

О структуре решений задачи синтеза линейной антенны по заданной энергетической диаграмме направленности

П. А. Савенко

*Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины,
Украина, 79053, г. Львов, ул. Научная, 3-Б
E-mail: savenko@iapmm.lviv.ua*

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2000 г.

На примере задачи синтеза линейной антенны по заданной энергетической диаграмме направленности приводятся результаты исследования структуры и свойств решений нелинейного интегрального уравнения, являющегося уравнением Эйлера целевого функционала. На основании теории ветвления решений нелинейных уравнений получены уравнения для нахождения точек бифуркации, определены количество и характерные свойства существующих решений. Приведен численный пример решения задачи синтеза.

На прикладі задачі синтезу лінійної антени за заданою енергетичною діаграмою напрямленості наводяться результати дослідження структури і властивостей розв'язків нелінійного інтегрального рівняння, яке є рівнянням Ейлера цільового функціоналу. На основі теорії галуження розв'язків нелінійних рівнянь отримано рівняння для знаходження точок біфуркації, визначено кількість і характерні властивості існуючих розв'язків. Наведений чисельний приклад розв'язання задачі синтезу.

Введение

В литературе уделяется много внимания задачам синтеза антенн по заданной энергетической диаграмме направленности (ДН) (см., например, [1-3]). Исходя из требований практики, часто представляет интерес лишь мощность потока излучаемого электромагнитного поля, а к фазовым характеристикам поля требования не предъявляются. Характерной особенностью этого класса задач является неполнота исходных данных, что относит их к существенно некорректным нелинейным задачам [4, 5]. Для них наименее изученными остаются вопросы неединственности решений и их качественных характеристик.

В работе на примере задачи синтеза линейной антенны по заданной ДН по мощности излагается методика исследования количества и свойств существующих решений

с помощью теории ветвлений решений нелинейных уравнений [6].

1. Постановка обратной задачи. Существование решений

Известно [7], что ДН линейного излучателя длиной $2a$, направленного вдоль оси OZ и размещенного в неограниченном изотропном и однородном пространстве, описывается формулой

$$f(s) = AI \equiv \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_{-1}^1 I(z) e^{icz} dz, \quad (1)$$

где $I(z)$ – функция распределения тока; $s = \sin \vartheta' / \sin \alpha$ – обобщенная угловая координата

ната; $c = ka \sin \alpha$ – вещественный безразмерный параметр, характеризующий электрическую длину излучателя, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число в вакууме, λ – длина волны, 2α – угол, в котором необходимо сосредоточить максимальную долю излучаемой мощности. Углы ϑ' , α отсчитываются от плоскости XOY . ДН по мощности определяется выражением: $N(s) = |AI|^2 \equiv |f(s)|^2$. Формулу (1) будем рассматривать также как отображение из комплексного пространства квадратично интегрируемых функций $H_I = L_2[-1,1]$ в комплексное пространство $C[-1,1]$ непрерывных функций вещественного аргумента. Это отображение осуществляет линейный вполне непрерывный интегральный оператор A [8, 9].

В простейшем виде задача синтеза заданной ДН по мощности $N_0(s)$ сводится к нахождению решений нелинейного интегрального уравнения первого рода

$$|AI|^2 = N_0(s) \quad (s \in [-1,1]). \quad (2)$$

При этом заданная ДН может не принадлежать множеству значений нелинейного оператора $|AI|^2$, т. е. задача (2) является существенно некорректной нелинейной задачей [4]. Ниже мы будем находить квазирешения уравнения (2), используя соответствующую вариационную постановку задачи.

В пространстве $C[-1,1]$ наряду с чебышевской нормой $\|f\|_C = \max_{s \in [-1,1]} |f(s)|$ введем скалярное произведение и порождаемую им среднеквадратическую норму и метрику:

$$(f_1, f_2) \equiv \int_{-1}^1 f_1(s) \overline{f_2(s)} ds,$$

$$\|f\|_{H_f} = (f, f)^{1/2}, \quad (3)$$

$$\rho_{H_f}(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|_{H_f}.$$

Скалярное произведение и норма в пространстве $H_I = L_2[-1,1]$ определяются аналогично.

Сформулируем вариационную постановку задачи синтеза заданной ДН по мощности $N_0(s)$ как задачу минимизации функционала

$$\begin{aligned} \sigma_\beta(I) &= \|N_0 - |f|^2\|_{H_f}^2 + \beta \|I\|_{L_2}^2 \equiv \\ &\equiv \|N_0 - |AI|^2\|_{H_f}^2 + \beta \|I\|_{L_2}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

на гильбертовом пространстве $H_I = L_2[-1,1]$, где $\beta > 0$ – вещественный весовой параметр. Дифференцируя функционал (4) по Гато и полагая $D\sigma_\beta(I, \psi) \equiv 0$, где ψ – произвольный элемент пространства H_I , с учетом равенства (1) получаем уравнение Эйлера относительно оптимального тока:

$$I = \frac{2}{\beta} A^* (N_0 \cdot AI) - \frac{2}{\beta} A^* (|AI|^2 \cdot AI), \quad (5)$$

где A^* – оператор сопряженный с A :

$$A^* f \equiv \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_{-1}^1 f(s) e^{-ics} ds. \quad (6)$$

Поддействовав на обе части равенства (5) оператором A , получим эквивалентное уравнение относительно синтезируемой ДН в пространстве $C[-1,1]$:

$$f = B(f) \equiv \frac{2}{\beta} AA^* (N_0 \cdot f) - \frac{2}{\beta} AA^* (|f|^2 \cdot f). \quad (7)$$

Если найдено решение уравнения (7) f_* , то соответствующий ему ток определяется на основании равенства (5), если в его правой части положить $AI = f_*$.

Учитывая вид операторов (1), (6), получаем развернутую форму уравнений (5), (7)

в соответствующих пространствах:

$$I(z) = \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_{-1}^1 \left[\left[N_0(s) - \frac{c}{2\pi} \left| \int_{-1}^1 I(z') e^{icz's} dz' \right|^2 \right] \times \int_{-1}^1 I(z') e^{icz's} dz' \right] e^{-icz s} ds, \quad (8)$$

$$f(s) = \frac{2}{\beta} \int_{-1}^1 K(s,t;c) N_0(t) f(t) dt - \frac{2}{\beta} \int_{-1}^1 K(s,t;c) |f(t)|^2 f(t) dt, \quad (9)$$

где

$$K(s,t;c) = \frac{c}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{icz(s-t)} dz \equiv \frac{\sin c(s-t)}{\pi(s-t)}. \quad (10)$$

Уравнения (8), (9) являются нелинейными интегральными уравнениями, содержащими в правой части наряду с операторами типа Гаммерштейна линейные операторы. Уравнение (9) проще, чем уравнение (8), поскольку при его получении удастся в явном виде провести интегрирование (10). Поэтому ниже мы будем исследовать его решения.

Существование хотя бы одного решения уравнений (5), (8) в пространстве $H_I = L_2[-1,1]$ и уравнений (7), (9) в пространстве $C[-1,1]$ вытекает из следующей теоремы, которую мы приведем без доказательства.

Теорема. Пусть линейный оператор A отображает пространство $H_I = L_2[-1,1]$ в $C[-1,1]$ и является вполне непрерывным, $N_0(s)$ – заданная вещественная неотрицательная и непрерывная на отрезке $[-1,1]$ функция, причем $\|N_0(s)\|_C = \max_{s \in [-1,1]} N_0(s) = 1$.

Тогда в H_I существует хотя бы одна точка абсолютного минимума функционала $\sigma_\beta(I)$ и из всякой минимизирующей последовательности можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к одной из точек абсолютного минимума.

Поскольку $H_I = L_2[-1,1]$ является рефлексивным банаховым пространством [8], для доказательства теоремы достаточно показать [10] выполнение следующих условий:

- $\sigma_\beta(I)$ – слабо полунепрерывный снизу функционал,
- $\lim_{\|I\| \rightarrow \infty} \sigma_\beta(I) = +\infty$.

2. О структуре решений задачи

Рассмотрим структуру решений уравнения (9) в зависимости от величины параметра β . Для удобства исследований, используя равенство $f(s) = u(s) + iv(s)$, заменим уравнение (9) эквивалентной ему системой

$$u(s) = B_1(u, v) \equiv \frac{2}{\beta} \int_{-1}^1 K(s,t;c) N_0(t) u(t) dt - \frac{2}{\beta} \int_{-1}^1 K(s,t;c) [u^2(t) + v^2(t)] u(t) dt, \quad (11)$$

$$v(s) = B_2(u, v) \equiv \frac{2}{\beta} \int_{-1}^1 K(s,t;c) N_0(t) v(t) dt - \frac{2}{\beta} \int_{-1}^1 K(s,t;c) [u^2(t) + v^2(t)] v(t) dt.$$

Комплексное пространство $C[-1,1]$ будем рассматривать как топологическое произведение двух вещественных пространств непрерывных на $[-1,1]$ функций: $C[-1,1] = \tilde{C}[-1,1] \otimes \tilde{C}[-1,1]$, где $u(s) \in \tilde{C}[-1,1]$, $v(s) \in \tilde{C}[-1,1]$.

Очевидно, что при произвольном $\beta > 0$ одним из решений системы (11) является три-

виальное решение:

$$u(s) \equiv 0, \quad v(s) \equiv 0.$$

Вначале рассмотрим частный случай системы (11) в вещественном пространстве при $N_0(s) \equiv 1$. Система преобразуется к уравнению вида

$$u(s) = \mu \int_{-1}^1 K(s,t;c)u(t)dt - \mu \int_{-1}^1 K(s,t;c)u^3(t)dt, \quad (12)$$

где $\mu = 2/\beta$. Используя теорию ветвления решений нелинейных уравнений [6], найдем значения параметра $\mu_n = 2/\beta_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и все непрерывные, отличные от тривиального решения $\omega_n(s)$, удовлетворяющие условию:

$$\max_{s \in [-1,1]} |\omega_n(s)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta = \mu - \mu_n \rightarrow 0.$$

Согласно [6] точками ветвления уравнения (12) могут быть такие значения спектрального параметра

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} = \frac{\beta_n}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

которые являются собственными значениями линейного однородного уравнения

$$\lambda \varphi(s) = \int_{-1}^1 \frac{\sin c(s-t)}{\pi(s-t)} \varphi(t) dt. \quad (14)$$

Собственные функции уравнения (14) – вытянутые сфероидальные волновые функции нулевого порядка [7]:

$$\varphi_n(s) = S_{0n}(c, s) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Функции $S_{0n}(c, s)$ образуют полную ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку ядро $K(s, t; c)$ симметричное и положительное, собственные значения λ_n уравнения (14) являются вещественными и положительными. Они монотонно убывают с ростом n : $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$. Согласно (13) значения параметра $\beta_n = 2\lambda_n$, как возможные точки бифуркации уравнения (12), образуют также монотонно убывающую и стремящуюся к нулю последовательность: $\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \dots$.

2.1. Регулярный случай

Пусть $\tilde{\mu}$ не совпадает ни с одним из характеристических значений уравнения (14). Полагая

$$\mu = \tilde{\mu} + \eta, \quad u(s) = 0 + \omega(s),$$

преобразуем уравнение (12) к виду:

$$\begin{aligned} \omega(s) - \int_{-1}^1 \tilde{\mu} K(s,t;c) \omega(t) dt &= \\ &= \sum_{m+n \geq 2} \eta^n \int_{-1}^1 A_{mn}(s,t;c) \omega^m(t) dt, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$A_{11}(s,t;c) = K(s,t;c),$$

$$A_{30}(s,t;c) = -\tilde{\mu} K(s,t;c),$$

$$A_{31}(s,t;c) = -K(s,t;c).$$

Поскольку единица не является собственным значением линейного интегрального оператора, находящегося в левой части (15), существует резольвента Фредгольма $\Gamma(s, t; c)$ ядра $\tilde{\mu} K(s, t; c)$, с помощью которой уравнение (15) преобразуется к виду

$$\omega(s) = \sum_{m+n \geq 2} \eta^n \int_{-1}^1 g_{mn}(s,t;c) \omega^m(t) dt, \quad (16)$$

где

$$g_{mn}(s, t; c) = A_{mn}(s, t; c) + \int_{-1}^1 \Gamma(s, \tau; c) A_{mn}(\tau, t; c) d\tau.$$

Уравнение (16) является простейшим уравнением типа Ляпунова-Шмидта [6] и при достаточно малых фиксированных значениях $|\eta|$ имеет единственное непрерывное решение, которое представимо в виде равномерно сходящегося ряда:

$$\omega(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(s) \eta^j. \quad (17)$$

Для нахождения $a_j(s)$ воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Подставляя выражение (17) в уравнение (16), получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(s) \eta^j = \sum_{m+n \geq 2} \eta^n \int_{-1}^1 g_{mn}(s, t; c) \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) \eta^j \right)^m dt. \quad (18)$$

Сравнивая в равенстве (18) коэффициенты при одинаковых степенях η , получаем рекуррентные формулы для вычисления $a_j(s)$. Непосредственные вычисления показывают, что $a_j(s) \equiv 0$ ($j = 1, 2, 3, \dots$).

Таким образом, если параметр μ не совпадает ни с одним из характеристических значений уравнения (14), то нелинейное уравнение (12) имеет только тривиальное решение, а формула (17) дает его аналитическое продолжение в точку $\mu = \tilde{\mu} + \eta$.

2.2. Случай бифуркации решений

Пусть $\mu = \mu_n + \eta$, $\varphi_n(s) = S_{0n}(c, s)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) – ортонормированные собственные функции (здесь сохранены их прежние обозначения) интегрального уравнения (14), а μ_n – его характеристические значения. Поскольку кратность характеристических значений равна единице, имеем случай одно-

мерного ветвления [6]. Так как ядро $K(s, t; c)$ является вещественным и симметричным, то уравнение (14) совпадает с сопряженным ему. Собственные функции сопряженного уравнения обозначим: $\psi_n(s) = S_{0n}(c, s)$.

Прибавляя и вычитая из ядра линейного интегрального оператора в (12) выражение $[\psi_n(s)\varphi_n(t)]$, преобразуем уравнение (12) к виду:

$$\omega(s) - \int_{-1}^1 E(s, t; c) \omega(t) dt = \zeta \psi_n(s) + \sum_{m+l \geq 2} \eta^l \int_{-1}^1 A_{ml}(s, t; c) \omega^m(t) dt, \quad (19)$$

где $E(s, t; c) = \mu_n K(s, t; c) - \psi_n(s)\varphi_n(t)$,

$$\zeta = \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \omega(t) dt. \quad (20)$$

Согласно лемме Шмидта [6] существует резольвента Фредгольма $R(s, t; c)$ ядра $E(s, t; c)$, и уравнение (19) преобразуется к виду:

$$\omega(s) = \zeta \varphi_n(s) + \sum_{m+l \geq 2} \eta^l \int_{-1}^1 g_{ml}(s, t; c) \omega^m(t) dt, \quad (21)$$

где

$$\varphi_n(s) = \psi_n(s) + \int_{-1}^1 R(s, t; c) \psi_n(t) dt,$$

$$g_{ml}(s) = A_{ml}(s) + \int_{-1}^1 R(s, \tau; c) A_{ml}(\tau, t; c) d\tau.$$

Под знаком суммы в (21) отличны от нуля слагаемые, содержащие g_{11} , g_{30} , g_{31} . Урав-

нение (21) является простейшим. При достаточно малых фиксированных значениях $|\zeta|$ и $|\eta|$ оно имеет единственное непрерывное решение, которое представимо в виде равномерно сходящегося ряда

$$\omega(s) = \zeta \varphi_n(s) + \sum_{j+v \geq 2} a_{jv}(s) \zeta^j \eta^v \quad (22)$$

с непрерывными коэффициентами $a_{jv}(s)$. Подставляя выражение (22) в уравнение (21), методом неопределенных коэффициентов находим:

$$a_{20}(s) \equiv 0, \quad a_{02}(s) \equiv 0, \quad a_{03}(s) \equiv 0, \quad a_{21}(s) \equiv 0,$$

$$a_{04}(s) \equiv 0, \quad a_{22}(s) \equiv 0, \quad a_{40}(s) \equiv 0,$$

$$a_{11}(s) = \int_{-1}^1 g_{11}(s, t; c) \varphi_n(t) dt,$$

$$a_{12}(s) = \int_{-1}^1 g_{11}(s, t; c) a_{11}(t) dt,$$

$$a_{30}(s) = \int_{-1}^1 g_{30}(s, t; c) \varphi_n^3(t) dt,$$

$$a_{13}(s) = \int_{-1}^1 g_{11}(s, t; c) a_{12}(t) dt,$$

$$a_{31}(s) = \int_{-1}^1 g_{11}(s, t; c) a_{30}(t) dt +$$

$$+ 3 \int_{-1}^1 g_{30}(s, t; c) a_{11}(t) \varphi_n^2(t) dt.$$

Для определения возможных значений параметра ζ как функций от параметра η подставим выражение (22) в формулу (20). В ре-

зультате с учетом равенства $\int_{-1}^1 \varphi_n^2(s) ds = 1$ получаем одномерное уравнение разветвления, имеющее вид:

$$(L_{11}\eta + L_{12}\eta^2 + L_{13}\eta^3)\zeta + (L_{30} + L_{31}\eta)\zeta^3 + \sum_{i+k \geq 5} L_{ik} \zeta^i \eta^k = 0, \quad (23)$$

где

$$L_{ik} = \int_{-1}^1 a_{ik}(s) \varphi_n(s) ds.$$

Уравнению (23) соответствует диаграмма Ньютона, представленная на рис. 1. Из диаграммы Ньютона следует [6], что это уравнение имеет два отличных от нуля решения, которые в первом приближении имеют вид:

$$\zeta(\eta) = b\eta^{1/2} + o(\eta^{1/2}). \quad (24)$$

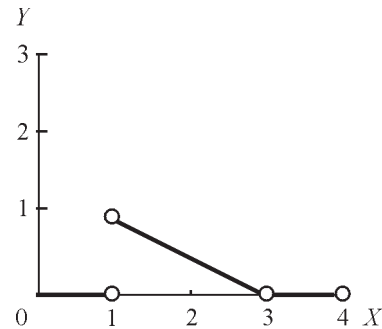


Рис. 1. Диаграмма Ньютона [6] уравнения разветвления (23)

Подставляя выражение (24) в (23), получаем определяющее уравнение для нахождения значений неизвестного коэффициента b :

$$L_{11}b + L_{30}b^3 = 0.$$

Отсюда находим, что $b_0 = 0$, $b_{1,2} = \pm\sqrt{-L_{11}/L_{30}}$, где

$$L_{11} = \frac{c}{2\pi} \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 e^{icz} \varphi_n(z) dz \right|^2 ds > 0,$$

$$L_{30} = -\mu_n \frac{c}{2\pi} \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 e^{icz} \varphi_n(z) dz \right|^2 ds < 0.$$

Для коэффициентов $b_{1,2}$ получаем

$$b_{1,2} = \pm\sqrt{1/\mu_n}, \quad (25)$$

а с учетом (13), (25) находим первые члены решений уравнения разветвления:

$$\begin{aligned} \zeta_{1,2}(\eta) &= \pm\sqrt{1/\mu_n} \eta^{1/2} + o(\eta^{1/2}) = \\ &= \pm\sqrt{\beta_n/2} \eta^{1/2} + o(\eta^{1/2}). \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя выражение (26) в уравнение (22), получаем в первом приближении отличные от тривиального решения нелинейного уравнения (12):

$$\omega_{1,2}^{(n)}(s) = \pm\sqrt{\beta_n/2} S_{0n}(c, s) \eta^{1/2} + o(\eta^{1/2}). \quad (27)$$

Таким образом, в точках $\beta_n = 2\lambda_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) при $\eta > 0$ от тривиального ответвляются по два вещественных решения уравнения (12), которые отличаются между собой лишь знаком и создают одну и ту же ДН по мощности. Так как функции $S_{0n}(c, s)$ четные при четном n и нечетные при нечетном n , то этим же свойством обладают (в первом приближении) и ответвившиеся решения.

Поскольку система уравнений (11) симметрична относительно неизвестных функций u, v , для функции $v(s)$ в классе чисто мнимых функций получаются аналогичные результаты.

2.3. Бифуркация решений при произвольной функции $N_0(s)$

Предположим теперь, что заданная функция $N_0(s) \neq 1$. В этом случае система (11) в пространстве вещественных функций преобразуется в уравнение

$$\begin{aligned} u(s) &= \mu \int_{-1}^1 N_0(t) K(s, t; c) u(t) dt - \\ &- \mu \int_{-1}^1 K(s, t; c) u^3(t) dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Очевидно, что при произвольном $\mu = 2/\beta > 0$ уравнению (28) удовлетворяет тривиальное решение. Рассмотрим линейное уравнение

$$\varphi(s) = \mu \int_{-1}^1 N_0(t) K(s, t; c) \varphi(t) dt, \quad (29)$$

полученное на основании (28). Поскольку функция $N_0(t)$ неотрицательна, ядро интегрального оператора (29) допускает симметризацию при помощи замены $x(t) = \sqrt{N_0(t)} \varphi(t)$. В итоге получаем линейное интегральное уравнение

$$x(s) = \mu \int_{-1}^1 \tilde{K}(s, t; c) x(t) dt \quad (30)$$

с симметричным положительным ядром

$$\tilde{K}(s, t; c) = \sqrt{N_0(s)N_0(t)} \frac{\sin c(s-t)}{\pi(s-t)} \quad \text{для на-}$$

хождения возможных точек бифуркации. Собственные значения $\lambda_n = 1/\mu_n$ уравнения (30) вещественны, положительны и образуют монотонно убывающую последовательность $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$, а собственные функции – ортогональны. Собственные функции и значения уравнения (30) могут быть найдены численными методами с использованием, на-

пример, метода механических квадратур и метода Данилевского [11].

Если кратность собственных значений λ_n равна единице, то решения нелинейного уравнения (28) (в первом приближении) в точках бифуркации можно получить аналогичным образом.

Для примера в таблице приведены первые собственные значения уравнения (29) ($n=0 \div 7$) при различных значениях пара-

метра c для четных функций: $N_0(s)=1$, $N_0(s)=\cos(\pi s/2)$ и $N_0(s)=|\sin \pi s|$. Собственные функции $\varphi_{2n}(s)$ ($n=0,1,2, \dots$) являются четными, а $\varphi_{2n+1}(s)$ ($n=0,1,2, \dots$) – нечетными. Следовательно, характерные свойства ответвившихся в точках $\beta_n = 2\lambda_n$ нетривиальных решений аналогичны приведенным выше для $N_0(s)=1$.

Таблица. Собственные значения уравнения (29) для заданных ДН при различных значениях параметра c

n	λ_n			
	$c = 2$	$c = 5$	$c = 7$	$c = 10$
$N_0(s)=1$				
0	0.8805599	0.9993524	0.9999854	1
1	0.3556406	0.9798645	0.9992922	0.9999968
2	0.0358677	0.7999219	0.985708	0.9998927
3	0.0011522	0.3435622	0.8645661	0.9979012
4	0.0000189	0.0560158	0.4770527	0.9744578
5	0.0000002	0.0041821	0.1157239	0.8251464
6	0	0.0001933	0.013056	0.4401501
7	0	0.0000063	0.0009066	0.1123248
$N_0(s)=\cos(\pi s/2)$				
0	0.650911	0.910512	0.9501562	0.9738995
1	0.1486906	0.6664703	0.8071285	0.8972567
2	0.0106519	0.3408266	0.5920497	0.7752715
3	0.0003107	0.0948852	0.338552	0.6160985
4	0.0000049	0.0127529	0.1224423	0.4331708
5	0	0.0009317	0.0238472	0.2435401
6	0	0.0000436	0.00262	0.0908732
7	0	0.0000015	0.0000174	0.0198231
$N_0(s)= \sin \pi s $				
1	0.5744218	0.8119692	0.8559176	0.9151425
2	0.223893	0.6727146	0.8457846	0.9150015
3	0.0133572	0.380603	0.5019406	0.6851656
4	0.0004542	0.1461554	0.4259395	0.6752072
5	0.0000061	0.0174711	0.1724321	0.3806242
6	0.0000001	0.0013586	0.0365398	0.3200753
7	0	0.0000569	0.0036257	0.134633
8	0	0.000002	0.0002699	0.0306474

Схематически структура вещественных решений для произвольной ДН $N_0(s)$, заданной четной функцией, может быть изображена в виде “дерева решений” (рис. 2), ствол которого соответствует тривиальному решению, а ветви – ответвившимся решениям. При этом четные решения изображены сплошными линиями, а нечетные – пунктирными.

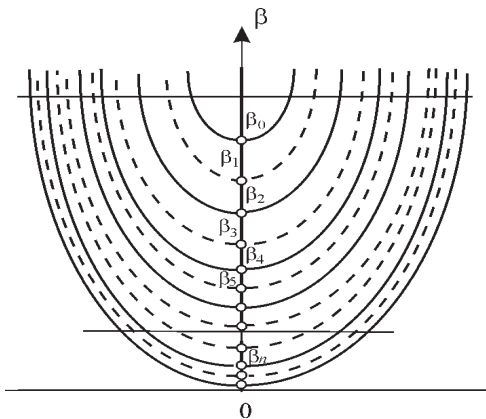


Рис. 2. Дерево решений уравнения (12)

3. Численное нахождение решений

Система уравнений (11) решается численно методом последовательных приближений. Итерационный процесс для нахождения решений имеет вид:

$$u_{n+1}(s) = B_1(u_n, v_n) \equiv \frac{2}{\beta} \int_{-1}^1 K(s, t; c) \{N_0(t) - [u_n^2(t) + v_n^2(t)]\} u_n(t) dt, \quad (31)$$

$$v_{n+1}(s) = B_2(u_n, v_n) \equiv \frac{2}{\beta} \int_{-1}^1 K(s, t; c) \{N_0(t) - [u_n^2(t) + v_n^2(t)]\} v_n(t) dt$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$.

Локальная сходимость итерационного процесса доказывается на основании принципа сжимающих отображений [12]. Укажем на одно важное свойство, которым обладает система (11) при четной функции $N_0(s)$: операторы B_1, B_2 переводят четные функции $u(s), v(s)$ в четные, а нечетные – в нечетные.

При выборе параметра β в функционале (4) имеет смысл найти собственные значения уравнения (29) и полагать $\beta \approx 2\lambda_0$, поскольку в этом случае в решение нелинейного уравнения (9) входят первые собственные функции уравнения (29), имеющие наименьший коэффициент реактивности [7]. Такой выбор параметра β подтверждается результатами, приведенными, в частности, в табл. 1 и на рис. 2. Из рис. 2 видно, что при малых значениях параметра β решение уравнения (9) может быть выражено через собственные функции $\phi_n(s)$ с большим значением индекса n , которые являются быстро осциллирующими. Получаемые в этом случае решения системы (11) могут быть сверхнаправленными, а соответствующие им токи – быстро осциллирующими функциями.

При выборе начального приближения целесообразно использовать найденные в первом приближении решения типа (27), а в случае симметричной заданной ДН $N_0(s)$ имеет смысл использовать свойство сохранения четности операторами $B_1(u, v), B_2(u, v)$ системы (11). Рассмотрим множества функций $C_f^{ch} \subset C[-1, 1]$, обладающих определенным типом четности. Будем полагать, например, что $f = (u, v) \in C_f^{ch}$, если $u(-s) = u(s), v(-s) = -v(s)$. Очевидно, что C_f^{ch} является линейным многообразием пространства $C[-1, 1]$, так как линейная комбинация функций, обладающих определенным типом четности, имеет тот же тип четности. Таких многообразий в пространстве $C[-1, 1]$ имеется четыре. Из свойства сохранения четности операторами B_1, B_2 следует, что линейные многообразия четных и нечетных функций в $C[-1, 1]$ являются инвариантными многообразиями операторов $B_1(u, v), B_2(u, v)$, т. е.

$$B_1(C_f^{ch}) \subset C_f^{ch}, \quad B_2(C_f^{ch}) \subset C_f^{ch}. \quad (32)$$

Условия (32) позволяют выделить в $S[-1,1]$ множества функций, в которых, как было показано выше, существуют решения системы уравнений (11), т. е. локализовать решения.

Учитывая свойства четности функций $u(s)$, $v(s)$, на основании уравнений (5), (8) (полагая в них $AI = f$) можно определить некоторые свойства оптимальных токов в антенне. В частности, при четной $N_0(s)$, если начальное приближение удовлетворяет, например, условиям $u(-s) = u(s)$, $v(-s) = -v(s)$, то согласно (32) решение системы (11) $(u_*(s), v_*(s))$ также удовлетворяет условиям $u_*(-s) = u_*(s)$, $v_*(-s) = -v_*(s)$. В результате $\arg f_*(s)$ – нечетная функция, а ток, соответствующий этому решению является вещественным, но несимметричным относительно центра антенны. При этом синтезированная ДН $N(s) = |f(s)|^2$, соответствующая такому току, – четная функция.

Рассмотрим численный пример синтеза заданной ДН $N_0(s) \equiv 1$. На рис. 3 показаны заданная и синтезируемые ДН при различных значениях параметра c : $c = 3.0$, $\beta = 4.0$; $c = 7.0$, $\beta = 2.35$ и $c = 10.0$, $\beta = 0.9$. Из рисунка видно,

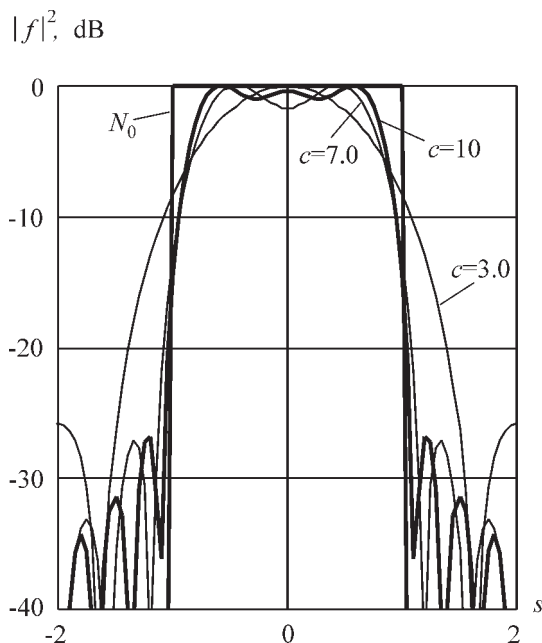


Рис. 3. Заданная и синтезируемые ДН при $N_0(s) = 1$ и различных значениях параметра c

что с ростом параметра c эффективность синтеза увеличивается, т. е. улучшается степень приближения синтезированной ДН к заданной. Амплитудные распределения токов, создающие эти ДН, показаны на рис. 4.

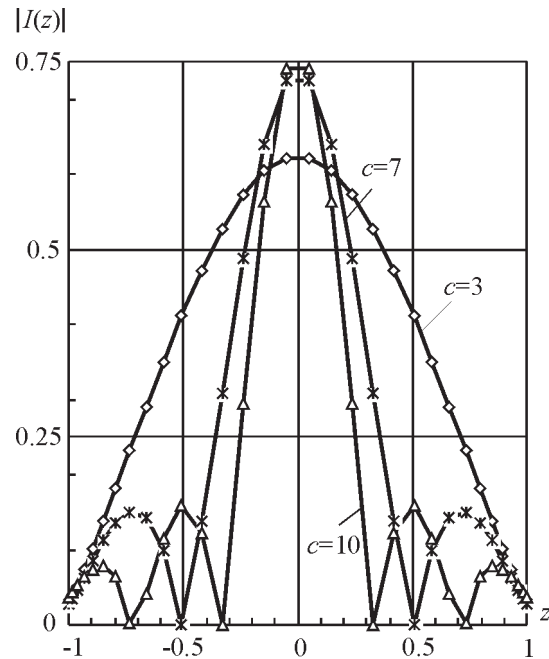


Рис. 4. Оптимальные токи, соответствующие ДН рис. 3

Заключение

В заключение отметим, что впервые полученная на основании методов нелинейного анализа структура решений уравнения (9) раскрывает сущность некорректности задачи нелинейного операторного уравнения первого рода (2) и показывает влияние величины весового параметра β на свойства существующих решений.

Найденные качественные характеристики решений при заданной определяемой четной функцией ДН по мощности целесообразно использовать, выбирая начальное приближение при численном решении задачи.

Итерационный процесс (31) при использовании операторной записи уравнений (5), (7)

может быть применен для синтеза различных типов излучающих систем, которые определяют соответствующий вид и свойства оператора A . Зависимыми от свойств операторов A и A^* являются лишь условия сходимости итерационного процесса.

Литература

1. Л. Д. Бахрах, С. Д. Кременецкий. Синтез излучающих систем (теория и методы расчета). Москва, Сов. радио, 1974, 232 с.
2. А. С. Ильинский. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1978, **21**, №2, с. 9-21.
3. G. T. Poulten. AP-S Int. Symp. Dig. Philadelphia Pa. New York, 1986, pp. 667-670.
4. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. Москва, Наука, 1979, 285 с.
5. А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. Москва, Наука, 1983, 198 с.
6. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. Москва, Наука, 1969, 527 с.
7. Б. М. Минкович, В. П. Яковлев. Теория синтеза антенн. Москва, Сов. радио, 1969, 294 с.
8. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ. Москва, Наука, 1977, 741 с.
9. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, Наука, 1968, 496 с.

10. М. М. Вайнберг. Вариационный метод и метод монотонных операторов. Москва, Наука, 1972, 415 с.

11. Б. П. Демидович, И. А. Марон. Основы вычислительной математики. Москва, Наука, 1970, 664 с.

12. М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. Приближенное решение операторных уравнений. Москва, Наука, 1969, 455 с.

On Structure of Solution to Problem of Synthesis of Linear Antenna from a Given Radiation Pattern

P. A. Savenko

On the example of the problem of synthesis of a linear antenna by given power directivity pattern the results of research of the structure and properties of solutions of a nonlinear integral equation being the Euler equation of the target functional are presented. On the basis of theory of branching solutions of nonlinear equations, the equations for determination of bifurcation points are obtained, the quantity and characteristic properties of existing solutions are defined. The numerical example of solution of the synthesis problem is presented.