

Тензоры Грина уравнений Максвелла для плоскостойкой бианизотропной среды

Н. П. Жук, А. В. Малюскин, С. Н. Шульга

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,
Украина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4*

Статья поступила в редакцию 17 апреля 2000 г., после переработки 26 октября 2000 г.

Предложены новые представления тензорных функций Грина уравнений Максвелла в плоскостойкой бианизотропной среде через скалярные потенциалы. Спектральные тензорные функции Грина исследованы в рамках теории обобщенных функций, причем явно определены регулярная и сингулярная составляющие спектральных диад Грина.

Запропоновано нові зображення тензорних функцій Гріна рівнянь Максвелла у плоскошаруватому біанізотропному середовищі через скалярні потенціали. Спектральні тензорні функції Гріна досліджено за допомогою теорії узагальнених функцій. Отримано явні вирази для регулярної та сингулярної частини спектральних діаг Гріна.

Введение

Бианизотропные среды представляют собой класс линейных сред, характеризуемый материальными уравнениями, в которых как электрическая $\vec{D}(\vec{R})$, так и магнитная $\vec{B}(\vec{R})$ индукции определяются одновременно напряженностями электрического $\vec{E}(\vec{R})$ и магнитного $\vec{H}(\vec{R})$ полей $\vec{R} = (x, y, z)$:

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \cdot \vec{E} + \hat{\xi} \cdot \vec{H}, \quad \vec{B} = -\hat{\zeta} \cdot \vec{E} + \hat{\mu} \cdot \vec{H} \quad (1)$$

В соотношениях (1), которые справедливы для полей, изменяющихся по гармоническому закону ($\exp(-i\omega t)$), тензоры второго ранга $\hat{\epsilon}(\vec{R})$, $\hat{\mu}(\vec{R})$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно, а параметры $\hat{\xi}(\vec{R})$, $\hat{\zeta}(\vec{R})$ являются тензорами магнитоэлектрического взаимодействия. В зависимости от вида материальных тензоров $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}$, $\hat{\zeta}$ различают подмножества взаимных биизотропных (киральных) сред, невзаимных биизотропных (Теллегинских) сред, природных магнитоэлектрических кристаллов и искусственных бианизотропных сред. Общая классифика-

ция бианизотропных сред, основанная на структуре тензоров магнитоэлектрического взаимодействия $\hat{\xi}$, $\hat{\zeta}$, приведена в работе [1].

Электромагнитные свойства бианизотропных сред интенсивно исследуются в последние годы, что связано с потенциальными возможностями бианизотропных материалов при создании новых приборов СВЧ и устройств антенной техники.

При изучении взаимодействия электромагнитных волн с материальными средами удобно, а иногда и необходимо, оперировать функциями Грина (ФГ) уравнений Максвелла. Аппарат функций Грина уравнений Максвелла позволяет в замкнутой форме получить компактные выражения для волнового поля, порождаемого сторонними или наведенными источниками. Для изотропных, а также одноосных анизотропных сред ФГ построены в работах [2], [3]. В работе [4] найдены спектральные ФГ однородной безграничной бианизотропной среды. Данная работа посвящена построению ФГ краевых задач электродинамики в произвольной бианизотропной плоскостойкой среде. Решение находится в рамках метода скаляризации [5] электромагнитного поля, применявшегося ранее к решению задач дифракции электромагнитных волн в слоистых анизотропных средах.

1. Сведение векторной дифракции электромагнитного поля к краевой задаче для скалярных потенциалов

Плоскостроистая бианизотропная среда, рассматриваемая в настоящей работе, занимает область пространства $0 < z < +\infty$, $-\infty < x, y < +\infty$ и характеризуется тензорами диэлектрической $\hat{\epsilon}(z)$ и магнитной $\hat{\mu}(z)$ проницаемостей и тензорами магнитоэлектрического взаимодействия $\hat{\xi}(z)$, $\hat{\zeta}(z)$. Слоистый характер среды заключается в том, что имеют место следующие обстоятельства либо их сочетания: 1) величины $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}$, $\hat{\zeta}$ непрерывно зависят от вертикальной координаты z ; 2) среда является кусочно-однородной, т. е. существуют границы раздела $z = \text{const}$, на которых свойства среды изменяются скачкообразно.

В декартовой системе координат x, y, z тензоры $\hat{\epsilon}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\xi}$, $\hat{\zeta}$ характеризуются комплексными, в общем случае девятикомпонентными матрицами, элементы которых являются произвольными функциями координаты z и не зависят от $\vec{r} = (x, y)$. При $z = 0$ среда ограничена импедансной поверхностью, свойства которой определяются [6] тензором импеданса \hat{L} . Уравнения Максвелла для напряженностей $\vec{E}(\vec{R})$, $\vec{H}(\vec{R})$, монохроматического электромагнитного поля в бианизотропной ($0 < z < +\infty$) среде имеют вид:

$$\nabla \times \vec{H} + ik_0 (\hat{\epsilon} \cdot \vec{E} + \hat{\xi} \cdot \vec{H}) = (4\pi/c) \vec{J}, \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{E} - ik_0 (\hat{\mu} \cdot \vec{H} - \hat{\zeta} \cdot \vec{E}) = -(4\pi/c) \vec{M}.$$

Здесь $\vec{J} \equiv \vec{J}(\vec{R})$ и $\vec{M} \equiv \vec{M}(\vec{R})$ – объемные плотности сторонних объемных электрического и магнитного токов соответственно, расположенных в среде и не пересекающих границ раздела; $k_0 = \omega/c$; c – скорость света в вакууме. На поверхностях раздела $z = \text{const}$, при отсутствии наведенных токов, тангенциальные компоненты напряженностей электромагнитного поля \vec{E}_τ , \vec{H}_τ ($\vec{E}_\tau \cdot \vec{z}_0 = 0$, $\vec{H}_\tau \cdot \vec{z}_0 = 0$, \vec{z}_0 – единичный вектор оси

z) удовлетворяют обычным условиям непрерывности. На импедансной поверхности $z = +0$ тангенциальные компоненты поля удовлетворяют импедансным граничным условиям

$$\vec{E}_\tau - \hat{L} \cdot \vec{z}_0 \times \vec{H}_\tau = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда сторонние источники описываются пространственными гармониками с волновым вектором $\vec{\chi} = (\chi_x, \chi_y, 0)$:

$$\vec{J}(\vec{R}) = \vec{J}(\vec{\chi}, z) \exp(i\vec{\chi} \cdot \vec{r}), \tag{4}$$

$$\vec{M}(\vec{R}) = \vec{M}(\vec{\chi}, z) \exp(i\vec{\chi} \cdot \vec{r}).$$

Здесь величины $\vec{J}(\vec{\chi}, z)$, $\vec{M}(\vec{\chi}, z)$ определяют векторные амплитуды источников, волновой вектор $\vec{\chi}$ в общем случае является комплексным вектором. Как известно, соотношения (1) описывают линейные анизотропные среды и учитывают эффекты пространственной дисперсии первого порядка по волновому вектору плоских волн [7]. Для неоднородных плоских волн (4) в среде с пространственной дисперсией существуют ограничения на значения волнового вектора, определяемые дисперсионным уравнением для пространственных гармоник. Подробное освещение этого вопроса для однородных нормальных волн в анизотропной среде с пространственной дисперсией имеется в работе [8]. Выбор сторонних источников в форме (4) обусловлен тем фактом, что широкий класс возбуждающих источников может быть представлен в виде соответствующей суперпозиции пространственных гармоник (4). Из (2)-(4) следует, что электромагнитное поле также представимо в виде пространственных гармоник:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \vec{E}(\vec{\chi}, z) \exp(i\vec{\chi} \cdot \vec{r}), \tag{5}$$

$$\vec{H}(\vec{R}) = \vec{H}(\vec{\chi}, z) \exp(i\vec{\chi} \cdot \vec{r}),$$

где $\vec{E}(\vec{\chi}, z)$, $\vec{H}(\vec{\chi}, z)$ – векторные амплитуды поля. Основная цель данного раздела заключается в том, чтобы найти представление векторных амплитуд через две скалярные величины – скалярные потен-

циалы. Для этого введем правовинтовой базис векторов [5]

$$\vec{a}_l = \vec{n}, \quad \vec{a}_t = \vec{z}_0 \times \vec{n}, \quad \vec{a}_z = \vec{z}_0, \quad (6)$$

здесь $\vec{n} = \vec{\chi}/\chi$ – единичный вектор ($\vec{n} \cdot \vec{n}^* = 1$, $\chi = (\vec{\chi} \cdot \vec{\chi}^*)^{1/2}$), лежащий в плоскости $z = 0$, (символ “*” означает комплексное сопряжение). Ветвь квадратного корня выбрана так, что $0 \leq \arg \chi < \pi$. Всюду в дальнейшем считается, что $|\chi_x|^2 + |\chi_y|^2 \neq 0$. Заметим, что введенная согласно определению (6) система векторов ортогональна:

$$\vec{a}_\sigma \cdot \vec{a}_\tau = \delta_{\sigma\tau}.$$

Здесь $\sigma, \tau = z, l, t$; $\delta_{\sigma\tau}$ – символ Кронекера.

Умножив скалярно уравнения Максвелла (2) на векторы \vec{a}_z , \vec{a}_l , получим формулы, выражающие величины $\vec{a}_{z,l} \cdot \vec{E}(\vec{\chi}, z)$, $\vec{a}_{z,l} \cdot \vec{H}(\vec{\chi}, z)$ в терминах скалярных функций

$$\begin{aligned} E(\vec{\chi}, z) &\equiv \vec{a}_t \cdot \vec{E}(\vec{\chi}, z), \\ H(\vec{\chi}, z) &\equiv \vec{a}_l \cdot \vec{H}(\vec{\chi}, z) \end{aligned} \quad (7)$$

и их первых производных по z . Вспомогательные функции $E(\vec{\chi}, z)$, $H(\vec{\chi}, z)$, в согласии с литературой, посвященной рассеянию электромагнитных волн в анизотропных средах, принято называть “потенциалами” [2], [3]. В случае действительного, отличного от нуля вектора $\vec{\chi}$ потенциалы (7) имеют физический смысл проекций соответствующих векторных амплитуд пространственных гармоник на направление в плоскости $z = 0$, перпендикулярное направлению распространения волны \vec{n} .

После несложных преобразований можно получить представление векторных амплитуд $\vec{E}(\vec{\chi}, z)$, $\vec{H}(\vec{\chi}, z)$ через скалярные потенциалы $E(\vec{\chi}, z)$, $H(\vec{\chi}, z)$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{\chi}, z) &= \vec{v}_e E(\vec{\chi}, z) - \vec{w}_e H(\vec{\chi}, z) + \\ &+ (4\pi i/\omega) [\hat{\alpha}_{ee} \cdot \vec{J}(\vec{\chi}, z) - \hat{\alpha}_{em} \cdot \vec{M}(\vec{\chi}, z)], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{\chi}, z) &= \vec{v}_m H(\vec{\chi}, z) + \vec{w}_m E(\vec{\chi}, z) + \\ &+ (4\pi i/\omega) [\hat{\alpha}_{mm} \cdot \vec{M}(\vec{\chi}, z) - \hat{\alpha}_{me} \cdot \vec{J}(\vec{\chi}, z)]. \end{aligned}$$

Здесь \vec{v}_β , \vec{w}_β ($\beta = e, m$) – векторные дифференциальные операторы, действующие по z и зависящие от χ , \vec{n} :

$$\begin{aligned} \vec{w}_e &= \vec{n}t_l + \vec{z}_0 t_z + k_0^{-1} [\chi(\vec{z}_0 p_{ll} - \vec{n}p_{lz}) + \\ &+ i(\vec{n}p_{zz} - \vec{z}_0 p_{zl})\partial_z], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_e &= \vec{z}_0 \times \vec{n} + \vec{n}v_l + \vec{z}_0 v_z + k_0^{-1} [\chi(\vec{n}r_{lz} - \vec{z}_0 r_{ll}) + \\ &+ i(\vec{z}_0 r_{zl} - \vec{n}r_{zz})\partial_z]. \end{aligned} \quad (10)$$

Соответствующие выражения для оператора \vec{w}_m получают заменой $t_\sigma \rightarrow u_\sigma$, $p_{\sigma\tau} \rightarrow q_{\sigma\tau}$ в уравнении (9). Аналогично, выражения для оператора \vec{v}_m получают заменой $v_\sigma \rightarrow w_\sigma$, $r_{\sigma\tau} \rightarrow s_{\sigma\tau}$ в уравнении (10), индексы σ, τ принимают значения l, z . Индекс $\beta = e, m$ в величинах типа \vec{v}_β , \vec{w}_β указывает на то, что соответствующая величина связана с электрической либо магнитной составляющей электромагнитного поля. Используемые ниже обозначения типа $\hat{\alpha}_{em}$ определяют тот факт, что соответствующая величина связана как с электрической, так и с магнитной составляющей электромагнитного поля.

В формулах (9), (10) $\partial_z = \partial/\partial z$, $\hat{\alpha}_{ee}, \dots, \hat{\alpha}_{mm}$ – диадные функции вектора \vec{n} и переменной z :

$$\hat{\alpha}_{ee} = \vec{n}\vec{z}_0 p_{lz} + \vec{z}_0 \vec{n} p_{zl} - \vec{n}\vec{n} p_{zz} - \vec{z}_0 \vec{z}_0 p_{ll}, \quad (11)$$

$$\hat{\alpha}_{em} = \vec{n}\vec{z}_0 r_{lz} + \vec{z}_0 \vec{n} r_{zl} - \vec{n}\vec{n} r_{zz} - \vec{z}_0 \vec{z}_0 r_{ll}. \quad (12)$$

Выражения для функции $\hat{\alpha}_{mm}$ получают заменой $p_{\sigma\tau} \rightarrow q_{\sigma\tau}$ в уравнении (11), аналогично выраже-

ния для функции $\hat{\alpha}_{me}$ получают заменой $r_{\sigma\tau} \rightarrow s_{\sigma\tau}$ в уравнении (12). Индексы σ, τ принимают значения l, z .

Скалярные функции $p_{\sigma\tau}, q_{\sigma\tau}, r_{\sigma\tau}, s_{\sigma\tau}, t_{\sigma}, u_{\sigma}, v_{\sigma}, w_{\sigma}, (\sigma, \tau = l, z)$, приведены в Приложении 1.

Умножим скалярно уравнения Максвелла (2) на вектор \vec{a}_i . Подстановка в эти соотношения полученных ранее величин $\vec{a}_{z,l} \cdot \vec{E}(\vec{\chi}, z), \vec{a}_{z,l} \cdot \vec{H}(\vec{\chi}, z)$ дает систему связанных дифференциальных уравнений второго порядка для скалярных потенциалов

$$D_{ss}H(\vec{\chi}, z) + D_{sp}E(\vec{\chi}, z) = (4\pi/c)q_s(\vec{\chi}, z), \quad (13)$$

$$-D_{ps}H(\vec{\chi}, z) + D_{pp}E(\vec{\chi}, z) = (4\pi/c)q_p(\vec{\chi}, z).$$

В уравнениях (13) $q_v(\vec{\chi}, z)$ – функции сторонних источников, $D_{\lambda\nu}$ – операторы типа Штурма-Лиувилля ($\lambda, \nu = p, s$):

$$D_{ss} = \partial_z p_{zz} \partial_z + i\chi(\partial_z p_{lz} + p_{zl} \partial_z) + ik_0(b_l \partial_z - \partial_z t_l) + k_0^2 \delta_\mu - \chi^2 p_{ll} + \chi k_0(b_z - t_z), \quad (14)$$

$$D_{sp} = \partial_z r_{zz} \partial_z + i\chi(\partial_z r_{lz} + r_{zl} \partial_z) + ik_0(\partial_z d_l + v_l \partial_z) + k_0^2 \delta_\zeta - \chi^2 r_{ll} + \chi k_0(d_z + v_z). \quad (15)$$

Соответствующие выражения для оператора D_{pp} получают заменой $b_\sigma \rightarrow c_\sigma, t_\sigma \rightarrow u_\sigma, \delta_\mu \rightarrow \delta_\epsilon, p_{\sigma\tau} \rightarrow q_{\sigma\tau}$ в уравнении (14), аналогично, выражения для оператора D_{ps} получают заменой $d_\sigma \rightarrow f_\sigma, v_\sigma \rightarrow w_\sigma, \delta_\zeta \rightarrow \delta_\xi, r_{\sigma\tau} \rightarrow s_{\sigma\tau}$ в уравнении (15); индексы σ, τ принимают значения l, z .

$$q_s(\vec{\chi}, z) = [z_0(\partial_z p_{lz} + i\chi p_{ll} - ik_0 b_z) - \vec{n}(\partial_z p_{zz} + i\chi p_{zl} + ik_0 b_l)] \cdot \vec{J}(\vec{\chi}, z) + [\vec{n}(\partial_z r_{zz} + i\chi r_{zl} + ik_0 d_l) - \vec{z}_0(\partial_z r_{lz} + i\chi r_{ll} - ik_0 d_z) - ik_0 \vec{z}_0 \times \vec{n}] \cdot \vec{M}(\vec{\chi}, z), \quad (16)$$

$$q_p(\vec{\chi}, z) = [\vec{n}(\partial_z q_{zz} + i\chi q_{zl} + ik_0 c_l) - \vec{z}_0(\partial_z q_{lz} + i\chi q_{ll} - ik_0 c_z)] \cdot \vec{M}(\vec{\chi}, z) + [\vec{n}(\partial_z s_{zz} + i\chi s_{zl} + ik_0 f_l) - \vec{z}_0(\partial_z s_{lz} + i\chi s_{ll} - ik_0 f_d) - ik_0 \vec{z}_0 \times \vec{n}] \cdot \vec{J}(\vec{\chi}, z). \quad (17)$$

Скалярные функции $b_\sigma, c_\sigma, d_\sigma, f_\sigma, (\sigma = l, z), \delta_\alpha$ ($\alpha = \epsilon, \mu, \xi, \zeta$) приведены в Приложении 1.

Рассмотрим, как преобразуются импедансные граничные условия (3), записанные в терминах скалярных потенциалов. Подставляя (8) в (3) на импедансной границе $z = +0$, получим пару соотношений, связывающих скалярные потенциалы и их первые производные по z :

$$(ik_0 a_{ss} + b_{ss} \partial_z)H(\vec{\chi}, z) + (ik_0 a_{sp} + b_{sp} \partial_z)E(\vec{\chi}, z) = 0, \quad (18)$$

$$(ik_0 a_{ps} + b_{ps} \partial_z)H(\vec{\chi}, z) + (ik_0 a_{pp} + b_{pp} \partial_z)E(\vec{\chi}, z) = 0.$$

Коэффициенты $a_{\nu\lambda}, b_{\nu\lambda}$ ($\nu, \lambda = p, s$) приведены в Приложении 2. Таким образом, краевая электродинамическая задача для векторного электромагнитного поля сводится, в рамках предложенного метода, к системе связанных дифференциальных уравнений второго порядка (13) с граничными условиями (18) для двух величин – скалярных потенциалов. Соотношения (13), (18) являются исходным пунктом при построении скаляризованных представлений тензорных ФГ уравнений Максвелла для плоскостойких бианизотропных сред.

2. Тензорные ФГ плоскостойкой бианизотропной среды

Решение задачи возбуждения электромагнитного поля объемными источниками \vec{J}, \vec{M} может быть записано с помощью тензорных ФГ $\hat{G}_{\alpha\beta}(\vec{\chi}, z, z')$ ($\alpha, \beta = e, m$) в виде:

$$\vec{E}(\vec{\chi}, z) = \int_0^{+\infty} dz' [\hat{G}_{ee}(\vec{\chi}, z, z') \cdot \vec{J}(\vec{\chi}, z) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \hat{G}_{em}(\vec{\chi}, z, z') \cdot \vec{M}(\vec{\chi}, z)], \\
 \vec{H}(\vec{\chi}, z) &= \int_0^{+\infty} dz' [\hat{G}_{me}(\vec{\chi}, z, z') \cdot \vec{J}(\vec{\chi}, z) + \\
 & + \hat{G}_{mm}(\vec{\chi}, z, z') \cdot \vec{M}(\vec{\chi}, z)].
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Пространственные тензорные ФГ $\hat{G}_{\alpha\beta}(\vec{R}, \vec{R}')$ связаны со спектральными ФГ посредством обратного преобразования Фурье

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(\vec{R}, \vec{R}') = (2\pi)^{-2} \int d\vec{\chi} \exp[i\vec{\chi} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] \hat{G}_{\alpha\beta}(\vec{\chi}, z, z').
 \tag{20}$$

Построим теперь спектральные тензоры Грина для случая, когда на поверхностях раздела $z = \text{const}$ отсутствуют наведенные токи и, кроме того, на бесконечности при $z \rightarrow \infty$ отсутствуют какие-либо источники.

Определим скалярные функции $H(\vec{\chi}, z) \equiv G_{sv}(\vec{\chi}, z, z')$, $E(\vec{\chi}, z) \equiv G_{pv}(\vec{\chi}, z, z')$ ($v = p, s$) как решение краевой задачи (13), (18) с источниками вида

$$q_p(\vec{\chi}, z) = (c/4\pi)\delta(z - z'), \quad q_s(\vec{\chi}, z) \equiv 0 \quad (v = p);
 \tag{21}$$

$$q_s(\vec{\chi}, z) = (c/4\pi)\delta(z - z'), \quad q_p(\vec{\chi}, z) \equiv 0 \quad (v = s).$$

Здесь $\delta(z - z')$ – дельта-функция Дирака. Функции $G_{\lambda\nu}$ должны также удовлетворять условию излучения в бесконечности, например, убывать при $z \rightarrow +\infty$, если среда в бесконечности обладает диссипативными потерями. Решение краевой задачи (13), (18) с произвольными источниками $q_{p,s}$ можно, в силу линейности уравнений (13), представить в виде:

$$E(\vec{\chi}, z) = (4\pi/c) \int_0^{+\infty} dz' [G_{pp}(\vec{\chi}, z, z')q_p(\vec{\chi}, z) +$$

$$+ G_{ps}(\vec{\chi}, z, z')q_s(\vec{\chi}, z)],$$

$$\begin{aligned}
 H(\vec{\chi}, z) &= (4\pi/c) \int_0^{+\infty} dz' [G_{sp}(\vec{\chi}, z, z')q_p(\vec{\chi}, z) + \\
 & + G_{ss}(\vec{\chi}, z, z')q_s(\vec{\chi}, z)].
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Не останавливаясь на определении функций $G_{\nu\lambda}$, ограничимся замечанием, что указанные функции могут быть найдены в виде суперпозиции линейно-независимых решений однородной краевой задачи (13), (18), аналогично случаю изотропной [2] либо одноосной [9] плоскостойкой среды. В свою очередь, решение однородной краевой задачи (13), (18) может быть найдено строго аналитически стандартными методами (см., например, [10]) в случае однородного бианизотропного слоя, либо численно – методом конечных разностей – в случае неоднородного слоя.

Отметим далее, что тензорные ФГ $\hat{G}_{\alpha\beta}(\vec{\chi}, z, z')$ не являются обычными (локально интегрируемыми) функциями, а принадлежат классу обобщенных функций [3], [9]. Учтем представление (22) в уравнениях (8), понимая операции дифференцирования по z и интегрирования по z' в рамках теории обобщенных функций [11]. Осуществим перестановку операций дифференцирования по z и интегрирования по z' , принимая во внимание определение источников $q_{p,s}$ (16), (17). Сравним результат с представлением (19), можно легко получить итоговые представления для спектральных тензоров Грина через скалярные функции $G_{sv}(\vec{\chi}, z, z')$, $G_{pv}(\vec{\chi}, z, z')$, ($v = p, s$):

$$\begin{aligned}
 \hat{G}_{ee}(\vec{\chi}, z, z') &= (4\pi i/c k_0) \hat{\alpha}_{ee}(\vec{n}, z) \delta(z - z') + \\
 & + (4\pi i k_0/c) [\vec{v}_e (\vec{v}_e G_{pp} - \vec{w}_e G_{ps}) + \vec{w}_e (\vec{w}_e G_{ss} - \vec{v}_e G_{sp})],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{G}_{em}(\vec{\chi}, z, z') &= -(4\pi i/c k_0) \hat{\alpha}_{em}(\vec{n}, z) \delta(z - z') + \\
 & + (4\pi i k_0/c) [\vec{v}_e (\vec{v}_m G_{ps} - \vec{w}_m G_{pp}) - \vec{w}_e (\vec{v}_m G_{ss} - \vec{w}_m G_{sp})],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{me}(\bar{\chi}, z, z') &= (4\pi i / ck_0) \hat{\alpha}_{me}(\bar{n}, z) \delta(z - z') + \\ &+ (4\pi i k_0 / c) \left[\tilde{v}_m (\tilde{v}_e G_{ps} - \tilde{w}_e G_{ss}) + \tilde{w}_m (\tilde{v}_e G_{pp} - \tilde{w}_e G_{ps}) \right], \\ \hat{G}_{mm}(\bar{\chi}, z, z') &= (4\pi i / ck_0) \hat{\alpha}_{mm}(\bar{n}, z) \delta(z - z') + \\ &+ (4\pi i k_0 / c) \left[\tilde{v}_m (\tilde{v}_m G_{ss} + \tilde{w}_e G_{sp}) + \tilde{w}_m (\tilde{v}_m G_{ps} + \tilde{w}_m G_{pp}) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь \tilde{w}_β , \tilde{v}_β – векторные дифференциальные операторы, действующие по z и зависящие от χ , \bar{n} :

$$\begin{aligned} \tilde{w}_e &= \bar{n} b_l(z') + \bar{z}_0 b_z(z') + k_0^{-1} \left[\chi (\bar{n} p_{zl}(z') - \bar{z}_0 p_{ll}(z')) + \right. \\ &+ i (\bar{n} p_{zz}(z') - \bar{z}_0 p_{lz}(z')) \partial / \partial z' \left. \right], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_e &= -\bar{z}_0 \times \bar{n} + \bar{n} f_l(z') + \bar{z}_0 f_z(z') + k_0^{-1} \left[\chi (\bar{n} s_{zl}(z') - \right. \\ &- \bar{z}_0 s_{ll}(z')) + i (\bar{n} s_{zz}(z') - \bar{z}_0 s_{lz}(z')) \partial / \partial z' \left. \right]; \end{aligned}$$

$$\tilde{w}_e \rightarrow \tilde{w}_m \quad (b_\sigma \rightarrow c_\sigma, p_{\sigma\tau} \rightarrow q_{\sigma\tau}), \quad (25)$$

$$\tilde{v}_e \rightarrow \tilde{v}_m \quad (f_\sigma \rightarrow d_\sigma, s_{\sigma\tau} \rightarrow r_{\sigma\tau}).$$

Соотношения (23) – это скаляризованные представления тензорных спектральных ФГ $\hat{G}_{\alpha\beta}(\bar{\chi}, z, z')$ через четыре скалярных ФГ $G_{\nu\tau}(\bar{\chi}, z, z')$, ($\alpha, \beta = e, m$; $\nu, \tau = p, s$), которые являются решениями краевой задачи (13), (18) с источниками вида (21).

Обратим внимание на то, что величина $\partial G_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z, z') / \partial z$ как функция переменной z' испытывает в точке $z = z'$ скачок, величину которого обозначим через $h_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z)$:

$$h_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z) \equiv \frac{\partial G_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z, z')}{\partial z} \Bigg|_{z'=z-0}^{z'=z+0}.$$

Из определения величины $h_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z)$ следует, что

$$h_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z) \equiv \frac{\partial G_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z, z')}{\partial z} \Bigg|_{z'=z-0}^{z'=z+0}.$$

Последнее свойство позволяет найти $h_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z')$ в явном виде, проинтегрировав дифференциальные уравнения для потенциалов $H(\bar{\chi}, z) \equiv G_{sv}(\bar{\chi}, z, z')$, $E(\bar{\chi}, z) \equiv G_{pv}(\bar{\chi}, z, z')$ ($v = p, s$) по z в пределах от $z - \eta$ до $z + \eta$ и затем положив $\eta \rightarrow 0$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений для величин h_{sv} , h_{pv} , решение которой можно записать в виде:

$$\begin{aligned} h_{ss}(\bar{\chi}, z) &= q_{zz} / \tilde{\Delta}, & h_{sp}(\bar{\chi}, z) &= -r_{zz} / \tilde{\Delta}, \\ h_{ps}(\bar{\chi}, z) &= s_{zz} / \tilde{\Delta}, & h_{pp}(\bar{\chi}, z) &= p_{zz} / \tilde{\Delta}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\Delta} = q_{zz} p_{zz} + r_{zz} s_{zz}$. Обобщенная производная функции $\partial G_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z, z') / \partial z$ по переменной z' вычисляется с помощью хорошо известного правила дифференцирования скачкообразно меняющейся функции, которое в нашем случае может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2 G_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z, z')}{\partial z \partial z'} = \frac{\partial^2 G_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z, z')}{\partial z \partial z'} \Bigg|_0 - \delta(z - z') h_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z'), \quad (26)$$

где индексом “о” обозначены производные, понимаемые в обычном смысле. Учитывая, что $\partial^2 G_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z, z') / \partial z \partial z' = \partial^2 G_{\lambda\nu}(\bar{\chi}, z, z') / \partial z' \partial z$, применим формулу (26) для вычисления вторых смешанных производных в скаляризованных представлениях (23). После группировки членов, содержащих дельта-функции, получаем:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\alpha\beta}(\bar{\chi}, z, z') &= \hat{G}_{\alpha\beta}^{reg}(\bar{\chi}, z, z') + \\ &+ (4\pi / ik_0 c) \bar{z}_0 \bar{z}_0 \delta(z - z') G_{\alpha\beta}^s(z'). \end{aligned} \quad (27)$$

Регулярная часть ФГ $\hat{G}_{\alpha\beta}^{reg}(\vec{\chi}, z, z')$ является интегрируемой функцией по каждой из переменных z, z' и определяется в (23) членами, не содержащими дельта-функцию, при этом все обобщенные производные необходимо понимать в обычном смысле. Сингулярная часть ФГ определяется в (23) членами, пропорциональными дельта-функции $\delta(z-z')$. Коэффициенты $G_{\alpha\beta}^s$, фигурирующие при δ -функции в (27), могут быть записаны в следующем виде:

$$G_{ee}^s(z') = \mu_{zz}(z')/a(z'), \tag{28}$$

$$G_{mm}^s(z') = \varepsilon_{zz}(z')/a(z');$$

$$G_{me}^s(z') = \zeta_{zz}(z')/a(z'), \tag{29}$$

$$G_{em}^s(z') = -\xi_{zz}(z')/a(z').$$

В соотношениях (29)

$$a(z') = \varepsilon_{zz}(z')\mu_{zz}(z') + \xi_{zz}(z')\zeta_{zz}(z'), \text{ а } \mu_{zz}, \dots, \varepsilon_{zz} -$$

компоненты соответствующих тензоров $\hat{\mu}, \dots, \hat{\varepsilon}$ вдоль оси z (см. Приложение 1). Физический смысл представления (27) заключается в выявлении сингулярного поведения спектральных диад Грина $\hat{G}_{\alpha\beta}(\vec{\chi}, z, z')$ в плоскости источника $z = z'$. Следует отметить, что регулярная и сингулярная часть спектральных ФГ $\hat{G}_{\alpha\beta}(\vec{\chi}, z, z')$ определены однозначно и единственным образом в отличие от пространственных тензорных ФГ.

Построим теперь тензоры Грина для частного случая, когда бианизотропная среда занимает слой $0 < z < b$, а пространство $b < z < +\infty$ занято однородной изотропной средой с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ . Кроме того, примем, что точка локализации источника находится внутри бианизотропного слоя $0 < z < b$, а точка наблюдения – в изотропном полупространстве $b < z < \infty$ (см. рис. 1).

Введем в рассмотрение векторы $\vec{A}_{\lambda\alpha}(\vec{\chi}, z)$ ($\lambda = p, s; \alpha = e, m$), определяющие p -поляризован-

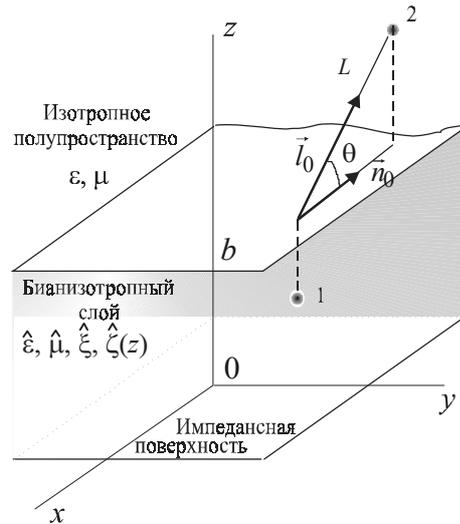


Рис. 1. Геометрия задачи:

1 – точка локализации источника; 2 – точка наблюдения

ную ($\vec{A}_{p\alpha}$) и s -поляризованную ($\vec{A}_{s\alpha}$) составляющие электромагнитного поля, создаваемого в полупространстве $b < z < \infty$ источником электрического ($\alpha = e$) или магнитного ($\alpha = m$) типа, расположенным в области бианизотропного слоя.

Учитывая определение операторов (9)-(10) и скалярных функций $G_{\nu\lambda}(\vec{\chi}, z, z')$, для рассматриваемой геометрии нетрудно получить спектральные ФГ:

$$\hat{G}_{e\alpha}(\vec{\chi}, z, z') = (4\pi i/c) \left[\vec{z}_0 \times \vec{n} \vec{A}_{p\alpha}(\vec{\chi}, z') + (\gamma \vec{m} - \vec{z}_0 \chi) \vec{A}_{s\alpha}(\vec{\chi}, z) / k_0 \varepsilon \right] \exp[i\gamma(z-b)], \tag{30}$$

$$\hat{G}_{m\alpha}(\vec{\chi}, z, z') = (4\pi i/c) \left[\vec{z}_0 \times \vec{n} \vec{A}_{s\alpha}(\vec{\chi}, z') + (\vec{z}_0 \chi - \gamma \vec{m}) \vec{A}_{p\alpha}(\vec{\chi}, z) / k_0 \mu \right] \exp[i\gamma(z-b)],$$

$$0 < z' < b, \quad b < z < \infty.$$

Здесь $\alpha = e, m; \gamma = \gamma(\chi) = (k^2 - \chi^2)^{1/2}, k^2 = k_0^2 \varepsilon \mu$; а ветвь квадратного корня выбрана так, что $0 < \arg \gamma \leq \pi$.

Явные выражения для векторных величин $\vec{A}_{\nu\alpha}$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\bar{A}_{\lambda e}(\bar{\chi}, z')/k_0 = \tilde{v}_e G_{\lambda p}(\chi, b-0, z') - \tilde{w}_e G_{\lambda s}(\chi, b-0, z'), \quad (31)$$

$$\bar{A}_{\lambda m}(\bar{\chi}, z')/k_0 = \tilde{v}_m G_{\lambda p}(\chi, b-0, z') - \tilde{w}_m G_{\lambda s}(\chi, b-0, z').$$

Приближенное аналитическое выражение для пространственных ФГ $\hat{G}_{\alpha\beta}(\bar{R}, \bar{R}')$ для случая, когда точка наблюдения находится в изотропном полупространстве без омических потерь, а точка локализации источника – внутри бианизотропного слоя, можно получить, асимптотически вычисляя интегралы в (20) стандартным методом седловой точки [2]. Введем сферическую систему координат L, θ, φ с центром в точке $\bar{R}_0 = (x', y', b)$, лежащей на внешней границе слоя (рис. 1). Здесь L – расстояние между началом координат \bar{R}_0 и точкой наблюдения \bar{R} : $L = \left[(r-r')^2 + (z-b)^2 \right]^{1/2}$; θ и φ – углы сферической системы, ортонормированный базис которой $\bar{l}_0, \bar{\vartheta}_0, \bar{\varphi}_0$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{l}_0(\bar{R}) &= [\bar{r} - \bar{r}' + \bar{z}_0(z-b)]/L = \\ &= (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta), \\ \bar{\vartheta}_0(\bar{R}) &= \bar{l}_0 \times \bar{\varphi}_0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\bar{\varphi}_0(\bar{r}) = \bar{z}_0 \times \bar{n}_0,$$

где

$$\bar{n}_0(\bar{r}) = (\bar{r} - \bar{r}')/|\bar{r} - \bar{r}'| = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0). \quad (33)$$

Декартовы координаты точки наблюдения будут выражаться через L, θ, φ следующим образом:

$$\begin{aligned} x - x' &= L \cos\vartheta \cos\varphi, \\ y - y' &= L \cos\vartheta \sin\varphi, \\ z - b &= L \sin\vartheta. \end{aligned} \quad (34)$$

В предположении $kL \gg 1, 0 < \theta \leq \pi/2$, а также пренебрегая вкладом волн, локализованных вблизи слоя, из (20) и (30) получим выражение для пространственных ФГ:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{e\beta}(\bar{R}, \bar{R}') &= -W \bar{l}_0(\bar{R}) \times \hat{G}_{m\beta}(\bar{R}, \bar{R}') = \\ &= 2k \left[\bar{\varphi}_0 \bar{A}_{p\beta}(\bar{\chi}_0, z') - W \bar{\vartheta}_0 \bar{A}_{s\beta}(\bar{\chi}_0, z') \right] \frac{\exp(ikL)}{cL} \sin\vartheta, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{m\beta}(\bar{R}, \bar{R}') &= W^{-1} \bar{l}_0(\bar{R}) \times \hat{G}_{e\beta}(\bar{R}, \bar{R}') = \\ &= 2k \left[\bar{\varphi}_0 \bar{A}_{s\beta}(\bar{\chi}_0, z') + W^{-1} \bar{\vartheta}_0 \bar{A}_{p\beta}(\bar{\chi}_0, z') \right] \frac{\exp(ikL)}{cL} \sin\vartheta, \\ \beta &= e, m. \end{aligned}$$

В выражениях (35) $W = (\mu/\epsilon)^{1/2}$ – импеданс изотропного полупространства, $\bar{\chi}_0 = \chi_0 \bar{n}_0$, вектор \bar{n}_0 определен соотношением (33), а величина $\chi_0 = k \cos\theta$. Векторные величины $\bar{A}_{\alpha\beta}$ определены ранее соотношениями (31). Представление тензорных ФГ в виде (35) позволяет определять электромагнитные поля в области изотропного полупространства $b < z < +\infty$, создаваемые объемными источниками, локализованными внутри бианизотропного слоя $0 < z' < b$. Исследование ФГ для случая, когда точка локализации источника, равно как и точка наблюдения, находятся в области изотропного полупространства, может быть выполнено с использованием концепции диадного импеданса $\hat{L}(\bar{\chi}, z)$ для внешней поверхности слоя [12].

Заключение

Для произвольной плоскостойкой бианизотропной среды построены представления тензорных ФГ уравнений Максвелла через скалярные функции, определенные как удовлетворяющие условиям излучения на бесконечности решения краевой задачи (13), (18), (21). Полученные результаты позволяют рассчитывать электромагнитные поля, создаваемые объемными источниками в слоистых бианизотропных средах, что является актуальной задачей при проектировании устройств микроэлект-

роники, интерпретации данных неразрушающего контроля, а также в ряде других приложений.

Приложение 1

В базисе (6) компоненты тензоров $\hat{\eta} = \hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\xi}, \hat{\zeta}$ определяются следующим соотношением:

$$\eta_{\sigma\tau}(\vec{n}) = \vec{a}_\sigma \cdot \hat{\eta} \cdot \vec{a}_\tau \quad (\sigma, \tau = l, t, z). \quad (1.1)$$

В терминах компонент $\eta_{\sigma\tau}$ функции вектора \vec{n} и переменной $z - p_{\sigma\tau}, q_{\sigma\tau}, r_{\sigma\tau}, s_{\sigma\tau}$ – запишутся следующим образом.

$$p_{\sigma\tau} = [\varepsilon_{\sigma\tau}(\mu_{ll}\mu_{zz} - \mu_{zl}\mu_{lz}) + \xi_{\sigma l}(\mu_{zz}\zeta_{lt} - \mu_{lz}\zeta_{zt}) + \xi_{\sigma z}(\mu_{ll}\zeta_{zt} - \mu_{zl}\zeta_{lt})] / \Delta. \quad (1.2)$$

Выражения для функций $r_{\sigma\tau}$ получаются заменой $\varepsilon \leftrightarrow \zeta, \mu \leftrightarrow \xi$ в уравнении (1.2), а выражения для функций $s_{\sigma\tau}$ и $q_{\sigma\tau}$ получаются заменой $\varepsilon \leftrightarrow \zeta, \mu \leftrightarrow \xi$ в выражениях для функций $r_{\sigma\tau}$ и $p_{\sigma\tau}$ соответственно; индексы σ, τ принимают значения l, t, z . Величина $\Delta = \Delta(\chi)$ определена ниже соотношением (1.5).

В базисе (10) тензоры $\hat{\eta} = \hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\xi}, \hat{\zeta}$ характеризуются 3×3 -матрицами $\mathbf{\eta}$ с компонентами $\eta_{\sigma\tau}$, определенными соотношением (1.1). Введем в рассмотрение матрицу с размерами 6×6

$$\mathbf{\pi} = \begin{bmatrix} \mu & \zeta \\ \xi & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

и обозначим посредством π_{km}^{ij} определитель матрицы, получаемой из матрицы $\mathbf{\pi}$ вычеркиванием i -го и j -го столбца и k -ой и m -ой строки ($i, j, k, m = 1, 2, \dots, 6$). С учетом сделанных обозначений величины $t_\sigma, u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma$, фигурирующие в формулах (11), (12), и величины $b_\sigma, c_\sigma, d_\sigma, f_\sigma$ ($\sigma = l, z$) из соотношений (16), (17) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} b_l &= \pi_{45}^{25} / \Delta, & b_z &= -\pi_{56}^{25} / \Delta; \\ d_l &= \pi_{15}^{25} / \Delta, & d_z &= \pi_{35}^{25} / \Delta; \\ t_l &= -\pi_{25}^{45} / \Delta, & t_z &= -\pi_{25}^{56} / \Delta; \\ v_l &= -\pi_{25}^{24} / \Delta, & v_z &= -\pi_{25}^{26} / \Delta; \\ b_\sigma &\leftrightarrow c_\sigma, & d_\sigma &\leftrightarrow f_\sigma, \\ t_\sigma &\leftrightarrow u_\sigma, & v_\sigma &\leftrightarrow w_\sigma, \\ \varepsilon &\leftrightarrow \mu, & \zeta &\leftrightarrow \xi; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\Delta = \pi_{25}^{25}. \quad (1.5)$$

Обозначим через π_k^i определитель матрицы, получаемой из $\mathbf{\pi}$ вычеркиванием i -го столбца и k -ой строки ($i, k = 1, 2, \dots, 6$). Тогда функции δ_α ($\alpha = \varepsilon, \mu, \xi, \zeta$) можно представить в виде:

$$\delta_\varepsilon = \pi_2^2 / \Delta, \quad \delta_\mu = \pi_5^5 / \Delta, \quad (1.7)$$

$$\delta_\xi = -\pi_3^6 / \Delta, \quad \delta_\zeta = \pi_5^2 / \Delta.$$

Приложение 2

Величины $a_{\nu\lambda}, b_{\nu\lambda}$ ($\nu, \lambda = p, s$), фигурирующие в граничных условиях (18), имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{pp} &= 1 + [(\chi q_{lz} / k_0) - u_l] L_{ll}, \\ a_{ps} &= L_{ll} - [(\chi s_{lz} / k_0) + w_l] L_{ll}, \\ a_{pp} &= L_{ll} - w_l L_{lt} - t_l + \chi(p_{lz} - s_{lz} L_{ll}) / k_0, \\ a_{sp} &= v_l - u_l L_{lt} + \chi(r_{lz} + q_{lz} L_{ll}) / k_0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} b_{pp} &= q_{zz} L_{ll}, & b_{ps} &= -s_{zz} L_{ll}, \\ b_{sp} &= r_{zz} + q_{pp} L_{ll}, & b_{ss} &= p_{zz} - s_{zz} L_{ll}. \end{aligned}$$

Здесь все функции переменной z в правой части вычисляются при $z = +0$,

$$L_{\sigma\tau} \equiv L_{\sigma\tau}(\chi) = \vec{a}_\sigma \cdot \hat{L}(\vec{\chi}) \cdot \vec{a}_\tau \quad (\sigma, \tau = l, t). \quad (2.2)$$

Литература

1. S. A. Tretyakov, A. H. Sihvola, A. A. Sochava, C. R. Simovski. *J. Electromagn. Waves Applic.* 1998, **12**, pp. 481-497.
2. Л. Фелсен, Н. Маркувиц. Излучение и рассеяние волн. Том 1, том 2. Москва, Мир, 1978, 547 с. (т. 1), 555 с. (т. 2).
3. Н. П. Жук, О. А. Третьяков. *Р Э.* 1985, №5, с. 869-875.
4. A. Sihvola, I. V. Lindell. Helsinki University of Technology. *Electromagnetics Laboratory Report.* 1997, No. 243, pp. 1-12.
5. N. P. Zhuck. *Int. J. Electronics.* 1993, **75**, pp. 141-148.
6. Н. П. Жук. *Радиотехника и Электроника.* 1989, **34**, №12, с. 2512-2518.
7. Ф. И. Федоров. Теория гиротропии. Минск, Наука и техника, 1976.
8. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. Москва, Наука, 1979, 432 с.
9. Н. М. Богомолов, Н. П. Жук. Возбуждение и рассеяние волн в плоскостойких средах. Харьков, ХГУ, 1992, 172 с.
10. В. П. Паламолов. Линейные дифференциальные операторы. Москва, Наука, 1967, 487 с.
11. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Москва, Наука, 1959, 470 с.
12. А. В. Малюскин, В. М. Шульга, С. Н. Шульга. *Радиофизика и Радиоастрономия.* 2000, **5**, №2, с. 158-165.

Green's Tensors of Maxwell's Equations in Plane-Layered Bianisotropic Medium

N. P. Zhuck, A. V. Malyuskin, S. N. Shulga

The novel representations of the dyadic Green's functions of Maxwell's equations in plane-layered bianisotropic medium through scalar potentials are found. The spectral dyadic Green's functions were investigated using theory of generalized functions. The formulas for the regular and singular constituents of spectral Green's functions were obtained in explicit form.