. Если тело симметричное относительно оси z и экватора, то в разложении остаются только четные зональные гармоники $C_{2n,0}$.

По определенным причинам широкое распространение получило описание гравитационного потенциала системой точечных масс [1, 2, 3, 9, 11]. Заменим обьемный внешний потенциал интегральной суммой, которая представляет собой сумму потенциалов набора N точечных масс:

$$V(P) \approx G\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{r_i}, \tag{1.3}$$

где m_i – точечные массы внутри небесного тела, r_i – расстояния от них к внешней точке P. Простейшим случаем есть аппроксимация потенциала небесного тела потенциалом двух комплексных точечных масс (недвижимых центров): массами $M(1 + i\sigma)/2$ и $M(1 - i\sigma)/2$, отдаленных одна от другой на расстояние $2ic$. Способ разложения потенциала с помощью точечных масс небесного тела должен удовлетворять следующим условиям: число точечных масс не должно быть большим; параметры точечных масс должны соответствовать действительности; модель должна быть однородная, то есть из нее не нужно выделять какое-нибудь нормальное поле; модель должна иметь свойство автономности. Критерием качества аппроксимации потенциала тела вращения потенциалом системы точечных масс считается совпадение первых членов разложения указанных потенциалов по зональным гармоникам. Задача о потенциале N точечных масс может быть разрешима методом наименьших квадратов групповыми итерациями. В первой группе находят массы точек, а во второй — планетоцентрические координаты точек.

При построении моделей точечных масс можно использовать максвеллову модель сферической функции [2, 3, 11]. Каждая сферическая функция порядка n представляет собой потенциал мультиполя:

$$V_n = M_n\frac{\partial^n r^{-1}}{\partial w_{n_1}\partial w_{n_2}\ldots\partial w_{n_n}}, \tag{1.4}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial w_{n_j}}$ означает дифференцирование согласно определенному направлению:

$$\frac{\partial}{\partial w_{n_j}} = \alpha_{n_j}\frac{\partial}{\partial x} + \beta_{n_j}\frac{\partial}{\partial y} + \gamma_{n_j}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\alpha_{n_j}^2 + \beta_{n_j}^2 + \gamma_{n_j}^2 = 1.$$

Величины M_n, w_{n_j} называют моментами и осями мультиполя. Сферическая функция нулевого порядка получается полем точечной массы M, которая лежит в начала координат. Сферическая функция первого порядка получается диполем: точки диполя расположены на оси w_{11} на равном расстоянии δ_1 от центра, массы точек расположены на границах $\pm M_1$. По индукции определяется мультиполь порядка n с моментом M_n и осями $w_{n_1}, w_{n_2}, \ldots w_{n_n}$, что представляет собой предельное положение 2^n точечных масс, которые стягиваются к центру.

Взяв большую совокупность материальных точек, которые расположены в одной плоскости, можем перейти к непрерывному распределению массы, которое характеризуется поверхностной плотностью μ. Таким образом, можно образовать определенный диск с соответствующей плотностью μ, внешний гравитационный потенциал которого описывает гравитационный потенциал пространственной фигуры. Согласно второй формуле Грина:

$$V_e(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\sigma\left[\frac{\partial V}{\partial n}\frac{1}{r} - V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\sigma, \tag{1.5}$$

где обьемный потенциал V тела τ отображается суммой потенциалов двух слоев: V' – простого и V'' – двойного, расположенных на поверхности тела,

$$V = V' + V'' \tag{1.6}$$

или одного из них; потенциал простого слоя:

$$V'(P) = \int\limits_S\frac{\mu_Q dS_Q}{r_{PQ}} \quad (Q \in S, P \notin S), \tag{1.7}$$

потенциал двойного слоя:

$$V''(P) = \int\limits_S \nu_Q \frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right) dS_Q,$$
$$(Q \in S, P \notin S). \qquad (1.8)$$

Здесь μ – плотность простого слоя, ν – момент двойного слоя, отнесенные к некоторой ограниченной гладкой двусторонней поверхности S, расположенной внутри σ и не имеющей с нею общих точек [10, 11].

Для описания гравитационного потенциала гидростатически равновесных небесных тел используют только потенциал простого слоя V'. Согласно работам Римана [11], внешний потенциал однородного эллипсоида с полуосями $a > b > c$ и плотностью ρ соответствует потенциалу неоднородного эллиптического диска с полуосями $\sqrt{a^2-c^2}$, $\sqrt{b^2-c^2}$ и плотностью

$$\mu(x,y) = \frac{2abc\rho}{\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}\left[1 - \frac{x^2}{a^2-c^2} - \frac{y^2}{b^2-c^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

расположенного в плоскости, которая определяется осями эллипсоида, перпендикулярными его малой оси. В случае неоднородного эллипсоида вращения с законом распределения плотности

$$\rho(R,z) = \rho_0\left[\alpha + \beta\left(\frac{R^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right],$$

где $\alpha \geq 0$, $\alpha + \beta \geq 0$, получен в [8] эквигравитирующий круговой диск радиуса $R_x = \sqrt{a^2-c^2}$ и поверхностной плотности

$$\sigma(R) = \frac{2a^2c\rho}{a^2-c^2} \times \left[\alpha + \frac{\beta}{3} + \frac{2}{3}\beta\frac{R^2}{a^2-c^2}\right]\left(1 - \frac{R^2}{a^2-c^2}\right)^{1/2} \qquad (1.9)$$

Таким образом, потенциал на внешнюю точку однородного и неоднородного эллипсоида, но с эллипсоидально-сферическим строением, может быть описан потенциалом фокального диска этого эллипсоида. В работе [5] получено общее решение нахождения поверхностной плотности эквигравитирующего кругового диска для тел вращения.

Возможно также построение одномерной модели, которая представляет собой эквигравитирующий стержень. Его гравитационный потенциал

$$V(P) = G\int\limits_{(L)} \frac{\delta(z')dz'}{\sqrt{R^2 + (z-z')^2}}, \qquad (1.10)$$

где $R = \sqrt{x^2+y^2}$, $\delta(z')$ – линейная плотность стержня, совпадает с гравитационным потенциалом небесного тела. Случай однородного эллипсоида вращения $a > c$ был рассмотрен в работе [1] и получен мнимый стержень длиной $L_x = 2i\sqrt{a^2-c^2}$ и параболической плотностью $\mu(z) = -\mu_0 i\left(1 - \frac{4z^2}{L_x^2}\right)$, $\mu_0 = \frac{\pi\rho a^2 c}{\sqrt{a^2-c^2}}$. В работе [4] для некоторых тел вращения получены эквигравитирующие стержни, где решение обратной задачи построено на использовании интеграла Коши при переходе в комплексную плоскость.

Каждый метод описания гравитационного потенциала имеет свои преимущества и недостатки. Так классический метод отображения гравитационного потенциала в виде бесконечного ряда по сферическим функциям имеет следующие недостатки:

– трудность оценки общего члена и необходимость использования большого количества гармоник за счет медленной сходимости ряда;

– каждый раз при уточнении модели гравитационного потенциала необходимо вычислять всю совокупность коэффициентов разложения, решая плохо совмещаемые уравнения высокого порядка;

– возникновение резонансных эффектов при отображении потенциала сферическими гармониками;

– с возрастанием степени и порядка гармоник возникают трудности вычислений, обусловленные влиянием погрешностей округления.

Основные данные для данной модели берутся из спутниковых наблюдений. Измеряя высоты искусственных спутников и наблюдая их орбиты, можно определить особенности гравитационного поля планет. Так использование космических аппаратов дало возможность рассчитать с достаточной точностью величины первых зональных моментов для планет и некоторых их спутников. Многоточечная модель потенциала гарантирует также достаточно точную аппроксимацию внешнего гравитационного потенциала небесных тел и, имея однородный характер членов, разрешает более просто проводить вычисления, по сравнению с классической моделью. Но в то же время она не всегда экономична (например, потенциал однородного шара), при численной аппроксимации массы и их расстояния от центра планеты в общем случае могут быть как действительными, так и комплексными, кроме того массы могут "выпрыгивать" за границы небесных тел. Преимуществом мультипольной конструкции есть знание осей, на которых располагаются массы; их действительность. Главный недостаток – большое количество точек $N \sim 2^n$, где

n – порядок сферической функции.

Исходя из первого приближения гидростатической теории фигур планет Клеро, планетам можно приписать еллипсоидально-сферическое строение. Кроме того, планеты-гиганты близки к гидростатическому равновесию и целесообразным есть использование эквигравитирующих фигур. В работе [8] показано, что при использовании модели систем эквигравитирующих дисков достигается достаточная точность описания внешнего гравитационного потенциала ($\delta J_{2n} \leq 1\%,\ n = 1, 2, 3$). При сравнении модели системы эквигравитирующих дисков с двухточечной моделью для планет-гигантов расчеты показывают, что расхождения в динамических характеристиках возникает на расстояниях от поверхности: для Юпитера $\approx 0.804a$, для Сатурна $\approx 4.575a$, для Урана $\approx 0.839a$, где a – большая полуось эллипсоида планеты.

Можем сделать вывод: при очень больших расстояниях планета притягивает как материальная точка, при меньших – как ее фокальный диск соответствующей плотности, а при расстояниях, сопоставимых с размерами самой планеты, – как диск, дополнительно нагруженный другими гравитирующими образованиями.

Основные требования, которые поставлены к методам описания гравитационных полей, – это точность, простота, наблюдаемость, универсальность, легкость использования в гравиметрии и небесной механике. При сравнении моделей согласно описанным выше требованиям можно выделить некоторые особенности [2]: простотой действий выделяются системы точечных масс и выборочные функции (один из видов представления гравитационного потенциала с помощью шаровых функций); скоростью расчетов - системы точечных масс; наблюдаемостью – эквигравитирующие фигуры (стержни, диски); точностью – объемный интеграл, сферические функции и эллипсоидальные гармоники; легкостью построения теории движения космических аппаратов – эллипсоидальные гармоники, системы точечных масс, сферические функции.

Список литературы

[1] В. А. Антонов, *Уч. зап. ЛГУ.*, **56**, 397, 145 (1978)

[2] В. А. Антонов, Е. И. Тимошкова, К. В. Холшевников, Изуч. Земли как планеты методами астрон., геод. и геофиз.: Тр. I Орлов. конф. - К.: Наукова думка, 93 (1982)

[3] В. А. Антонов, Е. И. Тимошкова, К. В. Холшевников, Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, (1988)

[4] В. А. Антонов, О. А. Железняк, О. В. Завизион, *Вісник Астрон. школи.*, **1**, 1, 44 (2000)

[5] В. А. Антонов, О. А. Железняк, Б. П. Кондратьев, *Вісник Астрон. школи.*, **1**, 2, 4 (2000)

[6] Г. Н. Дубошин, Теория притяжения. М.: Физматгиз (1961)

[7] В. Н. Жарков, Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука (1983)

[8] О. В. Завізіон, *Кинематика и физика небесных тел*, **16**, 5, 477 (2000)

[9] М. М. Машимов, Планетарные теории геодезии. М.: Недра (1982)

[10] Г. А. Мещеряков, *Геодезия, картография и аэрофотосъемка* **39**, 51 (1984)

[11] Г. А. Мещеряков, Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М.: Наука (1991)

[12] Г. Мориц, Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли. К (1994)

COMPARISON OF DESCRIPTION METHODS OF EXTERNAL GRAVITATIONAL POTENTIAL OF CELESTIAL BODY

O. V. Zavizion

Gravitational potential as a characteristic of gravitational interaction can be described by various methods. Features of some methods of representation of the external gravitational potential of celestial bodies are considered. These methods are: expansion in series of spherical functions, multipoint model, Maxwell's model, equigravitating figures. Comparison of mentioned methods of description of the external gravitational potential is carried out.

ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ ОПИСУ ЗОВНІШНІХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ НЕБЕСНИХ ТІЛ

О. В. Завізіон

Гравітаційний потенціал як характеристику гравітаційної взаємодії можна описати кількома методами. У роботі розглянуті особливості деяких способів уявлення зовнішнього гравітаційного потенціалу небесних тіл: розкладання у ряд по сферичних функціях, багатоточкова модель, максвелова модель, еквігравітуючі фігури. Проведено порівняння вказаних методів опису зовнішнього гравітаційного потенціалу.