

## Система декаметровых радиointерферометров УРАН (ч. IV)\*. Моделирование структуры источников

А. В. Мень, С. Л. Рашковский, В. А. Шепелев

*Радиоастрономический институт НАН Украины,  
Украина, 61002, г. Харьков, ул. Краснознаменная, 4  
E-mail: rash@ira.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 14 марта 2001 г.*

В статье описывается методика подбора моделей, используемая для интерпретации структуры источников в декаметровом диапазоне радиоволн. Изображение представлено как сумма эллиптических компонентов с гауссовым распределением яркости; их положение, интенсивность, наклон, размер и соотношение осей подбираются при моделировании. Для согласования моделей и экспериментальных данных использован критерий  $\chi^2$ . Приводятся основные расчетные соотношения, алгоритмы подбора моделей, способы группировки и отбора решений, методика расчета ошибок. Особенности подбора модели распределения яркости по модулям функций видности, измеренным с помощью системы интерферометров УРАН, показаны на примере радиогалактики 3C338.

У роботі описано методику підбору моделей, яка використовується для інтерпретації структури радіоджерел у декаметровому діапазоні хвиль. Зображення представлено як сума еліптичних компонентів з гаусовим розподілом яскравості; їх положення, інтенсивність, нахил, розмір та співвідношення осей підбираються при моделюванні. Для узгодження моделі та експериментальних даних застосовується критерій  $\chi^2$ . Наводяться основні розрахункові співвідношення, алгоритми підбору моделей, способи групування та відбору рішень, методика розрахунку помилок. Особливості підбору моделі розподілу яскравості по модулях функції видності, що були виміряні за допомогою системи інтерферометрів УРАН, показані на прикладі радіогалактики 3C338.

### Введение

Целью проведения интерферометрических исследований радиосточников обычно является определение функций видности и восстановление по ним углового распределения яркости объектов. Напомним, что функция видности пропорциональна двумерному преобразованию Фурье распределения яркости источника. При хорошем заполнении  $UV$ -плоскости, т. е. при достаточно полном знании функции

видности, распределение яркости может быть восстановлено посредством обратного преобразования Фурье.

Описанная в цикле работ [1-3] система интерферометров дает слабое заполнение  $UV$ -плоскости из-за малого количества образующих ее инструментов и небольшой эффективной площади антенн УРАН, что делает возможным получение интерференционных сигналов только от тех пар антенн, в которые входит наибольшая из них – плечо север-юг

\*Эта работа – четвертая из цикла статей, посвященных описанию системы декаметровых интерферометров УРАН – аппаратуры, методики измерений и обработки данных.

радиотелескопа УТР-2. Эта особенность системы, не допускающая замыкания фаз, а также существенное на декаметровых волнах влияние среды распространения приводят к большим затруднениям при определении фазы функции видности. В настоящее время, как указывалось в [2], при наблюдениях источников определяются лишь амплитуды функции видности. Это делает применение обратного преобразования Фурье для получения карт объектов весьма проблематичным.

Альтернативным способом интерпретации полученных функций видности является сравнение их с расчетными зависимостями, вычисленными для некоторых физически обоснованных моделей источника. Параметры моделей подбираются таким образом, чтобы получить наилучшее согласие расчетных и измеренных зависимостей, а изображение источника затем описывается в терминах подобранной модели. Модельная аппроксимация распределения яркости широко практиковалась на ранних этапах развития радиоинтерферометрии (см., например, [4]), особенно в отсутствие достаточных данных для выполнения преобразования Фурье. Метод применяется и в настоящее время, например, при интерпретации данных оптической интерферометрии или для обнаружения и исследования изменений структуры источника в зависимости от времени или частоты [5].

В качестве составляющих модели распределения яркости удобны гауссовы компоненты. Они всегда положительны и плавно меняются в зависимости от угла. Последнее характерно также для структуры многих радиоисточников. Однако, как указывалось в [6], нужно иметь в виду, что единственной связью между найденной моделью и истинным распределением яркости является лишь то, что они имеют одинаковый (в пределах ошибок наблюдений) отклик на исследуемом участке  $UV$ -плоскости.

Следует отметить, что точность, с которой модель представляет источник, зависит от степени разрешения. Для слабо разрешенных источников можно указать лишь эквивалентный диаметр симметричной гауссовой модели. В большинстве же случаев такая простейшая модель плохо описывает истинную форму ис-

точника. При большем разрешении и хорошо выраженных часовых зависимостях функций видности можно подобрать более сложные модели, точнее описывающие истинное распределение яркости источника.

Описанию методики подбора моделей для интерпретации данных, полученных при исследовании радиоисточников с помощью системы УРАН, и посвящена настоящая работа.

### 1. Основные расчетные соотношения

Рассмотрим многоэлементный интерферометр, в котором имеется пара антенн. Одной присвоен номер  $n$ , а второй –  $m$ . Как известно, комплексный отклик такого двухэлементного интерферометра на источник, имеющий распределение яркости  $F(\alpha, \delta)$ , определяется соотношением [7]:

$$i_{nm}(T^h) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\text{эфф}}(\alpha, \delta, T^h) F(\alpha, \delta) e^{-ik(\alpha, \delta) \mathbf{B}_{nm}(T^h)} d\alpha d\delta, \quad (1)$$

где  $T^h$  – часовой угол центра площадки (зависящий, в свою очередь, от текущего времени), на которой расположен исследуемый объект (рис. 1);  $A_{\text{эфф}}(\alpha, \delta, T^h)$  – эффективная

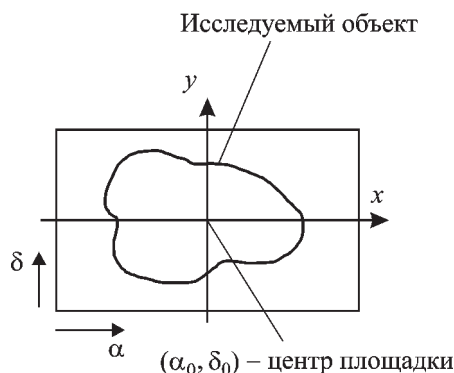


Рис. 1. Расположение исследуемого объекта на небесной сфере и соответствующие системы координат

площадь интерферометра;  $\mathbf{k}(\alpha, \delta)$  – волновой вектор падающего поля ( $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны);  $\alpha$  и  $\delta$  – соответственно прямое восхождение и склонение излучающей точки источника;  $\mathbf{B}_{nm}$  – вектор базы интерферометра. Ниже через  $\alpha_0$  и  $\delta_0$  обозначены координаты центра площадки.

Как указывалось ранее, интерферометры УРАН измеряют только модуль функции видности  $\gamma(T^h)$ :

$$\gamma(T^h) = \left| \dot{\gamma}(T^h) \right| = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\text{эфф}}(\alpha, \delta, T^h) F(\alpha, \delta) e^{-i\mathbf{k}(\alpha, \delta) \mathbf{B}_{nm}(T^h)} d\alpha d\delta}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\text{эфф}}(\alpha, \delta, T^h) F(\alpha, \delta) d\alpha d\delta} \right|. \quad (2)$$

Раскрывая скалярное произведение  $\mathbf{k}(\alpha, \delta) \mathbf{B}_{nm}(T^h)$ , можно показать, что для рассматриваемой площадки малых угловых размеров<sup>1</sup> (в пределах которой можно считать  $A_{\text{эфф}}$  не зависящим от  $\alpha$  и  $\delta$ , а вне ее –  $F(\alpha, \delta) = 0$ )

$$\gamma(T^h) = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(xU_{nm} + yV_{nm})} dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx dy} \right|, \quad (3)$$

где  $x = (\alpha - \alpha_0) \cos \delta_0$  и  $y = \Delta\delta = \delta - \delta_0$  – новые координаты излучающей точки (появление множителя  $\cos \delta_0$  связано с выравниванием видимых угловых размеров вдоль осей

<sup>1</sup>Отказ от учета в (3) третьей пространственной компоненты  $W_{nm}$  [7] (или, что то же самое, членов высших степеней  $x, y$ ) приводит для системы УРАН к несущественно малым погрешностям фаз, не превышающим в худшем случае  $4^\circ$ .

$\alpha$  и  $\delta$ , как это обычно делается на картах объектов);  $U_{nm}$  и  $V_{nm}$  – общепринятые обозначения для пространственных частот [7]:

$$U_n = R_n \cos \varphi_n \sin T_n^h, \\ V_n = R_n (-\sin \delta_0 \cos \varphi_n \cos T_n^h + \cos \delta_0 \sin \varphi_n), \quad (4)$$

$$U_{nm} = U_n - U_m, \quad V_{nm} = V_n - V_m,$$

$$T_n^h = T_0^h - (\lambda_0 - \lambda_n)/1.00274.$$

В этих соотношениях принято, что  $n$ -я антенна находится в точке на поверхности Земли с широтой  $\lambda_n$ , долготой  $\varphi_n$  и расстоянием до центра Земли  $R_n$ , а центр системы (относительно которого отсчитывается текущий часовой угол  $T_0^h$  центра площадки) имеет широту  $\lambda_0$  – в системе УРАН таким центром условно считается телескоп УРАН-1.

Как указывалось выше, в качестве составляющих модели распределения яркости удобно использовать набор отдельных компонентов – источников разной интенсивности и разных угловых размеров с гауссовым распределением яркости. При этом компоненты в общем случае эллиптические и характеризуются произвольным позиционным углом. Тогда входящие в (3) интегралы могут быть вычислены аналитически.

Для получения соответствующих соотношений рассмотрим распределение яркости наклонного эллиптического гауссового источника. Геометрия задачи показана на рис. 2. Эллипс на этом рисунке – сечение гауссоиды на некотором уровне,  $a_0$  и  $b_0$  – размеры его осей,  $\theta$  – угол поворота эллипса.

Исходное распределение яркости в координатах  $x', y'$  имеет вид:

$$F(x', y') = e^{-\beta^2 \left( \frac{x'^2}{a_0^2} + \frac{y'^2}{b_0^2} \right)}, \quad (5)$$

где  $\beta = 2\sqrt{\ln 2}$  при определении ширины гауссового источника на уровне половины максимальной яркости.

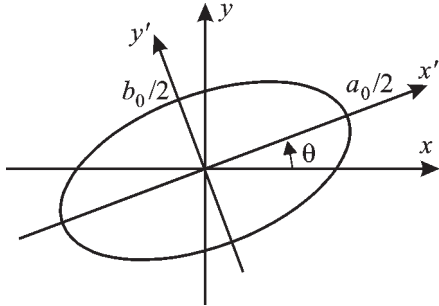


Рис. 2. Учет поворота компонента модели источника

Переходя к координатам  $x, y$  с использованием выражения для поворота координат

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' = y \cos \theta - x \sin \theta, \end{cases}$$

соотношение (5) приводим к виду

$$F(x, y) = e^{-\beta^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{2rxy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} \right)}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \left( \frac{\cos^2 \theta}{a_0^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b_0^2} \right)^{-1/2}, \\ b &= \left( \frac{\sin^2 \theta}{a_0^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b_0^2} \right)^{-1/2}, \\ r &= ab \cos \theta \sin \theta \left( \frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Числитель (3) для модели, состоящей из  $L$  таких компонентов, смещенных по осям  $x$  и  $y$  на  $x_l$  и  $y_l$  соответственно ( $l = 1, \dots, L$ ) и имеющих амплитуду  $A_l$ , определится как

$$I_0 = \sum_{l=1}^L A_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 \left( \frac{x^2}{a_l^2} + \frac{2r_l xy}{a_l b_l} + \frac{y^2}{b_l^2} \right) - i \frac{2\pi}{\lambda} [U_{lm}(x+x_l) + V_{lm}(y+y_l)]} dx dy.$$

Преобразуя показатель степени подынтегрального выражения, последовательно выделяя полные квадраты, с учетом соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ получим:}$$

$$\begin{aligned} I_0 &= \pi \sum_{l=1}^L A_l \frac{a_l b_l}{\sqrt{1-r_l^2}} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} (U_{lm} x_l + V_{lm} y_l)} \times \\ &\times e^{-\frac{\pi^2}{\lambda^2 \beta^2 (1-r_l^2)} [a_l^2 U_{lm}^2 - 2a_l b_l U_{lm} V_{lm} r_l + b_l^2 V_{lm}^2]}. \end{aligned}$$

Обозначив через  $S_l$  полный поток  $l$ -го компонента

$$S_l = \pi A_l \frac{a_l b_l}{\sqrt{1-r_l^2}},$$

вместо (3) получаем окончательное соотношение для расчетного отклика интерферометра на модельный источник как функции часового угла:

$$\begin{aligned} \gamma_p(T_0^h) &= \\ &= \left| \frac{\sum_{l=1}^L S_l e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} (U_{lm} x_l + V_{lm} y_l)} e^{-\frac{\pi^2}{\lambda^2 \beta^2 (1-r_l^2)} [a_l^2 U_{lm}^2 - 2a_l b_l U_{lm} V_{lm} r_l + b_l^2 V_{lm}^2]}}{\sum_{l=1}^m S_l} \right|. \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что соотношения (3) и (8) нечувствительны к одновременной замене  $x \rightarrow -x$  и  $y \rightarrow -y$  или произвольному сдвигу центра площадки. Это означает, что в отсутствие измерений фазы функции видности заведомо невозможно определить абсолютные координаты компонентов и разрешить неопределенности в повороте всего источника на  $180^\circ$  [7].

## 2. Алгоритмы подбора моделей

В результате предварительных этапов обработки наблюдательных данных, полученных в течение ряда дней на системе УРАН, находятся значения функции видности в диапазоне часовых углов  $T_{0j}^h = \pm 240$  мин с интервалом 20 мин (индекс “0” по-прежнему обозначает, что это часовой угол центра системы, а  $j$  – номер часового угла). В ряде случаев, особенно для источников, расположенных низко над горизонтом, из-за ограничения области обзора радиотелескопов диапазон часовых углов может уменьшаться. После усреднения данных за эти дни получают отсчеты часовой зависимости  $\hat{\gamma}_\alpha(T_{0j}^h)$  и ошибки, характеризующие их разброс  $\sigma_{\gamma_j}$ . Как правило, такие зависимости определяются на нескольких частотах для различных интерферометров [8]. Таким образом, появляется возможность сравнить экспериментальные данные с результатами модельного расчета (8) и подобрать наилучшую модель источника.

Для процедуры подбора следует определить критерий соответствия модели набору экспериментальных данных. В качестве такой меры близости нами используется стандартный критерий  $\chi^2$  [9]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[\hat{\gamma}_{\alpha i}(T_{0i}^h) - \gamma_{\alpha i}(T_{0i}^h)]^2}{\sigma_{\gamma_i}^2(T_{0i}^h)}, \quad (9)$$

где  $N$  – число независимых измерений средневзвешенных значений модуля функции видности  $\hat{\gamma}_{\alpha i}$ , а  $\gamma_{\alpha i}$  определяется из соотношения (8).

Подбирая параметры модели, можно изменять  $\gamma_{\alpha i}$  и минимизировать величину  $\chi^2$ . Достоверными считаются модели, которым соответствует минимум  $\chi^2$ . При этом полученная величина  $\chi^2$  должна попадать в доверительный интервал (например, 90 %) плотности распределения вероятности  $W_q(\chi^2)$ . Здесь  $q$  – число степеней свободы в данной модели,  $q = N - 1 - p$ ,  $p$  – число, равное для линейной модели<sup>2</sup> числу ее свободных параметров. Так как используемые в моделировании выражения существенно нелинейны, то это число можно определить только приблизительно. Однако знание точного значения  $p$  и не требуется, т. к. при больших  $N$  ошибки его определения слабо сказываются на полученных уровнях достоверности.

Отметим, что с точностью до постоянного множителя к соотношению (9) приводят и другие методы оптимизации, такие как метод максимального правдоподобия или метод наименьших квадратов. Однако критерий  $\chi^2$ , во-первых, дает численную меру достоверности полученного совпадения модели с экспериментом, а во-вторых, работает и при малом числе степеней свободы.

Рассмотрим, какими параметрами характеризуется используемая модель источника, состоящего из  $L$  гауссовых компонентов. Для каждой детали можно определить шесть параметров:

- смещение относительно центра площадки по  $x_i$  и  $y_i$  (вдоль осей  $\alpha$  и  $\delta$  соответственно);
- угол наклона эллипса  $\theta_i$  и его размеры  $a_i$  и  $b_i$  по осям  $x$  и  $y$  либо, что несколько удобнее для расчетов, отношение осей  $\mu_i = a_i/b_i$  и средний диаметр компонента  $d_i = \sqrt{a_i b_i}$ ;
- поток  $S_i$ .

Как указывалось выше, при использовании для расчетов только модулей функции видности начало координат на исследуемой площадке неба выбирается произвольно и его удобно со-

<sup>2</sup>Модель, для которой подбираемая функция – в нашем случае это  $\gamma_{\alpha i}$  – линейно зависит от каждого из варьируемых параметров, и ее общее приращение есть сумма приращений от изменений каждого из параметров.

вместить с координатами, например, первого компонента, т. е. положить  $x_1 = y_1 = 0$ . Кроме того, обычно по результатам наблюдений на радиотелескопе УТР-2 известен полный поток всего источника  $S^0$  на данной частоте. Тогда поток одного из компонентов (например, первого) не является независимым параметром и

может быть определен как  $S_1 = S^0 - \sum_{l=2}^L S_l$ . Таким образом, общее количество свободных параметров модели  $p$  достигает величины  $6L - 3$ .

Очевидно, для ряда источников нет необходимости использовать все перечисленные параметры. Так, если заранее известно, что какой-то компонент не разрешен на данной базе, то исключаются параметры, связанные с размером и углом поворота этой детали, а используемый алгоритм и программа допускают выборочную блокировку изменения любых параметров.

Тем не менее общее количество свободных параметров модели обычно достаточно велико, и прямой перебор всех возможных вариантов требует очень больших затрат времени, хотя только этот метод гарантирует, что абсолютный минимум  $\chi_{\min \min}^2$  будет обязательно найден. При всех остальных методах поиска возможен случай, когда будут получены лишь локальные минимумы  $\chi^2$ , а  $\chi_{\min \min}^2$  пропущен. Таким образом, результат поиска носит вероятностный характер.

Учитывая изложенное, к алгоритму предъявлялись следующие требования:

- малая вероятность пропустить  $\chi_{\min \min}^2$ ;
- возможность не ограничиваться первым найденным оптимумом и получать некоторый набор минимумов, из которых можно выбрать наиболее соответствующий представлениям о физической природе данного объекта;
- получение результатов расчета за приемлемое время.

Существует достаточно много различных способов поиска экстремумов многомерных функций. Однако в чистом виде ни один из них не привел к желаемым результатам. Мы остановились на следующем комбинированном варианте поиска: на первом этапе находится предварительное решение в классе пробных функ-

ций с круговым гауссовым распределением яркости, на втором – это решение уточняется при помощи более сложных функций.

На первом этапе применяется метод простого перебора, для чего задается сетка значений с заданным шагом по координатам  $x_l$ ,  $y_l$ ,  $d_l$  и  $S_l$ . В каждом узле этой сетки  $x_l$ ,  $y_l$ ,  $d_l$  при  $\mu_l = 1$ ,  $\theta_l = 0$  по формуле (9) вычисляется набор  $\chi^2$  для всех значений  $S_l$  и из них выбирается оптимум. Если он ниже некоторого заданного порога, осуществляется переход ко второму этапу, на котором производится уточнение всех параметров модели. Для уточнения применяется один из вариантов метода прямого поиска [9]. Один из параметров изменяется на заданную величину в обе стороны от полученного ранее оптимального значения. Если  $\chi^2$  при этом больше предыдущего оптимума, это значение отвергается, а если меньше, то оно считается новым оптимумом. Затем аналогичная процедура выполняется со следующей переменной, пока все параметры не будут перебраны. Процесс многократно повторяется, пока значение  $\chi^2$  не перестает меняться. Далее шаг по всем параметрам уменьшается, и поиск минимума повторяется. Процедура завершается, когда шаг изменения параметров достигнет заданного (достаточно малого) значения. После этого считается, что уточнение оптимума завершено, и происходит возврат к первому этапу – переход к следующему узлу сетки  $x_l$ ,  $y_l$ ,  $d_l$ . При необходимости помимо описанного алгоритма уточнения применяется и другой, более сложный метод, отличающийся повышенной точностью, но требующий большего времени, – комбинация по координатного спуска с методом оврагов.

Так как уточнение оптимума ведется по всем возможным узлам сетки  $x_l$ ,  $y_l$ ,  $d_l$ , то весьма высока вероятность, что будут выявлены все возможные оптимумы  $\chi^2$ . В то же время, когда перебор по сетке потоков  $S_l$  ведется в последнюю очередь, часть промежуточных коэффициентов в (8) рассчитывается при заданной комбинации  $x_l$ ,  $y_l$ ,  $d_l$  только один раз, что существенно ускоряет выполнение этой части алгоритма.

Если число компонентов модели больше трех, то первый этап все равно занимает слишком много времени. В этом случае параметры  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $d_i$  выгодно менять случайным образом, используя метод Монте-Карло [10]. Уточнение же параметров, как и ранее, ведется описанными выше методами. Очевидно, что чем больше будет выполнено попыток, тем выше вероятность того, что найдены все минимумы  $\chi^2$ .

### 3. Устранение неоднозначности решений

Метод подбора моделей, особенно при ограниченном наборе часовых углов, часто не дает единственного решения. Для успешного поиска минимума  $\chi^2$  весьма важно выбрать удачное начальное приближение для искомой модели, которое к тому же позволяет сузить область поиска возможных решений и, следовательно, значительно сократить время счета. Ранее с этой целью применялся анализ часовых зависимостей и треков на  $UV$ -плоскости. Так, по расположению максимумов и минимумов функции видности можно, например, для двухкомпонентного источника, определить разнос компонентов и позиционный угол [4], а затем уточнить модель, подбирая параметры и минимизируя значение  $\chi^2$ . В случае слабо выраженных часовых зависимостей или источников с более сложной структурой часто можно воспользоваться априорной информацией о структуре исследуемого объекта в другом диапазоне длин волн. Как правило, на соответствующих картах удастся выделить основные детали объекта и на основании этих данных определить начальное приближение модели источника. И хотя зачастую в декаметровом диапазоне параметры модели существенно меняются, тем не менее область поиска определяется достаточно точно.

Однако даже при хорошем начальном приближении в результате расчета, как правило, получается достаточно много локальных оптимумов, большую часть которых невозможно отбраковать по критерию  $\chi^2$ , так как все они попадают в заданный доверительный ин-

тервал. (Это связано с тем, что из-за слабого заполнения  $UV$ -плоскости и больших ошибок измерений многомерная поверхность  $\chi^2$  является слегка шероховатой.) В то же время при анализе видно, что многие из полученных оптимумов относятся к одним и тем же решениям, которые в многомерном пространстве параметров образуют явные скопления. Ручная сортировка решений очень затруднена, поэтому к анализу был привлечен аппарат кластерного анализа, адекватный задаче.

Для использования этого метода необходимо, чтобы пространство параметров было метрическим, т. е. была определена мера расстояния в этом пространстве. Так как значения параметров существенно отличаются друг от друга и имеют разную размерность (аффинное пространство), то для приведения к метрическому пространству каждая из координат (обозначим их через  $t_j$ ) предварительно подвергается преобразованию, нормирующему ее к безразмерному интервалу (0,1):

$$t_j \rightarrow t'_j = \frac{t_j - t_{j\min}}{t_{j\max} - t_{j\min}}, \quad (10)$$

где  $t_{j\min}$  и  $t_{j\max}$  — соответственно минимальное и максимальное значения параметра  $t_j$  по всем полученным вариантам решений. Затем определяются параметры кластеров.

Дополнительную сложность создает также цикличность угловых параметров  $\theta$ . Если все  $\theta$  приведены к интервалу  $\pm 90^\circ$ , то решения, соответствующие, например,  $\theta = +89^\circ$  и  $\theta = -89^\circ$ , неправомерно отнесены к разным кластерам. Эту трудность удастся преодолеть, предварительно построив гистограмму распределения  $\theta$  и сместив интервал значений  $\theta$  так, чтобы его разрыв попадал на минимум гистограммы.

После выделения кластеров обычно остается несколько вероятных решений. При этом часть отобранных вариантов, возможно, совпадает с другими, повернутыми на  $180^\circ$ . Выбор между оставшимися решениями может быть сделан с привлечением дополнительных физических соображений о структуре исследу-

емого объекта или, если последних недостаточно, приходится проводить дополнительные измерения для уменьшения ошибок определения исходных данных. Кроме того, возможно, что использована слишком сложная модель и она имеет слишком много варьируемых параметров – т. е. имеет место попытка получить больше результатов, чем обеспечивается имеющимися данными.

Как известно, увеличение количества баз, на которых производятся наблюдения, позволяет уменьшить неоднозначность решения данной задачи<sup>3</sup>. Одним из способов улучшения заполнения *UV*-плоскости является использование многочастотных измерений. При этом предполагается, что структура источника не зависит от частоты в пределах диапазона измерений. Такой подход позволяет подобрать модель даже при слабо выраженном изменении модуля функции видности от часового угла на каждой из частот. Полезным он оказывается и в случае, когда данных на одной из частот оказывается недостаточно, чтобы построить сколько-нибудь достоверную модель для отдельной частоты. Подобные случаи нередки в декаметровом диапазоне, особенно в его длинноволновой части, где сильнее проявляется влияние помех и неоднородностей среды распространения радиоволн.

Однако постулируемая независимость модели от частоты в каждом конкретном случае нуждается в проверке, тем более что различные эффекты распространения, поглощения, рассеяния радиоволн особенно существенно проявляются на низких частотах и могут существенно влиять на изменение структуры источника с частотой. При этом могут изменяться как положения компонентов, так и другие их характеристики. Так, например, при исследовании угловой структуры пульсара PSR1937+214 удалось согласовать измеренные и расчетные зависимости на частотах 20 и 25 МГц, только предположив увеличение размеров компактного компонента с понижением частоты.

<sup>3</sup>Критерием значимости изменения базы (в терминах обратного двумерного преобразования Фурье) является, очевидно, переход трека в другую ячейку *UV*-плоскости, т. е. на величину, обратно пропорциональную размеру исследуемой площадки.

В используемой методике предусмотрена возможность изменения модели с частотой. При этом для каждого компонента могут вводиться следующие дополнительные параметры:

– Увеличение среднего диаметра компонента на низкой частоте  $e_l$ , т. е. размер на более низкой частоте  $d_{lf_2} = d_l + e_l$ . При большем числе наблюдаемых частот можно задать более сложный (например, степенной) закон изменения размера от частоты, однако также зависящий только от одного параметра;

– Спектральный индекс каждого компонента  $\alpha_l$ . При этом на произвольной частоте поток этого компонента при степенном характере спектра определяется как  $S_{lf} = S_l (f/f_1)^{-\alpha_l}$ ;

– Изменение координат компонентов.

Очевидно, что подбор модели с использованием данных, полученных на нескольких частотах, имеет смысл лишь в том случае, если либо не все параметры зависят от частоты, либо изменения с частотой невелики или подчиняются какому-либо закону – универсальному хотя бы для части компонентов. В противном случае многочастотный расчет по результатам ничем не отличается от независимого подбора на каждой из частот.

#### 4. Точность подбора моделей

Для оценки качества полученного решения необходимо определить возможные погрешности значений параметров оптимальной модели. К сожалению, обычные методы не позволяют сколько-нибудь надежно связать возможные вариации полученных координат оптимума с ошибками экспериментальных значений  $\hat{\gamma}_p$  (хотя и есть возможность по значениям производных  $\chi^2$  определить, к каким параметрам модель более чувствительна).

В связи с этим нами используется следующая численная процедура.

После определения параметров модели находится расчетная зависимость  $\gamma_p(T_{0i}^h)$ . Затем в каждой точке к значению  $\gamma_p(T_{0i}^h)$  добавляется независимый отсчет нормального случайного шума с нулевым средним и дис-



персией, равной ошибке в этой точке, –  $\sigma_{\gamma_i}(T_{0i}^h)$ . Очевидно, после повторного поиска оптимума (после описанного выше уточнения модели) параметры несколько изменяются. Если такую процедуру повторить достаточное число раз с разными реализациями шума, то можно вычислить дисперсию изменений каждого параметра. Если параметры шума в эксперименте определены корректно, то полученные дисперсии являются оценками ошибок всех параметров. При этом очевидно, что чем чувствительней величина  $\chi^2$  в точке оптимума к изменению какого-либо параметра, тем точнее он будет определен и тем меньше будет его ошибка. Как показывают расчеты, ошибки по разным параметрам (даже одноименным параметрам разных компонентов) существенно отличаются. Последнее обстоятельство усугубляется, в частности, существенной нелинейностью используемой модели.

Отметим, что полученные значения ошибок параметров неплохо согласуются с размерами соответствующих кластеров решений, что служит дополнительным критерием правильности выделения кластеров, а также свидетельствует о корректности вычисления ошибок.

### 5. Пример подбора модели распределения яркости

В качестве примера использования предложенной методики приведем исследование структуры радиогалактики 3С 338, наблюдавшейся интерферометрами УРАН-1 и УРАН-2 на частотах 20 и 25 МГц.

На рис. 3 показаны часовые зависимости модуля функции видности. Рис. 3, а соответствует зависимости  $\gamma_s(T^h)$  для частоты 20 МГц на интерферометрах УРАН-1 (квадраты) и УРАН-2 (окружности), рис. 3, б – зависимости  $\gamma_s(T^h)$  на частоте 25 МГц. Эти экспериментальные данные показаны как точки с разбросами, соответствующими ошибке  $\pm\sigma_{\gamma_i}(T_0)$ . Видно, что данные имеют существенные ошибки, особенно для УРАН-1 на часовых углах  $> 120$  мин, а изменения функ-

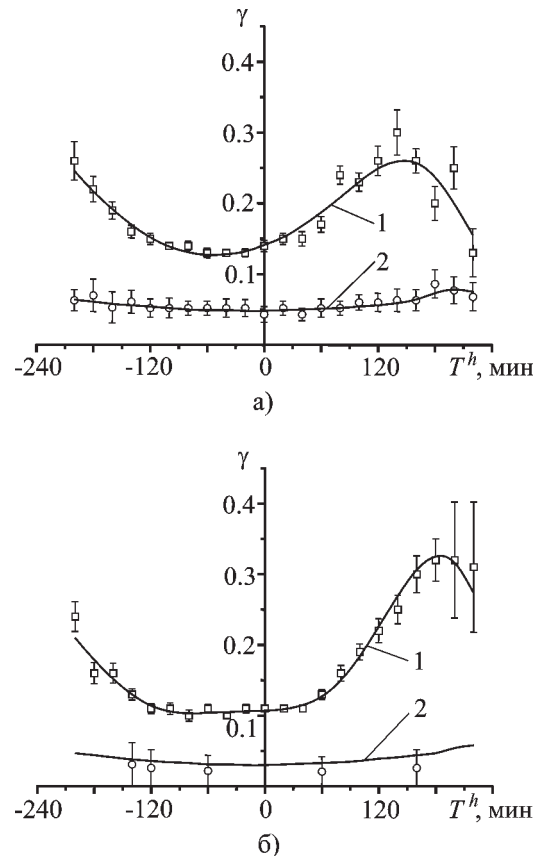
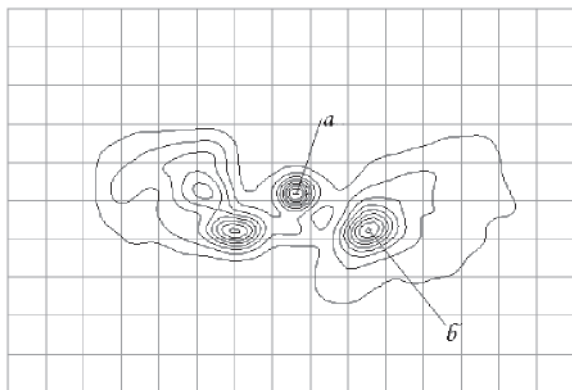


Рис. 3. Экспериментальные зависимости функции видности квазара 3С 338, полученные на системе УРАН, и ее расчетные зависимости для оптимальной трехкомпонентной модели

ции видности не очень ярко выражены. В то же время на высоких частотах исследуемый источник имеет относительно сложную структуру. Карта его изофот, построенная по данным обзора FIRST (который выполнен на частоте 1400 МГц с использованием системы апертурного синтеза VLA), показана на рис. 4. Шаг сетки на этом рисунке равен  $10''$  по обеим координатам. Изофоты проведены на уровнях от  $0.1F_{\max}$  до  $F_{\max}$  с шагом, равным  $0.1F_{\max}$  ( $F_{\max}$  – максимальная яркость). Дополнительная самая слабая изофота соответствует уровню  $0.05F_{\max}$ .

На основе высокочастотной карты были рассчитаны часовые зависимости для интерферометров с базами протяженностью 737 м и 590 м вдоль параллели, т. е. имеющих на



**Рис. 4.** Высокочастотная контурная карта квазара 3C 338

частоте 1400 МГц такое же угловое разрешение, как УРАН-1 на частотах 25 и 20 МГц. Оказалось, что эти часовые зависимости могут быть с хорошим приближением объяснены идеализированной моделью радиоисточника, состоящей всего из двух протяженных компонентов, которые совпадают с областями низкой поверхностной яркости на карте. Добавление третьего компонента, моделирующего компактную деталь в ядре галактики, дало еще лучшее согласие расчетных зависимостей на основе карты и модели. В то же время эти отклики совершенно не соответствовали данным низкочастотных наблюдений. Тем не менее такая процедура ограничила круг моделей, среди которых проводился подбор для декаметрового диапазона, и сузила сектор поиска по параметрам модели. При этом расчеты проводились как для двух-, так и для трехкомпонентных моделей.

В расчетах двухкомпонентной модели варьировались все перечисленные выше параметры компонентов, кроме спектральных индексов, но из-за заведомого отсутствия в модели компонентов малых размеров, которые могли бы объяснить данные УРАН-2, использовались только первичные данные интерферометра УРАН-1. В результате было получено два решения с одинаковыми параметрами, повернутые друг относительно друга на  $180^\circ$ , которые неплохо удовлетворяют данным на рис. 3. Для них  $\chi^2 \approx 36$ , что при

$N = 44$  и  $p = 11$  соответствует вероятности  $W_{32}(\chi^2 < 36) = 0.73$ . Хотя такое значение  $W$  попадает в заданный 90 %-й доверительный интервал, оно довольно велико и внушает некоторое недоверие к модели, тем более что последняя плохо соответствует высокочастотной карте.

Расчеты в рамках трехкомпонентной модели велись уже с привлечением всех первичных данных. Использовались те же параметры для всех трех компонентов, кроме уширения компактного третьего компонента на низкой частоте. Количество полученных кластеров решений в этом варианте возросло до пяти, причем все они имели близкие значения  $\chi^2$  при высоких уровнях достоверности. Проведенное сравнение с высокочастотной картой показало, что три решения кардинально отличаются от нее. Одно из оставшихся решений близко к упоминавшемуся выше двухкомпонентному. Другое отличается меньшим разномом компонентов и большей их вытянутостью. Параметры полученных моделей и их ошибки приведены в табл. 1 и табл. 2, а соответствующие контурные карты, выполненные в том же масштабе, что и рис. 4, показаны на рис. 5, а и рис. 5, б.

Главным отличием этих двух моделей является положение компактного компонента по отношению к протяженным. Протяженные компоненты первой модели (рис. 5, а) удовлетворительно совпадают с “ушами” высокочастотного изображения только при совмещении компактного компонента с локальным центром яркости (“б” на рис. 4) в западной протяженной детали высокочастотной карты источника. Отсутствие в модели компонента, связанного с компактной деталью “а”, хорошо согласуется с плоским спектром этой детали, так что она не должна быть в данном случае видна на низких частотах.

Во второй модели (рис. 5, б) компактный компонент должен быть совмещен с деталью “а”, при этом протяженные компоненты значительно лучше совпадают с “ушами” карты на рис. 4, чем для предыдущей модели. В этом случае в спектре детали “а” должен наблюдаться значительный подъем на низких частотах, что может соответствовать низкочастот-

**Таблица 1.** Параметры трехкомпонентной модели распределения радиояркости источника 3C 338, показанной на рис. 5, а

$l$	$x_l$	$y_l$	$d_l$	$\mu_l$	$\theta_l$	$e_l$	$S_l/S_0$
1	0	0	40"±0".9	1.2±0.09	-61°±35°	5"±2".3	0.45±0.12
2	94"±2".5	-29"±5".1	35"±0".9	1.4±0.04	-35°±13°	16"±1".6	0.40±0.11
3	28"±0".7	-10"±4".2	12"±1".0	1.1±0.2	-68°±44°	0	0.15±0.01

**Таблица 2.** Параметры трехкомпонентной модели распределения радиояркости источника 3C 338, показанной на рис. 5, б

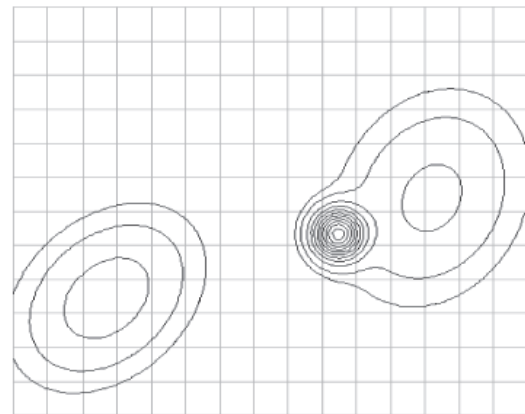
$l$	$x_l$	$y_l$	$d_l$	$\mu_l$	$\theta_l$	$e_l$	$S_l/S_0$
1	0	0	24"±3".9	3.1±0.28	-54°±4°	2"±1".5	0.4±0.06
2	62"±1".8	6"±3".9	36"±1".0	1.3±0.11	62°±8°	6"±1".2	0.49 ± 0.05
3	32"±1".3	-3"±4".5	9"±1".2	1.1±0.4	-24°±36°	0	0.11±0.01

ному гало с большим степенным индексом вокруг компактной детали, соответствующей центру оптической галактики. Такие особенности на низких частотах наблюдались нами ранее в структуре квазаров [11].

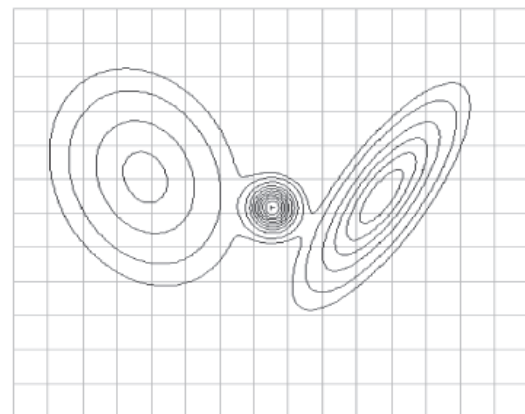
Выбор между двумя моделями можно было бы сделать, проведя дополнительные измерения в большем диапазоне часовых углов на интерферометре УРАН-1. Однако это трудно осуществить из-за существенного уменьшения эффективной площади антенн при больших отклонениях луча телескопа от зенита.

Расчетные зависимости функции видности  $\gamma_p(T^h)$  для модели на рис. 5, б, которая лучше совпадает с высокочастотной картой, показаны на рис. 3 сплошными линиями под номерами "1" для УРАН-1 и "2" для УРАН-2. Для этого решения  $\chi^2 \approx 39$ , что при  $N = 71$  и  $p = 17$  соответствует вероятности  $W_{53}(\chi^2 < 39) \approx 0.07$ . Отметим, что столь низкое значение  $\chi^2$ , по-видимому, объясняется некоторым завышением ошибок измерений, связанным со спецификой предшествовавшей обработки данных.

Таким образом, изложенная выше методика оказалась весьма эффективной и уверенно работает даже при сложной структуре исследуемого объекта и относительно низком качестве исходных данных. Написанные на ее основе программы обладают необходимой



а)



б)

**Рис. 5.** Представление оптимальной трехкомпонентной модели квазара 3C 338 в виде контурной карты

гибкостью (позволяют легко менять список варьируемых параметров) и работают достаточно быстро.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность академику НАН Украины С. Я. Брауде за постоянный интерес ко всем исследованиям, выполняемым на системе дециметровых интерферометров УРАН.

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS 97-1964 и проекта №2.04/0294 Украинского Государственного фонда фундаментальных исследований.

### Литература

1. А. В. Мень, С. Я. Брауде, С. Л. Рашковский и др. Радиофизика и радиоастрономия. 1997, **2**, №4, с. 385-401.
2. А. В. Мень, С. Л. Рашковский, В. А. Шепелев, А. С. Белов, В. В. Шевченко. Радиофизика и радиоастрономия. 1998, **3**, №3, с. 284-293.
3. С. Л. Рашковский. Радиофизика и радиоастрономия. 2000, **5**, №1, с. 20-28.
4. W. Donaldson, H. Smith. Mon. Not. R. Astr. Soc. 1971, **151**, pp. 253-258.
5. T. J. Pearson. Astronomical Society of the Pacific Conference Series. **82**, 1995, pp. 268.
6. P. Maltby, Alan T. Moffet. Astrophys. J. Suppl. 1962, **7**, pp. 141-163.
7. Р. Томпсон, Дж. Морган, Дж. Свенсон. Интерферометрия и синтез в радиоастрономии. Москва, Мир, 1989, 567 с.
8. А. В. Мень, С. Я. Брауде, С. Л. Рашковский и др. Изв. вузов. Радиофизика. 1995, **38**, №6, с. 511-521.
9. Д. Химмельблау. Анализ процессов статистическими методами. Москва, Мир, 1973, 957 с.
10. И. М. Соболев. Численные методы Монте-Карло. Москва, Наука, 1973, 311 с.
11. А. В. Мень, С. Я. Брауде, С. Л. Рашковский и др. Письма в астрономический журнал. 1996, **22**, №6, с. 428-433.

### URAN System of Decametric Interferometers (IV). Source Structure Model Fitting

A. V. Megn, S. L. Rashkovskiy, V. A. Shepelev

The model fitting method used for interpretation of source structure at the decameter wavelengths is described. The source image is presented as a number of elliptical components with Gaussian brightness distribution; their position, intensity, position angle, magnitude and axis ratio are adjusted in the course of model fitting. The  $\chi^2$ -criterion is used as a test of model consistency with observational data. The main computational relations, model fitting algorithms, means of grouping and selection of results, and the method of error calculation are presented. Peculiarities of the brightness distribution model fitting with the URAN-measured visibility function moduli are shown as an example for the radio galaxy 3C 338.