

Хаос в осцилляторе Дуффинга с высокочастотным и низкочастотным внешним воздействием

Д. М. Ваврив, Д. В. Шигимага

*Радиоастрономический институт НАН Украины
61002, г. Харьков, ул. Краснознаменная, 4*

Статья поступила в редакцию 6 июля 2000 г.

Исследованы условия возникновения хаотических колебаний в осцилляторе Дуффинга с высоко- и низкочастотным возбуждением. Проведено сравнение аналитических критериев возникновения хаоса, полученных с помощью методов Мельникова и повторного усреднения, с результатами численного эксперимента. Установлено хорошее соответствие вышеуказанных результатов. Показано, что при аддитивном воздействии низко- и высокочастотных колебаний на осциллятор Дуффинга может происходить существенное взаимодействие таких колебаний.

Досліджено умов виникнення хаотичних коливань у осциляторі Дуфінга з високо- та низькочастотним зовнішнім збудженням. Здійснено порівняння аналітичних критеріїв виникнення хаосу, одержаних за допомогою методів Мельникова та повторного усереднення, з результатами чисельного експерименту. Виявлено хорошу відповідність вищевказаних результатів. Показано, що при адитивному зовнішньому впливі на осциллятор Дуфінга низько- та високочастотних коливань може відбуватися суттєва взаємодія таких коливань.

Введение

Работа посвящена исследованию уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \omega_0^2 x - \beta'' x^2 + \gamma'' x^3 = F_0' \cos \Omega t + F' \cos \omega t \quad (1)$$

$$\omega \approx \omega_0 \gg \Omega,$$

где ω , F' и Ω , F_0' – частоты и амплитуды внешнего воздействия; ω_0 – собственная частота осциллятора; μ' – затухание, а β'' и γ'' – коэффициент нелинейности. Простейшая физическая модель, которая описывается этим уравнением, представляет собой последовательный колебательный контур с нелинейной емкостью и двумя источниками переменного напряжения с частотами ω и Ω . Это уравнение достаточно хорошо изучено для случая резонансов: $n\omega = m\omega_0$, где $n, m = 1, 2, \dots$ [1-6].

Обычно предполагается, что если на осциллятор действует внешняя сила, частота которой мно-

го меньше собственной частоты осциллятора, то это воздействие можно рассматривать как квазистационарное.

Аналогичная ситуация возникает при изучении взаимодействия двух осцилляторов, собственная частота одного из которых много меньше собственной частоты другого, когда этим взаимодействием обычно пренебрегалось. Однако выполненные недавно исследования доказывают, что при определенных условиях взаимодействие низко- и высокочастотных колебаний может быть существенным и приводит к возникновению хаотических колебаний. Впервые это было продемонстрировано в работе [7], где рассматривалась динамика параметрически возбуждаемой балки на кронштейне. В работе [8] теоретически и экспериментально изучены вынужденные колебания двух связанных нелинейной емкостью контуров с существенно (на несколько порядков) отличающимися частотами. В этой системе были обнаружены перекачка энергии из высокочастотного контура в низкочастотный, а также хаотические колебания в широком диапазоне изменения управляющих параметров.

На основании приведенных примеров можно заключить, что при анализе динамики и устойчивости нелинейных физических систем нельзя в общем случае пренебрегать как низкочастотными составляющими внешнего воздействия, так и низкочастотными модами системы. В силу этого известные решения многих задач теории нелинейных динамических систем требуют пересмотра и уточнения с учетом указанных выше обстоятельств.

В данной работе приводятся результаты аналитического и численного исследования осциллятора Дуффинга (1) с высокочастотным и низкочастотным внешними воздействиями. Приведены критерии возникновения хаотических колебаний в (1), полученные из анализа стационарных состояний усредненной системы, а также с помощью методов Мельникова и повторного усреднения [9]. Найденные аналитические критерии возникновения хаоса сравниваются с результатами численных экспериментов.

Учет низкочастотного воздействия и основные уравнения

Введем в системе (1) безразмерное время $\tau = t \cdot \omega_0$, а также произведем замену переменных

$x = y - \frac{F_0}{\varepsilon^2} \cos \varepsilon \tau$. Тогда (1) примет вид:

$$\ddot{y} + 2\mu\dot{y} + y - \beta'y^2 + \gamma'y^3 = F \cos \nu\tau - 2\mu \frac{F_0}{\varepsilon} \sin \varepsilon\tau + \frac{F_0}{\varepsilon^2} (1 - 2\beta'y + 3\gamma'y^2) \cos \varepsilon\tau - \frac{F_0^2}{\varepsilon^4} (-\beta' + 3\gamma'y) \cos^2 \varepsilon\tau + \gamma' \frac{F_0^3}{\varepsilon^6} \cos^3 \varepsilon\tau, \quad (2)$$

где $2\mu = \mu'/\omega_0$, $\beta' = \beta''/\omega_0^2$, $\gamma' = \gamma''/\omega_0^2$, $F_0 = F_0'/\omega_0^2$, $F = F'/\omega_0^2$, $\varepsilon = \Omega/\omega_0$ и $\nu = \omega/\omega_0$. Точки над переменными означают дифференцирование по времени τ .

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$y = a(\tau) \cos(\nu\tau + \varphi).$$

После применения процедуры усреднения получа-

ем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\mu a - P \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \Delta + \gamma a^2 + \beta B \cos \varepsilon\tau + 2\gamma B^2 \cos 2\varepsilon\tau - \frac{P}{a} \cos \varphi \end{aligned} \quad (3)$$

где $P = \frac{F}{2\nu}$, $B = \frac{F_0}{\varepsilon^2}$, $\beta = \frac{\beta'}{\nu}$, $\gamma = \frac{\gamma'}{\nu}$,

$$\Delta = \frac{1-\nu^2}{2\nu} + 2\gamma B^2.$$

Иследуем стационарные состояния системы (3) при условии, что низкочастотное воздействие отсутствует ($B = 0$). В этом случае характеристическое уравнение системы (3) имеет вид:

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \left[\mu^2 + (\Delta + \gamma a^2)(\Delta + 3\gamma a^2) \right] = 0.$$

Его решения:

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{-(\Delta + \gamma a^2)(\Delta + 3\gamma a^2)}.$$

Для существования стационарных состояний системы типа “седло” необходимо, чтобы

$$(\Delta + \gamma a^2)(\Delta + 3\gamma a^2) < -\mu^2. \quad (4)$$

Приравнивая правые части уравнений (3) нулю, при $B = 0$ имеем:

$$\left[\mu^2 + (\Delta + \gamma a^2)^2 \right] a^2 = P^2. \quad (5)$$

Из (4) или (5) можно получить следующее условие существования “седел” в системе:

$$P > \frac{2}{3} \mu \sqrt{\frac{2\mu\sqrt{3}}{\gamma}}. \quad (6)$$

Кроме того, при достаточно большом значении P “седела” существуют в следующем интервале:

$$-\gamma \left(\frac{P}{\mu} \right)^2 \leq \Delta \leq -2(\gamma P^2)^{1/3}. \quad (7)$$

Из этого выражения видно, что если $\gamma > 0$, то значения расстройки Δ , при которых существуют седловые состояния, всегда отрицательны.

Условия (6) и (7) существования “седел” в системе являются необходимыми условиями возникновения хаотических колебаний при наличии соответствующего возмущения. Параметры возмущения, при которых может происходить хаотизация системы, приближенно находятся в следующем разделе при помощи метода Мельникова.

Уравнения движения на сепаратрисе и метод Мельникова

Преобразуем систему уравнений (3) к более удобному виду при помощи замены переменных $u = a \cos \varphi$ и $v = a \sin \varphi$:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -\mu u - \left[\Delta + \gamma(u^2 + v^2) + \right. \\ & \left. + \beta B \cos \varepsilon \tau + 2\gamma B^2 \cos 2\varepsilon \tau \right] v, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} = & -\mu v + \left[\Delta + \gamma(u^2 + v^2) + \right. \\ & \left. + \beta B \cos \varepsilon \tau + 2\gamma B^2 \cos 2\varepsilon \tau \right] u - P. \end{aligned}$$

При $B = \mu = 0$ система (8) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -\left[\Delta + \gamma(u^2 + v^2) \right] v, \\ \dot{v} = & \left[\Delta + \gamma(u^2 + v^2) \right] u - P \end{aligned} \quad (9)$$

и имеет следующий гамильтониан [10, с. 182]:

$$H = \frac{\gamma}{4}(u^2 + v^2)^2 + \frac{\Delta}{2}(u^2 + v^2) - Pu. \quad (10)$$

Типичный фазовый портрет системы (9) изображен на рис. 1. При $\delta \equiv -\frac{\Delta}{\gamma} > 0$ и $P > 0$ на фазо-

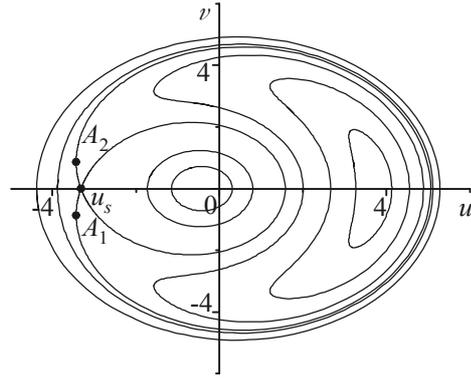


Рис. 1. Типичный фазовый портрет гамильтоновой системы (9) на плоскости (u, v) при следующих параметрах: $\gamma = 0.4, P = 2, \Delta = -5$ и различных начальных условиях. Точка u_s – седловая

вом портрете существует гомоклиническая петля (сепаратриса), выходящая и входящая в седло с координатами $u = u_s$ и $v = 0$. Здесь u_s – минимальный средний по модулю (из трех) действительный корень уравнения

$$u_s^3 - \delta u_s - \frac{f}{4} = 0, \quad (11)$$

где $f = \frac{4P}{\gamma}$. Далее из (10) и (11) находим уравнение сепаратрисы:

$$v^2 = \delta - u^2 \pm \sqrt{(\delta - u_s^2)^2 - f u_s + f u}. \quad (12)$$

Здесь знак “-” соответствует участку сепаратрисы от точки A_1 до точки A_2 по малой петле, а “+” – участку по большой петле (см. рис. 1).

Для того чтобы определить уравнение движения на сепаратрисе, решим систему (9), используя (12) (см. [1]):

$$u(\tau') = u_s + \frac{1}{f} S(\tau') \left[2(\delta - u_s^2) + S(\tau') \right], \quad (13)$$

где $S(\tau') = \frac{1}{2} \frac{q^2 - b^2}{q \operatorname{ch} \tau' - b}$; $\tau' = \frac{\gamma \eta}{2} (\tau - \tau_0)$; $b = -4(\delta - u_s^2)$;

$q = \pm 2\sqrt{-2fu_s}$; $\eta^2 = -2fu_s - \frac{b^2}{4}$. Здесь τ_0 – начальный момент времени.

Подставляя (13) в (12), получаем

$$u^2 + v^2 = u_s^2 \pm S(\tau'). \quad (14)$$

Уравнения (12) и (13) представляют собой уравнения движения на сепаратрисе для невозмущенной системы (9).

Далее перейдем непосредственно к методу Мельникова. Выпишем для системы (8) величину $\Delta_1(\tau_0)$, которая определяет расстояние между устойчивым и неустойчивым многообразиями в сечении Пуанкаре:

$$\Delta_1(\tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (R_1 Q_0 - R_0 Q_1) d\tau, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} R_0 &= -[\Delta + \gamma(u^2 + v^2)]v, \\ Q_0 &= [\Delta + \gamma(u^2 + v^2)]u - P, \\ R_1 &= -\mu u - [\beta B \cos \varepsilon \tau + 2\gamma B^2 \cos 2\varepsilon \tau]v, \\ Q_1 &= -\mu v + [\beta B \cos \varepsilon \tau + 2\gamma B^2 \cos 2\varepsilon \tau]u. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя в (15) выражения (16) и используя (13) и (14), после интегрирования получим:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\tau_0) &= \mu \left[8 \operatorname{arctg} \left(\frac{q+b}{2\eta} \right) - 3\eta \right] + \\ &+ \frac{2\pi B \varepsilon}{\operatorname{sign}(q)} \left(\frac{\beta \sin(\varepsilon \tau_0)}{\gamma \operatorname{sh}(\pi \sigma / 2)} \operatorname{sh} \left[\frac{\sigma}{2} \arccos \left(-\frac{b}{q} \right) \right] + \right. \\ &\left. + 2B \frac{\sin(2\varepsilon \tau_0)}{\operatorname{sh}(\pi \sigma)} \operatorname{sh} \left[\sigma \arccos \left(-\frac{b}{q} \right) \right] \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\sigma = 4\varepsilon/\gamma\eta$.

Окончательное условие пересечения многообразий, следующее из (17), имеет вид:

$$\begin{aligned} M &\leq \left| B \left(\frac{3}{4} K \pm \frac{1}{4} \sqrt{K^2 + 32L^2 B^2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \sqrt{1 - \frac{\left(-K \pm \sqrt{K^2 + 32L^2 B^2} \right)^2}{64L^2 B^2}} \right|, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} K &= \frac{2\pi\beta\varepsilon}{\gamma \operatorname{sh}(\pi\sigma/2)} \operatorname{sh} \left[\frac{\sigma}{2} \arccos \left(-\frac{b}{q} \right) \right]; \\ L &= \frac{4\pi\varepsilon}{\operatorname{sign} q \operatorname{sh} \pi\sigma} \operatorname{sh} \left[\sigma \arccos \left(-\frac{b}{q} \right) \right]; \\ M &= \mu \left[8\delta \operatorname{arctg} \left(\frac{q+b}{2\eta} \right) - 3\eta \right]. \end{aligned}$$

Это условие позволяет достаточно точно предсказывать области управляющих параметров, в которых возможно появление хаотических колебаний.

Применение метода Мельникова предполагает близость рассматриваемой системы к гамильтоновой. Для этого необходимо, чтобы характерное время возмущения $\tau_p \sim 1/\varepsilon$ было меньше времени релаксации системы $\tau_r \sim 1/\mu$, т. е., чтобы $\mu \leq \varepsilon$. Однако, как показывают численные эксперименты, это условие не является слишком жестким.

Индукцированные “седла” и сценарии возникновения хаоса

Седловые состояния в исследуемой системе могут возникать и вследствие внешнего воздействия. Такие седловые состояния называются индуцированными [9]; они также могут являться причиной возникновения хаотических колебаний. Исследуем основные резонансы системы, которые могут приводить к возникновению в ней индуцированных седловых состояний. Первые высшие резонансы определяются следующими условиями:

$$\frac{2v - n\varepsilon}{2} = v - n\frac{\varepsilon}{2} \approx 1, \quad (19)$$

$$\frac{2v + n\varepsilon}{2} = v + n\frac{\varepsilon}{2} \approx 1, \quad (20)$$

где $n=1, 2, 3$. Отметим, что случаи $n = 1$ и $n = 3$ соответствуют бифуркации удвоения периода, а случай $n = 2$ соответствует тангенциальной бифуркации в системе.

Для исследования резонансов применим процедуру усреднения к системе (2) на произвольной частоте v' . В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -\mu u - \left[\Delta + \gamma(u^2 + v^2) + \beta B \cos \varepsilon \tau + \right. \\ & \left. + 2\gamma B^2 \cos 2\varepsilon \tau \right] v - P \sin(v' - v)\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} = & -\mu v + \left[\Delta + \gamma(u^2 + v^2) + \beta B \cos \varepsilon \tau + \right. \\ & \left. + 2\gamma B^2 \cos 2\varepsilon \tau \right] u - P \cos(v' - v)\tau. \end{aligned}$$

Для изучения резонансов (19) и (20) при $n=1$ выберем частоту v' равной соответственно $v - \varepsilon/2$ и $v + \varepsilon/2$, а также введем новые переменные:

$$U = u + \frac{P}{v' - v} \cos(v' - v)\tau \quad \text{и} \quad V = v - \frac{P}{v' - v} \sin(v' - v)\tau.$$

После вышеуказанных преобразований системы (21) получаем следующие уравнения относительно новых переменных U и V :

$$\begin{aligned} \dot{U} = & -\mu \left(U \mp \frac{2P}{\varepsilon} \cos \frac{\varepsilon \tau}{2} \right) - \left[\Delta + \gamma \left(\left(U \mp \frac{2P}{\varepsilon} \cos \frac{\varepsilon \tau}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(V - \frac{2P}{\varepsilon} \sin \frac{\varepsilon \tau}{2} \right)^2 \right) + \beta B \cos \varepsilon \tau + 2\gamma B^2 \cos 2\varepsilon \tau \right] \times \\ & \times \left(V - \frac{2P}{\varepsilon} \sin \frac{\varepsilon \tau}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mu \left(V - \frac{2P}{\varepsilon} \sin \frac{\varepsilon \tau}{2} \right) + \left[\Delta + \gamma \left(\left(U \mp \frac{2P}{\varepsilon} \cos \frac{\varepsilon \tau}{2} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(V - \frac{2P}{\varepsilon} \sin \frac{\varepsilon \tau}{2} \right)^2 \right) + \beta B \cos \varepsilon \tau + 2\gamma B^2 \cos 2\varepsilon \tau \right] \times \\ & \times \left(U \mp \frac{2P}{\varepsilon} \cos \frac{\varepsilon \tau}{2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь знак “-” соответствует резонансу (19), а знак “+” – резонансу (20). Усредним эту систему на частоте $\varepsilon/2$. В результате получим одну и ту же систему уравнений для изучения резонансов (19) и (20):

$$\begin{aligned} \dot{U} = & -\mu U - \left[\Delta + \frac{8P^2\gamma}{\varepsilon^2} + \gamma(U^2 + V^2) \right] V, \\ \dot{V} = & -\mu V + \left[\Delta + \frac{8P^2\gamma}{\varepsilon^2} + \gamma(U^2 + V^2) \right] U. \end{aligned} \quad (23)$$

Бифуркации удвоения периода в системе (21) должны соответствовать устойчивые нетривиальные состояния равновесия в системе (23). Исследуем эту систему на предмет устойчивости. Стационарные состояния системы находятся из уравнения:

$$\left[\mu^2 + \left(\Delta + \frac{8P^2\gamma}{\varepsilon^2} + \gamma a^2 \right)^2 \right] a^2 = 0, \quad (24)$$

где $a = \sqrt{U^2 + V^2}$. Из (24) следует, что в этой системе возможны только тривиальные состояния равновесия $a = 0$, так как состояние равновесия $\left(\Delta + \frac{8P^2\gamma}{\varepsilon^2} + \gamma a^2 \right)^2 = -\mu^2$ не может быть реализовано.

Численные эксперименты показали возможность перехода к хаосу через серию бифуркаций удвоения периода (см. рис. 2), следовательно, вышеуказанной бифуркации должны соответствовать

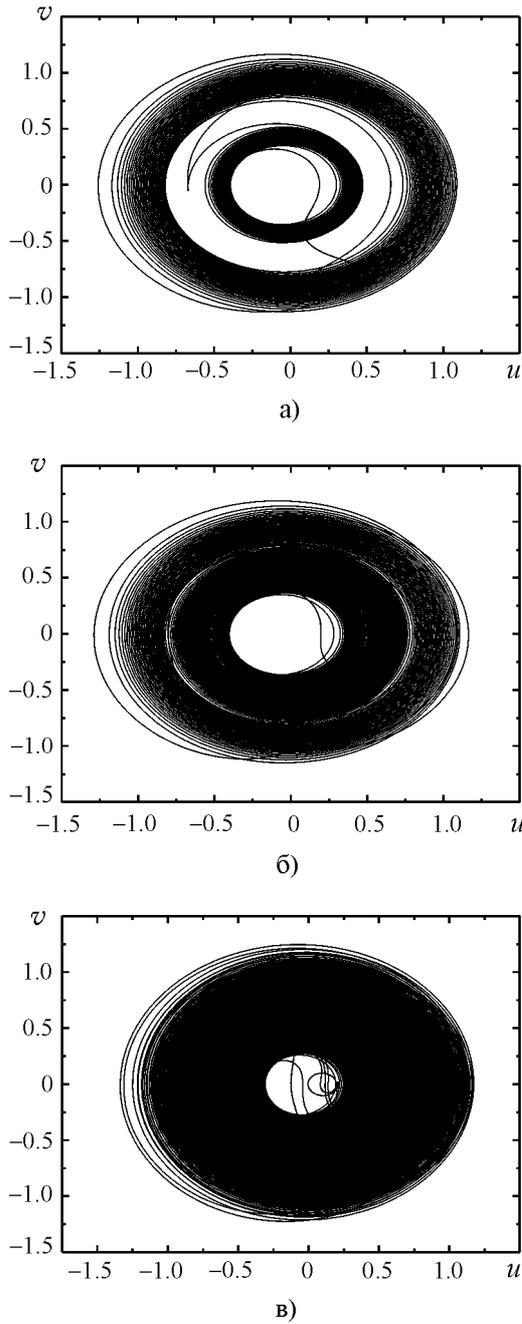


Рис. 2. Переход к хаосу через серию бифуркаций удвоения периода при $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$, $\mu = 0.01$, $P = 0.1$, $\Delta = -3.6$, $\varepsilon = 0.05$:

а) предельный цикл при $V=4.57$;

б) предельный цикл с удвоенным периодом при $V=4.58$;

в) хаос при $V=4.59$

другие резонансные соотношения, а именно (19) и (20) при $n = 3$. Исследуя их аналогично предыду-

щим, получим следующую систему усредненных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{U} = & -\mu U - \left[\Delta + \frac{8P^2\gamma}{9\varepsilon} + \frac{3\sqrt{3}B}{4\pi}(\beta - \gamma B) + \right. \\ & \left. + \gamma(U^2 + V^2) \right] V, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mu V + \left[\Delta + \frac{8P^2\gamma}{9\varepsilon} + \frac{3\sqrt{3}B}{4\pi}(\beta - \gamma B) + \right. \\ & \left. + \gamma(U^2 + V^2) \right] U \pm \frac{2\sqrt{3}BP}{\varepsilon\pi} \left(\frac{\beta}{5} + \frac{4\gamma B}{7} \right). \end{aligned}$$

Здесь знак “+” соответствует резонансу (19), а знак “-” – резонансу (20). Стационарные состояния этой системы находятся из следующего уравнения:

$$\begin{aligned} & \left[\mu^2 + \left(\Delta + \frac{8P^2\gamma}{9\varepsilon} + \frac{3\sqrt{3}B}{4\pi}(\beta - \gamma B) + \gamma a^2 \right)^2 \right] a^2 = \\ & = \left[\frac{2\sqrt{3}BP}{\varepsilon\pi} \left(\frac{\beta}{5} + \frac{4\gamma B}{7} \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (26)$$

а их устойчивость определяется из характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\mu\lambda + \left[\mu^2 + \left(\Delta + \frac{3\sqrt{3}B}{4\pi}(\beta - \gamma B) + \gamma a^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\Delta + \frac{3\sqrt{3}B}{4\pi}(\beta - \gamma B) + 3\gamma a^2 \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

имеющего решения:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = & -\mu \pm \left[- \left(\Delta + \frac{3\sqrt{3}B}{4\pi}(\beta - \gamma B) + \gamma a^2 \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\Delta + \frac{3\sqrt{3}B}{4\pi}(\beta - \gamma B) + 3\gamma a^2 \right) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует условие возникновения в системе “седел” (25):

$$\left(\Delta + \frac{8P^2\gamma}{9\epsilon} + \frac{3\sqrt{3}B}{4\pi}(\beta - \gamma B) + \gamma a^2 \right) \times \left(\Delta + \frac{8P^2\gamma}{9\epsilon} + \frac{3\sqrt{3}B}{4\pi}(\beta - \gamma B) + 3\gamma a^2 \right) < \mu^2. \quad (27)$$

Уравнения (26) и (27) являются условиями возникновения бифуркации удвоения периода в системе (21).

Рассмотрим теперь случай резонанса $n = 2$. Выберем v' равной соответственно $v - \epsilon$ и $v + \epsilon$ и введем такую же замену переменных U и V , как и в (22). После применения процедуры повторного усреднения на частоте ϵ получаем систему уравнений:

$$\dot{U} = -\mu U - \left[\Delta + \frac{2P^2\gamma}{\epsilon^2} + \gamma(U^2 + V^2) \right] V, \quad (28)$$

$$\dot{V} = -\mu V + \left[\Delta + \frac{2P^2\gamma}{\epsilon^2} + \gamma(U^2 + V^2) \right] U \mp \frac{\beta BP}{2\epsilon}.$$

Здесь “-” соответствует уравнению (19), а “+” – уравнению (20).

Из анализа устойчивости этой системы находим следующие условия для резонансов (19) и (20) при $n = 2$ в системе (21):

$$\left[\mu^2 + \left(\Delta + \frac{2P^2\gamma}{\epsilon^2} + \gamma a^2 \right)^2 \right] a^2 = \left(\frac{\beta BP}{2\epsilon} \right)^2, \quad (29)$$

$$\left(\Delta + \frac{2P^2\gamma}{\epsilon^2} + \gamma a^2 \right) \left(\Delta + \frac{2P^2\gamma}{\epsilon^2} + 3\gamma a^2 \right) < -\mu^2. \quad (30)$$

Этим резонансам соответствует сценарий перехода к хаосу, показанный на рис. 3. Как видно из рисунков 4 и 5, области резонансов (19) и (20) при $n = 2$ и бифуркации удвоения периода существенно

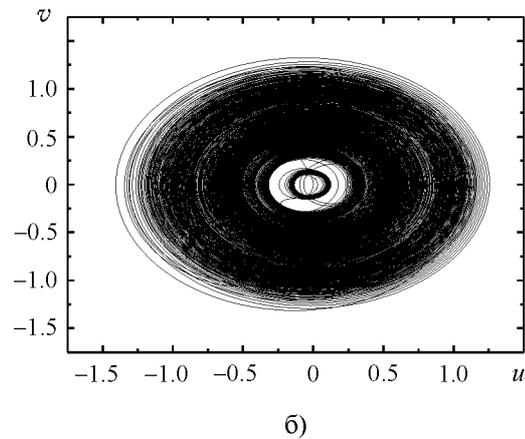
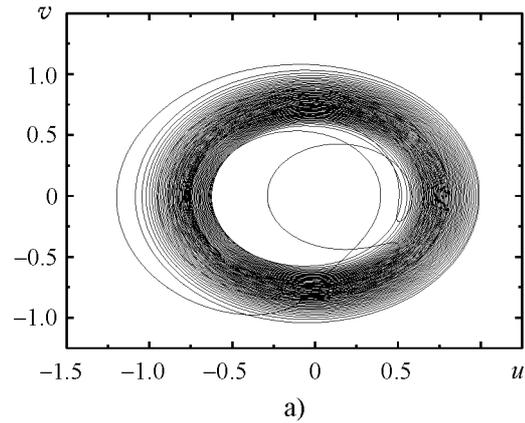


Рис. 3. Переход к хаосу без бифуркации удвоения периода при $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$, $\mu = 0.01$, $P = 0.1$, $\Delta = -3.6$, $\epsilon = 0.05$:
 а) предельный цикл при $V=4.42$;
 б) хаос при $V=4.43$

перекрываются, что означает возможность перехода к хаосу при близких управляющих параметрах как через серию бифуркаций удвоения периода, так и в результате разрушения седло-узловых состояний, возникающих после тангенциальной бифуркации. Этот факт подтверждается численными экспериментами, которые показали, что при изменении одного из управляющих параметров (в данном случае амплитуды низкочастотного внешнего воздействия B), когда остальные параметры фиксированы, могут наблюдаться различные сценарии перехода к хаосу (см. рис. 2, 3). По-видимому, сценарии, показанные на рис. 2, 3, представляют собой различные случаи разрушения гомоклинической петли точки типа седло-фокус. Кроме того, из этих рисунков видно, что даже простые периодические движения в системе имеют очень сложную структуру.

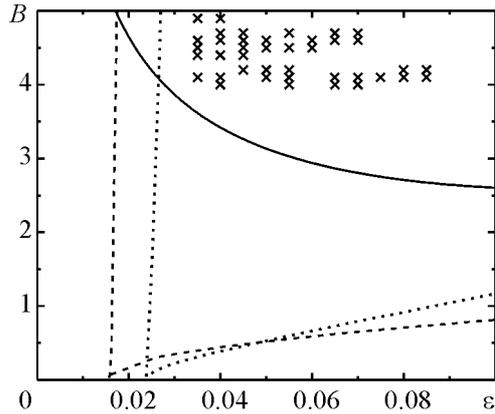


Рис. 4. Область хаоса на плоскости параметров (ϵ, B) при $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$, $P = 0.1$, $\Delta = -3.6$ и $\mu = 0.01$. Граница, полученная методом Мельникова, показана сплошной линией. Область хаоса, найденные в результате численного эксперимента, показаны крестиками. Граница первой бифуркации удвоения периода показана штриховой линией, а линия резонансов (19) и (20) при $n = 2$ отмечена пунктиром

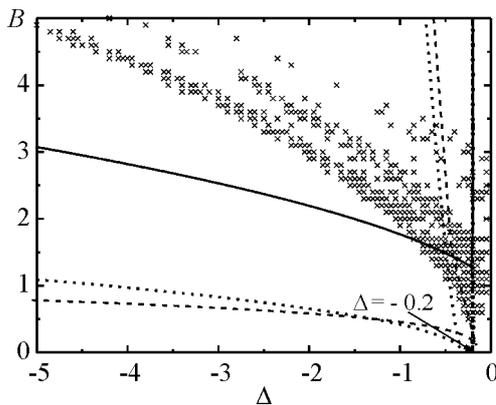


Рис. 5. Область хаоса на плоскости параметров (Δ, B) при $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.1$, $P = 0.1$, $\epsilon = 0.08$ и $\mu = 0.01$. Граница, полученная методом Мельникова, показана сплошной линией. Верхняя граница существования в системе "седла", полученная из (7), показана штрихпунктирной линией при $\Delta = -0.2$. Хорошо видно совпадение этой линии с одной из ветвей кривой, полученной методом Мельникова

Для доказательства применимости полученных аналитических выражений (18), (26), (27), а также (29), (30) приведем результаты численного моделирования.

На рис. 4 и 5 приведены результаты численного моделирования и расчета областей хаотических колебаний, полученные с помощью методов Мельникова (18) и повторного усреднения (26), (27) и (29), (30) на плоскостях параметров $B(\epsilon)$ и $B(\Delta)$ соответственно. Области хаоса, найденные из результатов численного интегрирования уравнений (8), отмечены крестиками, а область, полученная из критерия Мельникова, – сплошной линией; граница первой бифуркации удвоения периода показана штриховой линией, а граница возникновения тангенциальной бифуркации – пунктирной. Кроме того, на рис. 5 также приведена область возможных хаотических колебаний, полученная путем прямого численного моделирования уравнений (8). Видно, что результаты расчета областей хаоса, полученные из критерия Мельникова, хорошо согласуются с результатами численного моделирования. На рис. 2, 3 показаны различные сценарии перехода к хаосу, реализуемые в данной системе. Рис. 2 демонстрирует переход к хаосу через серию бифуркаций удвоения периода, а на рис. 3 показан переход к хаосу без серии бифуркаций удвоения периода.

Заключение

Результаты работы показывают, что при аддитивном воздействии низко- и высокочастотных колебаний на осцилятор Дуффинга может происходить существенное взаимодействие этих колебаний. В результате такого взаимодействия наблюдается возникновение хаотических колебаний уже в квазилинейном режиме возбуждения. В результате применения метода Мельникова и метода повторного усреднения получены аналитические критерии возникновения хаотических колебаний. Установлено хорошее соответствие результатов численного эксперимента и полученных аналитических критериев.

Работа была выполнена при поддержке ЕС в рамках контракта IC15CT980509.

Литература

1. Д. М. Ваврив, В. Б. Рябов. Радиотехника и электроника. 1991, **36**, №11, с. 2148-2155.
2. С. Holmes and P. Holmes. J. Sound Vib. 1981, **78**, p. 161.
3. J. Miles. Appl. Phys. and Math. Sci. 1984, **81**, No. 6, pp. 3919-3926.
4. А. Б. Белогорцев, Д. М. Ваврив, О. А. Третьяков. ЖЭТФ. 1987, **94**, №4, с. 1316-1321.

5. А. Б. Белогорцев, Д. М. Ваврив, Б. А. Калугин. ЖТФ. 1987, **57**, №3, с. 559-561.
6. D. M. Vavriv, V. B. Ryabov, S. A. Sharapov, and H. M. Ito. Physical Review E. 1996, **53**, No. 1, pp. 103-114.
7. A. H. Nayfeh, S. A. Nayfeh, and B. Balachandran. In Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics, J. M. T. Thompson and S. R. Bishop, Eds., John Wiley & Sons Ltd., 1994, pp. 39-58.
8. D. V. Shygimaga, D. M. Vavriv, and V. V. Vinogradov. IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1998, **45**, No. 12, pp. 1255-1260.
9. А. Д. Грищенко, Д. М. Ваврив. ЖТФ. 1997, **67**. №10, с. 1-7.
10. J. M. Guckenheimer and P. Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. N. Y., Springer-Verlag, 1983, 400 pp.

Chaos in Duffing Oscillator with High- and Low-Frequency External Forcing

D. M. Vavriv, D. V. Shygimaga

Conditions for chaos onset in Duffing oscillator with high- and low-frequency external excitation are examined. The analytical results obtained by Melnikov technique and repeated averaging technique are compared with ones obtained from numerical experiment. A good correspondence of the above results is proved. It is shown that an essential interaction of low- and high-frequency oscillations can occur in the case of their additive external forcing on Duffing oscillator.