Радиофизика и радиоастрономия, 2000, т. 5, №2, стр. 137-147

УДК 524.354.4-62; 539.1.01

К теории излучения релятивистской заряженной частицы в магнитном поле с искривленными силовыми линиями

Я. М. Соболев

*Радиоастрономический институт НАН Украины,
Украина, 310002, г. Харьков, ул. Краснознаменная, 4
e-mail: sobolev@ira.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 6 сентября 1999 г., после переработки 20 октября 1999 г.

Рассматривается излучение заряженной частицы, движущейся со скоростью, близкой к скорости света, вдоль искривленной магнитной силовой линии. Найдены спектрально-угловое и спектральное распределения в случае, когда ультрарелятивистская частица с отличным от нуля питч-углом теряет энергию за счет двух механизмов излучения: изгибного и ондуляторного. Показано, что в магнитосфере пульсара есть области, в которых справедлив рассматриваемый механизм излучения.

Розглядається випромінювання зарядженої частинки, що рухається зі швидкістю, близькою до швидкості світла, вздовж кривої магнітної силової лінії. Знайдено спектрально-кутовий та спектральний розподіли у випадку, коли ультрарелятивістська частинка з відмінним від нуля пітч-кутом втрачає енергію за рахунок двох механізмів випромінювання: згинного та ондуляторного. Показано, що в пульсарній магнітосфері є зони, у яких працює розглянутий механізм випромінювання.

1. Введение

Синхротронный механизм излучения релятивистских электронов нашел широкое применение при объяснении наблюдаемого космического излучения. Изгибное излучение (curvature radiation) – основной механизм при интерпретации наблюдаемого пульсарного излучения [1,2,3]. В генераторах высокочастотного электромагнитного излучения используется ондуляторный механизм, предложенный в [4,5].

Формулы, описывающие излучение электрона, движущегося по винтовой траектории в однородном магнитном поле, получены в работе [6] только в 1969 г., несмотря на то, что магнитотормозное излучение электрона при круговом движении описано Шоттом [7] еще в 1912 г. В работе [8] когерентное изгибное излучение было предложено в качестве механизма излучения пульсаров. Магнитодрейфовая природа изгибного излучения выяснена в работе [9], квантовый вывод формул изгибного излучения дан в работе [10]. В последнее время возник интерес к изучению излучения ультрарелятивистского электрона, движущегося по изогнутой винтовой траектории в неоднородном (искривленном) магнитном поле [11]. Это излучение авторы [11] назвали синхротронно-изгибным (synchrotron-curvature): его предельными случаями являются синхротронный и изгибный механизмы излучения.

Однако авторы работы [11] не рассмотрели случай, когда при движении ультрарелятивистского электрона по винтовой траектории, навивающейся на криволинейную магнитную силовую линию, возникает ондуляторное излучение. Ондуляторным называют излучение релятивистских заряженных частиц при квазипериодическом движении в различных магнитных системах* [12]. Основным отличием ондуляторного механизма излучения от синхротронного (хотя и близкого по своей природе к последнему) является его узкополосность, которая возникает вследствие интерференции излучения от ряда периодически повторяющихся участков траектории.

В настоящей работе рассмотрен механизм излучения релятивистской заряженной частицы, движущейся со скоростью, близкой к скорости света, по винтовой траектории, навивающейся на искривленную силовую линию магнитного поля, в условиях, когда вклад в излучение дают несколько ларморовских витков. Соответствующие условия можно сформулировать следующим образом. Если радиус кривизны траектории частицы при малых питч-углах (меньших ширины диаграммы направленности излучения) сравним с радиусом кривизны магнитной силовой линии, то реализуется синхротронно-изгибный механизм излучения [11]. Случай, когда кривизна траектории значительно больше кривизны магнитных силовых линий (при малых питч-углах), рассмотрен в настоящей работе.

Частица считается ультрарелятивистской, магнитные силовые линии аппроксимируются

---
* Такова же природа излучения, предложенного в работе [13] для объяснения центральной (core) компоненты пульсарного излучения.

окружностями, потери энергии частицы на излучение не учитываются.

2. Траектория частицы

Полагаем, что ведущий центр движется по окружности радиуса R со скоростью $v_\parallel$. Выберем систему координат так, чтобы магнитные силовые линии лежали в плоскости x, y. Траектория частицы задается радиус-вектором [11]

$$\mathbf{r} = (R + r_B \cos\omega_B t)\sin\Omega t \cdot \mathbf{i} + (R + r_B \cos\omega_B t)\cos\Omega t \cdot \mathbf{j} - r_B \sin\omega_B t \cdot \mathbf{k}, \qquad (1)$$

где $\Omega = v_\parallel / R$ – угловая скорость движения ведущего центра; $\omega_B = e_\alpha B/(mc\gamma)$ – угловая скорость вращения заряда вокруг траектории ведущего центра; B – величина магнитного поля; e_α, m, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ – заряд, масса и лоренц-фактор частицы сорта α; $\beta = v/c$; $r_B = |v_\perp / \omega_B|$ – радиус ларморовской окружности; **i**, **j**, **k** – орты декартовой системы координат. Частица движется под питч-углом ψ_p к направлению магнитного поля; $\operatorname{tg}\psi_p = v_\perp / v_\parallel$; лоренц-фактор частицы $\gamma >> 1$, $\gamma_\parallel = (1-\beta_\parallel^2)^{-1/2}$, $\beta_\parallel = v_\parallel / c$.

Ультрарелятивистская частица излучает в пределах угла $\sim 1/\gamma$ в направлении своего движения. Если угол отклонения частицы, движущейся во внешнем электромагнитном поле, больше ширины диаграммы направленности излучения, то излучение происходит в основном с малого участка траектории в пределах угла $\sim 1/\gamma$. Этот участок траектории можно аппроксимировать окружностью и рассматривать излучение как синхротронное при круговом движении по окружности с радиусом, равным радиусу кривизны траектории на данном участке [14].

Вычислим радиус кривизны r_c траектории (1). В приближении $r_B << R$ находим:

$$r_c = \frac{\left(v_\perp^2 + v_\parallel^2\right)^{3/2}}{\omega_B v_\perp v_\parallel \left[\left(1 + \frac{v_\perp^2}{v_\parallel^2}\right)\left(1 + 2\frac{\Omega v_\parallel}{\omega_B v_\perp}\cos\omega_B t\right) + \frac{\Omega^2 v_\parallel^2}{\omega_B^2 v_\perp^2}\right]^{1/2}} \qquad (2)$$

Введем параметр

$$N = \frac{|\omega_B|}{\gamma_\parallel \Omega}, \qquad (3)$$

пропорциональный числу оборотов заряженной частицы вокруг силовой линии внешнего магнитного поля на участке траектории длиной $R/\gamma_\parallel$. Действительно, частица проходит отрезок окружности $R/\gamma_\parallel$ за время $\Delta t \sim R/(\gamma_\parallel v_\parallel) = 1/(\gamma_\parallel \Omega_\parallel)$, совершая при этом $\Delta t/(2\pi / |\omega_B|) = N/(2\pi)$ оборотов. С другой стороны, набег фазы $|\omega_B|\Delta t = N$.

Как видно из выражения (2), радиус кривизны траектории частицы зависит от величины

$$\frac{\omega_B v_\perp}{\Omega v_\parallel} = \frac{\omega_B \operatorname{tg}\psi_p}{\Omega} \equiv N\varepsilon_\perp. \qquad (4)$$

В формуле (4) введен параметр $\varepsilon_\perp$, выражающий питч-угол в долях угла $1/\gamma_\parallel$, $\psi_p = \varepsilon_\perp / \gamma_\parallel$. При этом, как следует из определения лоренц-фактора γ, $\varepsilon_\perp = 1$ в случае $\gamma >> \gamma_\parallel >> 1$ и $\varepsilon_\perp < 1$, когда $\gamma \cong \gamma_\parallel$. Из выражения (2) получаем:

$$r_c = \begin{cases} \dfrac{c}{|\omega_B|\sin\psi_p} = \dfrac{R}{N\varepsilon_\perp} & \text{при } N\varepsilon_\perp > 1, \\[2ex] \dfrac{c}{\Omega} = R, & \text{при } N\varepsilon_\perp < 1. \end{cases} \qquad (5)$$

Если $\varepsilon_\perp = 1$, то параметр N показывает во сколько раз радиус кривизны траектории меньше радиуса кривизны силовой линии магнитного поля. Условие того, что радиус кривизны траектории значительно меньше R, эквивалентно требованию $N\varepsilon_\perp >> 1$.

Режимы излучения релятивистской ($\gamma_\parallel >> 1$) частицы при уменьшении питч-угла связаны с величиной параметра N, определяемой формулой (3), что схематически показано на рис. 1. В случае, когда $N >> 1$ (рис. 1, а), имеем следующую последовательность механизмов излучения (от больших частот к меньшим): синхротронное – ондуляторное – изгибное излучение. Для синхротронного излучения полная энергия частицы превосходит продольную энергию, $\gamma >> \gamma_\parallel$, питч-угол $\psi_p \sim 1/\gamma_\parallel$ ($\varepsilon_\perp = 1$) и радиус кривизны траектории либо в N (N>1) раз меньше радиуса кривизны магнитной силовой линии, $r_c = R/N$, либо $r_c \cong R$. Излучение происходит с участка траектории длиной r_c/γ, ширина диаграммы направленности $\sim 1/\gamma$, ее ось наклонена под углом $\sim 1/\gamma_{\parallel}$ к направлению магнитного поля. Картина аналогична синхротронному излучению при винтовом движении в однородном магнитном поле [6]. При меньших питч-углах, $\varepsilon_{\perp} \equiv \psi_p \gamma_{\parallel} < 1$, полная энергия частицы $\gamma \cong \gamma_{\parallel}$. Ширина диаграммы направленности $\sim 1/\gamma_{\parallel}$. При выполнении неравенств $N\varepsilon_{\perp} \gg 1$ и $r_c \ll R$ на участке траектории длиной $\sim R/\gamma_{\parallel}$, с которого собирается излучение, частица совершает $N > 1$ оборотов вокруг магнитной силовой линии. Для того чтобы отличать этот случай от ондуляторного излучения в магнитном поле с прямыми силовыми линиями [15], будем называть режим излучения при движении ведущего центра частицы вдоль искривленной магнитной силовой линии режимом ондуляторно-изгибного излучения. При дальнейшем уменьшении питч-угла ψ_p, в случае выполнения неравенства $N\varepsilon_{\perp} < 1$, радиус кривизны траектории $r_c \sim R$. В этом пределе преобладают потери энергии частицы за счет изгибного излучения. Если $N \leq 1$, радиус кривизны траектории $r_c = R$ и для малых питч-углов, $\varepsilon_{\perp} < 1$, имеем механизм излучения кривизны.

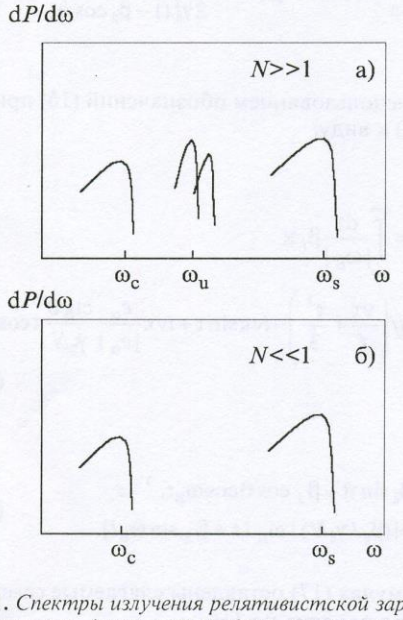

Рис. 1. *Спектры излучения релятивистской заряженной частицы, движущейся вдоль искривленной магнитной силовой линии: а) синхротронное, ондуляторное, изгибное излучение; б) ондуляторонное и изгибное излучение.* $\omega_c = \tilde{a}_{\parallel}^3 \Omega$, $\omega_u = \tilde{a}_{\parallel}^2 |\dot{u}_B| = 2N\dot{u}_c$, $\omega_s = \tilde{a}_{\parallel}^3 |\dot{u}_B| = (\tilde{a}^3/\tilde{a}_{\parallel}^2) N\dot{u}_c$ *– характерные частоты изгибного, ондуляторного и синхротронного излучения соответственно*

Режимы $N > 1$, $N < 1$, $\varepsilon_{\perp} = 1$; $N \ll 1$, $\varepsilon_{\perp} < 1$ исследованы в работе [11]. Случай $N \geq 1$, $\varepsilon_{\perp} < 1$ рассматривается в настоящей работе.

3. Спектрально-угловое распределение излучения

Спектрально-угловое распределение энергии, излучаемой частицей в дальней зоне (энергия, излучаемая в телесный угол между o и $o + do$ в интервале частот между ω и $\omega + d\omega$) имеет вид [14]:

$$\frac{dE}{do\, d\omega} = \frac{cR_0^2}{4\pi^2} \left|\mathbf{E}(\omega)\right|^2, \tag{6}$$

где $\mathbf{E}(\omega)$ – фурье-компонента электрического поля в волновой зоне,

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{-i\omega e_{\alpha}}{cR_0} \exp\{i\omega R_0/c\} \times \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{n}[\mathbf{n},\beta]] \exp\{i\omega(t - \mathbf{nr}/c)\} dt. \tag{7}$$

Здесь R_0 – расстояние до наблюдателя; $\mathbf{n}$ – направление на наблюдателя; $\beta = \mathbf{v}/c$; $\mathbf{v}$ – скорость частицы; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор (1).

Для описания поляризационных свойств излучения выберем два ортогональных направления в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$. Орт $\mathbf{e}_{\pi}$ находится в плоскости, образованной осью z и направлением $\mathbf{n}$, а орт $\mathbf{e}_{\sigma}$ перпендикулярен этой плоскости: $\mathbf{e}_{\pi} = [\mathbf{n}[\mathbf{n},\mathbf{k}]]/|[\mathbf{n},\mathbf{k}]|$, $\mathbf{e}_{\sigma} = [\mathbf{k},\mathbf{n}]/|[\mathbf{k},\mathbf{n}]|$. Орты $\mathbf{e}_{\pi}$, $\mathbf{e}_{\sigma}$, $\mathbf{n}$ образуют правую тройку.

Разлагая электромагнитное поле (7) по ортам $\mathbf{e}_{\pi}$, и $\mathbf{e}_{\sigma}$, получаем

$$E_i(\omega) = \frac{e_{\alpha}}{cR_0} \exp\{i\omega R_0/c\} (i\omega) b_i(\omega), \tag{8}$$

где

$$b_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_i \exp\{i\omega(t - \mathbf{nr}/c)\} dt. \tag{9}$$

Подставляя выражения (8) в формулу (6), находим спектрально-угловое распределение излучения для двух поляризаций:

$$\frac{dE_i}{do d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|b_i(\omega)\right|^2, \quad i = \pi, \sigma. \tag{10}$$

Пусть вектор **n** лежит в плоскости (x, z), тогда

$$\mathbf{n} = (\cos\vartheta,\ 0,\ \sin\vartheta)\,; \tag{11}$$

$$\mathbf{e}_\pi = (\sin\vartheta,\ 0,\ -\cos\vartheta)\,, \quad \mathbf{e}_\sigma = (0,1,0)\,. \tag{12}$$

Направлениям **n** над плоскостью $z = 0$ (под плоскостью $z = 0$) соответствуют углы $\vartheta>0$ ($\vartheta<0$).

Дифференцируя радиус-вектор (1) по времени и воспользовавшись выражением (12), находим проекции вектора β на орты $\mathbf{e}_\pi$ и $\mathbf{e}_\sigma$:

$$\beta_\pi = [\beta_\parallel(1+\frac{r_B}{R}\cos\omega_B t)\cos\Omega t -$$
$$-\beta_\perp \sin\omega_B t \sin\Omega t]\sin\vartheta + \beta_\perp\cos\vartheta\cos\omega_B t, \tag{13}$$
$$\beta_\sigma = -[\beta_\parallel(1+\frac{r_B}{R}\cos\omega_B t)\sin\Omega t + \beta_\perp \sin\omega_B t\cos\Omega t].$$

В формулах (13) и ниже предполагается, что $v_\perp = \omega_B r_B$, т. е. $v_\perp/|v_\perp| = e_\alpha/|e_\alpha|$.

При помощи выражений (1), (11) находим показатель экспоненты в формуле (9):

$$t - \mathbf{nr}/c = [1-\beta_\parallel\cos\vartheta(1+\frac{r_B}{R}\cos\omega_B t)]t +$$
$$+\frac{\beta_\perp}{\omega_B}\sin\vartheta\sin\omega_B t + \beta_\parallel\cos\vartheta(1+\frac{r_B}{R}\cos\omega_B t)\Omega^2 t^3/6. \tag{14}$$

Поскольку при релятивистском движении частицы вдоль магнитного поля $\beta_\parallel \to 1$, то вклад в излучение дает малый участок длиной порядка $R/\gamma_\parallel$ вдоль магнитной силовой линии. Поэтому в формуле (14) проведено разложение по $\Omega t \sim 1/\gamma_\parallel \ll 1$.

В режиме синхротронного излучения $\gamma \gg \gamma_\parallel$, питч-угол $\psi_p \sim 1/\gamma_\parallel$. Как следует при этом из выражения (2), $r_c = c/(\omega_B \sin\psi_p)$ и основной вклад в интенсивность дают времена $|\omega_B t| \sim |\omega_B| r_c/(\gamma_c) \sim \gamma_\parallel/\gamma \ll 1$. Поэтому выражения (13), (14) можно разложить по малым $|\omega_B t|$ и $\Omega t \ll 1$ до членов t^3. Подставляя полученные выражения в формулы (9), (10), находим спектрально-угловое распределение синхротронного излучения. Как следует из вышеприведенного, такое разложение по малым $\omega_B t$ и Ωt справедливо также и в случае, когда $N \ll 1$. Отсюда следует, что результаты работы [11], полученные с использованием разложения выражения (14) по $\omega_B t \ll 1$, справедливы для синхротронного предела $\varepsilon_\perp = 1$; а для малых питч-углов $\varepsilon_\perp < 1$ – для случая $N \ll 1$.

4. Ондуляторно-изгибное излучение

Пусть $N \gg 1$, но $\gamma \approx \gamma_\parallel$, $\psi_p = \varepsilon_\perp/\gamma_\parallel$, $\varepsilon_\perp < 1$.

При этом в выражении (14) $\Omega t \ll 1$, но $|\omega_B| t \sim |\omega_B| R/(\gamma_\parallel c) \sim N \gg 1$.

Введем обозначения:

$$\nu = (1-\beta_\parallel\cos\vartheta)(\omega/|\omega_B|)\,,$$
$$\kappa = -\beta_\perp\sin\vartheta/(1-\beta_\parallel\cos\vartheta)\,, \tag{15}$$
$$f = \frac{\nu}{N^2}f(\vartheta)\,, \qquad f(\vartheta) = \frac{\beta_\parallel\cos\vartheta}{2\gamma_\parallel^2(1-\beta_\parallel\cos\vartheta)}\,.$$

С использованием обозначений (15) приведем (9) к виду:

$$b_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{|\omega_B|}\beta_i \times$$
$$\times\exp\left\{if\left(\frac{\nu\tau}{f}+\frac{\tau^3}{3}\right) - i\nu\kappa\sin\tau + i\nu\kappa\frac{e_\alpha}{|e_\alpha|}\frac{\mathrm{ctg}\,\vartheta}{\gamma_\parallel N}\tau\cos\tau\right\}, \tag{16}$$

где

$$\beta_\pi = \beta_\parallel\sin\vartheta + \beta_\perp\cos\vartheta\cos\omega_B t,$$
$$\beta_\sigma = -[(\beta_\parallel/\gamma_\parallel N)\,|\,\omega_B\,|\,t + \beta_\perp\sin\omega_B t]. \tag{17}$$

В формулах (17) оставлены слагаемые самого низкого порядка по $1/\gamma_\parallel$.

В синхротронном пределе излучения ($\varepsilon_\perp = 1$) 1-е, 3-е и 4-е слагаемые в показателе экспоненты в выражении (16) одного порядка малости, кроме того $\tau = |\omega_B t| \ll 1$. В этом случае $\sin\tau$ и $\cos\tau$ в формуле (16) можно разложить по малым $\tau \ll 1$ (что и сделано в работе [11]).

При малых питч-углах ($\varepsilon_\perp < 1$) имеем $\nu\kappa \sim \nu\varepsilon_\perp$ и $\tau \sim N$. Если $N << 1$, то разложение по малым τ по-прежнему справедливо. Если $N > 1$, то такое разложение (по малым τ) уже не адекватно задаче. Поэтому представим экспоненту в выражении (16) в виде ряда по степеням $\nu\kappa$ (см. Приложение 1). Формулы (П3), (П4) описывают излучение частицы при произвольных значениях параметра N. Рассмотрим случай $N >> 1$. Оставляя в выражениях (П3), (П4) слагаемые нулевого, первого и второго порядка по $\varepsilon_\perp$, имеем:

$$b_\pi = \frac{2\pi}{|\omega_B|}\left\{\beta_\parallel \sin\vartheta \frac{\mathrm{Ai}(\zeta_0)}{f^{1/3}} + \right.$$
$$+\frac{|\nu\kappa|}{2}\frac{\beta_\parallel(\nu\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)-\cos\vartheta}{\nu\sin\vartheta}\frac{\mathrm{Ai}(\zeta_1)}{f^{1/3}}+\left(\frac{\nu\kappa}{2}\right)^2\times$$
$$\left.\times\left[\frac{\beta_\parallel((\nu/2)\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)-\cos\vartheta}{\nu\sin\vartheta}\frac{\mathrm{Ai}(\zeta_2)}{f^{1/3}}-2\beta_\parallel\sin\vartheta\frac{\mathrm{Ai}(\zeta_0)}{f^{1/3}}\right]\right\}, \tag{18}$$

$$b_\sigma = \frac{2\pi i}{|\omega_B|}\left\{\frac{\beta_\parallel}{\gamma_\parallel N}\frac{\mathrm{Ai}'(\zeta_0)}{f^{2/3}} + \right.$$
$$+\frac{|\nu\kappa|}{2}\frac{e_\alpha}{|e_\alpha|}\frac{1-\beta_\parallel\cos\vartheta}{\nu\sin\vartheta}\frac{\mathrm{Ai}(\zeta_1)}{f^{1/3}}+$$
$$\left.+\left(\frac{\nu\kappa}{2}\right)^2\frac{e_\alpha}{|e_\alpha|}\frac{1-\beta_\parallel\cos\vartheta}{\nu\sin\vartheta}\left[\frac{\mathrm{Ai}(\zeta_2)}{f^{1/3}}-\frac{2\,\mathrm{Ai}(\zeta_0)}{f^{1/3}}\right]\right\}. \tag{19}$$

где $\zeta_n = (\nu - n)\big/ f^{1/3}$.

Первое слагаемое в формулах (18), (19) описывает вклад изгибного излучения, второе – вклад первой гармоники ондуляторного излучения, слагаемое в квадратных скобках – вклад второй гармоники ондуляторного излучения и поправку $\sim \varepsilon_\perp^2$ к излучению кривизны (нулевой гармонике). (Отметим, что при прямолинейном движении нет нулевой гармоники.)

Для нулевой гармоники $\zeta_0 > 0$, функции Эйри выражаются через функции Макдональда [16]. Подставляя полученные выражения в формулу (10) и пренебрегая слагаемыми второго порядка по $\varepsilon_\perp$, получаем спектрально-угловое распределение изгибного излучения:

$$\frac{dE_\pi}{do\,d\omega} = \frac{e_\alpha^2}{3\pi^2 c}\frac{\omega^2}{\omega_B^2}\frac{N^2}{\gamma_\parallel^2}\psi^2(1+\psi^2)\,\mathrm{K}_{1/3}^2(\eta),$$
$$\frac{dE_\sigma}{do\,d\omega} = \frac{e_\alpha^2}{3\pi^2 c}\frac{\omega^2}{\omega_B^2}\frac{N^2}{\gamma_\parallel^2}(1+\psi^2)^2\,\mathrm{K}_{2/3}^2(\eta), \tag{20}$$

где $\psi = \gamma_\parallel\vartheta$, $\eta = (1/3)(\omega/(\gamma_\parallel^3\Omega))(1+\psi^2)^{3/2}$.

При $N>>1$ функция $\mathrm{Ai}(\zeta_n)/f^{1/3}$ ($n \neq 0$) имеет резкий максимум вблизи $\nu = n$, поэтому в спектре излучения появляются локальные максимумы на частотах

$$\omega_n = \frac{n\,|\,\omega_B\,|}{1-\beta_\parallel\cos\vartheta} = \frac{n\,2\gamma_\parallel^2\,|\,\omega_B\,|}{1+\psi^2}.$$

Характерные частоты изгибного и ондуляторного излучения относятся как $\gamma_\parallel^2|\omega_B|/(\gamma_\parallel^3\Omega) \sim N$. Поэтому вклады излучения кривизны и ондуляторного излучения можно рассматривать раздельно.

Полагая в формулах (18), (19) $\nu = n$ для множителей при $\mathrm{Ai}(\zeta_n)$, получаем:

$$b_\pi = \frac{2\pi}{|\,\omega_B\,|}\frac{\kappa}{2}\frac{\beta_\parallel - \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{1}{f^{1/3}}\left[\mathrm{Ai}(\zeta_1)+\kappa\,\mathrm{Ai}(\zeta_2)\right], \tag{21}$$

$$b_\sigma = \frac{2\pi i}{|\,\omega_B\,||\,e_\alpha\,|}\frac{e_\alpha}{}\frac{\kappa}{2}\frac{1-\beta_\parallel\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{1}{f^{1/3}}\left[\mathrm{Ai}(\zeta_1)+\kappa\mathrm{Ai}(\zeta_2)\right], \tag{22}$$

где $\zeta_n = (\nu - n)/f^{1/3} = [(\nu - n)/\nu^{1/3}](1+\psi^2)^{1/3}N^{2/3}$, $\kappa = -2\,\varepsilon_\perp\,\psi/(1+\psi^2)$.

Подставляя выражения (21), (22) в формулу (10) и разлагая по малым углам ϑ, находим спектрально-угловое распределение ондуляторного излучения:

$$\frac{dE_\pi}{do\,d\omega} = \frac{e_\alpha^2}{4c}\frac{\omega^2}{\omega_B^2}\frac{\varepsilon_\perp^2}{\gamma_\parallel^2}\left(\frac{\psi^2-1}{1+\psi^2}\right)^2\frac{1}{f^{2/3}}\left|\mathrm{Ai}(\zeta_1)+\kappa\mathrm{Ai}(\zeta_2)\right|^2,$$
$$\frac{dE_\sigma}{do\,d\omega} = \frac{e_\alpha^2}{4c}\frac{\omega^2}{\omega_B^2}\frac{\varepsilon_\perp^2}{\gamma_\parallel^2}\frac{1}{f^{2/3}}\left|\mathrm{Ai}(\zeta_1)+\kappa\mathrm{Ai}(\zeta_2)\right|^2. \tag{23}$$

Видно, что вклад второй гармоники мал в силу малости $\varepsilon_\perp$.

В случае ондуляторного излучения при движении ведущего центра частицы вдоль прямой магнитной силовой линии в формуле (23) множитель $\left|\mathrm{Ai}(\zeta_1)/f^{1/3}\right|^2$ заменяется на $\left|\sin\pi\nu N/\sin\pi\nu\right|^2$ [15].

4.1. Поляризация излучения

Воспользовавшись формулой (8) и выражениями (18), (19), (21), (22), находим напряженность электрического поля излучения.

Для изгибного излучения

$$\mathbf{E}\propto\psi(1+\psi^2)\,\mathrm{K}_{1/3}(\eta)\mathbf{e}_\pi-i(1+\psi^2)\,\mathrm{K}_{2/3}(\eta)\mathbf{e}_\sigma\,. \tag{24}$$

Естественно, что это выражение полностью совпадает с соответствующим выражением в случае синхротронного излучения [6].

Для ондуляторного излучения

$$\mathbf{E}\propto(\psi^2-1)\mathbf{e}_\pi+i\frac{e_\alpha}{|e_\alpha|}(1+\psi^2)\mathbf{e}_\sigma\,. \tag{25}$$

Как видно из формулы (24), изгибное излучение над плоскостью z = 0 ($\psi>0$) левополяризовано и направление вращения электрического вектора совпадает с направлением вращения частицы при движении по окружности радиуса R (левый винт) относительно направления **n**. Ниже плоскости $z=0$ ($\psi<0$) изгибное излучение правополяризовано. В этом случае вращение частицы относительно **n** "правовинтовое" [6].

Из выражения (25) следует, что ондуляторное излучение позитрона в направлениии внешнего магнитного поля, $\psi=0$, имеет левую круговую поляризацию, а излучение электрона – правую круговую поляризацию. Направление круговой поляризации ондуляторного излучения совпадает с направлением вращения заряженной частицы вокруг силовой линии магнитного поля: "левовинтовое" вращение – для позитрона, "правовинтовое" – для электрона.

4.2. Спектральное распределение излучения

Вычислим мощность, излучаемую частицей в единичном интервале частот. Поскольку излучение сосредоточено вблизи плоскости $z=0$ ($\vartheta\sim1/\gamma_\parallel$), то для телесного угла возьмем выражение $\mathrm{d}o=2\pi\,\mathrm{d}\psi/\gamma_\parallel$. Усреднив выражения (20) по периоду между последовательными импульсами $2\pi/\Omega$ и интегрируя по телесному углу, получаем спектральную мощность изгибного излучения P^{cur}:

$$\frac{\mathrm{d}P_\pi^{\mathrm{cur}}}{\mathrm{d}y_\mathrm{c}}=\frac{9\sqrt3}{16\pi}Wy_\mathrm{c}\left[\int\limits_{y_\mathrm{c}}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{K}_{5/3}(x)-\mathrm{K}_{2/3}(y_\mathrm{c})\right],$$
$$\frac{\mathrm{d}P_\sigma^{\mathrm{cur}}}{\mathrm{d}y_\mathrm{c}}=\frac{9\sqrt3}{16\pi}Wy_\mathrm{c}\left[\int\limits_{y_\mathrm{c}}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{K}_{5/3}(x)+\mathrm{K}_{2/3}(y_\mathrm{c})\right], \tag{26}$$

где $y_\mathrm{c}=\omega/\omega_\mathrm{c}$, $\omega_\mathrm{c}=(3/2)\gamma_\parallel^3\Omega$, $W=(2/3)(e_\alpha^2/c)\Omega^2\gamma_\parallel^4$ – полная мощность, теряемая электроном при изгибном излучении.

Суммируя выражения (26), имеем:

$$\frac{\mathrm{d}P^{\mathrm{cur}}}{\mathrm{d}y_\mathrm{c}}=Wy_\mathrm{c}\frac{9\sqrt3}{8\pi}\int\limits_{y_\mathrm{c}}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{K}_{5/3}(x)\,.$$

Это обычное выражение для синхротронного излучения электрона при круговом движении по окружности [6], но радиус окружности равен радиусу кривизны магнитной силовой линии.

Для первой гармоники ондуляторного излучения из выражений (23), воспользовавшись формулами (П6), (П7) из Приложения 2, получаем:

$$\frac{\mathrm{d}P_\pi^{\mathrm{u1}}}{\mathrm{d}\xi}=3W(N\varepsilon_\perp)^2\xi\times$$
$$\times\int\limits_\xi^{+\infty}\mathrm{d}x\left[1-2\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1/2}+2\left(\frac{\xi}{x}\right)^{3/2}\right]\frac{1}{(2f)^{1/3}}\mathrm{Ai}\Big(2\frac{x-1}{(2f)^{1/3}}\Big),$$
$$\frac{\mathrm{d}P_\sigma^{\mathrm{u1}}}{\mathrm{d}\xi}=3W(N\varepsilon_\perp)^2\xi\int\limits_\xi^{+\infty}\mathrm{d}x\frac{1}{(2f)^{1/3}}\mathrm{Ai}\Big(2\frac{x-1}{(2f)^{1/3}}\Big), \tag{27}$$

где $\xi=\omega/\omega_\mathrm{u}$, $\omega_\mathrm{u}=2\gamma_\parallel^2|\omega_\mathrm{B}|$.

И аналогично для второй гармоники ондуляторного излучения, воспользовавшись формулами (П8), (П9) для интегрирования по телесному углу, получаем:

$$\frac{\mathrm{d}P_\pi^{\mathrm{u2}}}{\mathrm{d}\xi}=3W(N\varepsilon_\perp)^2\varepsilon_\perp^2\xi\int\limits_\xi^{+\infty}\mathrm{d}x\times$$
$$\times\left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1/2}-5\left(\frac{\xi}{x}\right)^{3/2}+9\left(\frac{\xi}{x}\right)^{5/2}-5\left(\frac{\xi}{x}\right)^{7/2}\right]\times$$
$$\times\frac{1}{(2f)^{1/3}}\mathrm{Ai}\left(2\frac{x-2}{(2f)^{1/3}}\right) \tag{28}$$

$$\frac{dP_\sigma^{u2}}{d\xi} = 6W(N\varepsilon_\perp)^2\varepsilon_\perp^2\xi\int\limits_\xi^{+\infty}dx\left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1/2}-\left(\frac{\xi}{x}\right)^{3/2}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{(2f)^{1/3}}\,\mathrm{Ai}\left(2\frac{x-2}{(2f)^{1/3}}\right).$$

Для того, чтобы оценить интегралы (27), (28), воспользуемся тем, что при $N\to\infty$ выражение $(1/f^{1/3})\mathrm{Ai}((x-n)/f^{1/3})$ аппроксимирует δ-функцию, т. е.

$$\int\limits_0^\infty dx\, g(x)\frac{1}{(2f)^{1/3}}\,A\mathrm{i}\left(2\frac{x-n}{(2f)^{1/3}}\right)\cong\frac{1}{2}g(n). \qquad (29)$$

С учетом (29) спектральное распределение (27), (28) ондуляторного излучения на 1-й и 2-й гармониках можно записать в виде:

$$\frac{dP_\pi^{u1}}{d\omega}=\frac{3}{4}W\frac{(N\varepsilon_\perp)^2}{\gamma_\parallel^2\,|\omega_B|}\xi\left(1-2\xi^{1/2}+2\xi^{3/2}\right)\theta(1-\xi),$$

$$\frac{dP_\sigma^{u1}}{d\omega}=\frac{3}{4}W\frac{(N\varepsilon_\perp)^2}{\gamma_\parallel^2\,|\omega_B|}\xi\theta(1-\xi). \qquad (30)$$

Здесь $\theta(x)$ – ступенчатая функция, $\theta(x) = \{1$ при $x \ge 0$; 0 при $x < 0\}$.

Для второй гармоники получаем:

$$\frac{dP_\pi^{u2}}{d\omega}=\frac{3}{2}W\frac{(N\varepsilon_\perp)^2}{\gamma_\parallel^2}\frac{\varepsilon_\perp^2}{|\omega_B|}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{3/2}\times$$

$$\times\left[1-5\frac{\xi}{2}+9\left(\frac{\xi}{2}\right)^2-5\left(\frac{\xi}{2}\right)^3\right]\theta(2-\xi),$$

$$\frac{dP_\sigma^{u2}}{d\omega}=\frac{3}{2}W\frac{(N\varepsilon_\perp)^2}{\gamma_\parallel^2}\frac{2\varepsilon_\perp^2}{|\omega_B|}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{3/2}\left(1-\frac{\xi}{2}\right)\theta(2-\xi). \qquad (31)$$

Чтобы найти полную мощность, теряемую ультрарелятивистской частицей посредством изгибного и ондуляторного излучения, проинтегрируем спектральные распределения (26), (30), (31) по частоте.

Для изгибного излучения получаем:

$$P_\pi=\frac{1}{8}W, \qquad P_\sigma=\frac{7}{8}W.$$

Для первой гармоники ондуляторного излучения

$$P_\pi^{u1}=0{,}41W(N\varepsilon_\perp)^2,\ P_\sigma^{u1}=0{,}75W(N\varepsilon_\perp)^2.$$

Как видно, мощности π- и σ-поляризаций для ондуляторного излучения различаются значительно меньше, чем для изгибного излучения.

Для второй гармоники ондуляторного излучения

$$P_\pi^{u2}=0.38W(N\varepsilon_\perp)^2\varepsilon_\perp^2,\ P_\sigma^{u2}=1.37W(N\varepsilon_\perp)^2\varepsilon_\perp^2.$$

Суммарная мощность ондулятороного излучения

$$P^{u1}=1.16W(N\varepsilon_\perp)^2,\ P^{u2}=1.75W(N\varepsilon_\perp)^2\varepsilon_\perp^2 \qquad (32)$$

для первой и второй гармоник соответственно.

5. Обсуждение

Таким образом, при N>1 участок траектории, с которого происходит излучение, состоит из N витков вокруг силовой линии магнитного поля. Это приводит к тому, что при малых питч-углах, $\psi p = \varepsilon_\perp/\gamma\| < 1/\gamma\|$, $\gamma\approx\gamma\|$, ультрарелятивистская частица, ведущий центр которой движется вдоль искривленной магнитной силовой линии, теряет энергию за счет двух механизмов излучения: изгибного и ондуляторного. Как видно из формулы (32), при $N\varepsilon_\perp > 1$ ондуляторный канал потери энергии может быть основным. Излучение имеет характерную частоту $\omega u = 2\gamma_\parallel^2\,|\omega B|$, профиль линии определяется интерференцией излучения от N витков траектории вокруг магнитной силовой линии и описывается функциями Эйри. При дальнейшем уменьшении питч-угла, $N\varepsilon_\perp < 1$, основные потери обусловлены изгибным механизмом излучения.

Оценим величины характерных параметров в магнитосфере пульсара. Для дипольного магнитного поля радиус кривизны магнитной силовой линии задается выражением:

$$R=\frac{2}{3}\sqrt{r_{eq}r}\,, \qquad (33)$$

где r_{eq} – расстояние от звезды, на котором данная магнитная силовая линия пересекает экваториальную плоскость, r – расстояние от центра звезды.

На магнитной силовой линии, разделяющей области открытых и замкнутых магнитных силовых линий [17], $r_{eq}=r_L$. Радиус светового цилиндра $r_L\equiv c/\Omega_*$, где Ω_* – угловая скорость вращения нейтронной звезды. Подставляя $r_{eq}=r_L$ в формулу (33), находим, что в области открытых магнитных силовых линий R больше некоторого критического значения $R_C\equiv(2/3)\sqrt{r_L r}$. При этом угловая скорость Ω, соответствующая движению релятивистской частицы вдоль магнитной силовой линии,

$$\Omega < \Omega_C \equiv \frac{3}{2}\Omega_* \sqrt{\frac{r_L}{r}} . \qquad (34)$$

Зависимость величины магнитного поля от расстояния r имеет вид:

$$B = B_0 \left(\frac{r_*}{r}\right)^3 , \qquad (35)$$

где $B_0 = 10^{12}$ Гс – магнитное поле на поверхности звезды, $r_* = 10^6$ см – радиус нейтронной звезды.

Подставляя выражения (34), (35) в определение (3) параметра N, находим, что в области открытых магнитных силовых линий

$$N \geq \frac{N_0}{\gamma\gamma_\parallel}\left(\frac{r_*}{r}\right)^{5/2}, \quad N_0 = \frac{4\cdot 10^{19}}{3}\left(\frac{\Omega_*}{1\text{Гц}}\right)^{-1}\left(\frac{\Omega_* r}{c}\right)^{1/2}$$

Для пульсаров с периодом порядка 1 с

$$N \geq \begin{cases} 3\cdot 10^{16} \,/(\gamma\gamma_\parallel), & r = r_*; \\ 3\cdot 10^{11} \,/(\gamma\gamma_\parallel), & r = 100 r_*. \end{cases} \qquad (36)$$

Как видно из (36), в магнитосфере пульсара параметр N может принимать значения как больше, так и меньше единицы.

В магнитосфере пульсара электронно-позитронная плазма генерируется либо вблизи поверхности звезды, $r = r_*$ [18], либо во внешних зазорах [19]. Выберем, как и в работе [11], $B = 10^6$ Гс, $R = 10^8$ см. Из формул (36) следует, что при $\gamma_\parallel = 10^2 \div 10^5$ параметр $N = 10^7 \div 10^1$.

На рис. 2 приведены спектральные распределения ондуляторно-изгибного излучения, вычисленные по формулам (26), (30) и (31) при $N = 10^3$, $\gamma_\parallel = 10^4$; $\varepsilon_\perp = 0.1$, 0.01 и 0.001. Локальные второй и третий максимумы на рис. 2, а и рис. 2, б соответствуют первой и второй гармоникам ондуляторного излучения. Как видно из графиков, вклад второй гармоники в излучение мал в сравнении с вкладом первой гармоники. Есть область параметров, в которой вклады изгибного и ондуляторного излучения сравнимы.

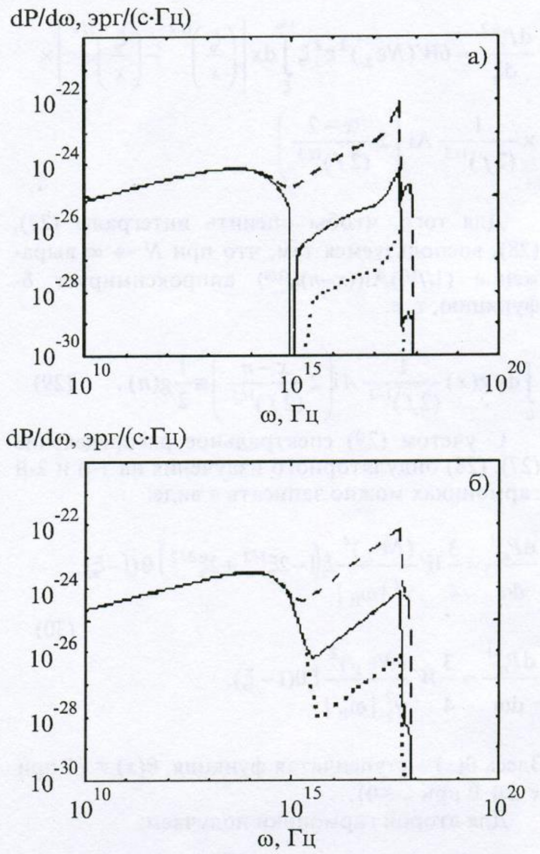

Рис. 2. *Спектральное распределение ондуляторно-изгибного излучения: а) π-поляризация, б) σ-поляризация.* $N = 10^3$, $\bar{a} = 10^4$; $\varepsilon_\perp = 0.1$ – *штриховая линия,* $\varepsilon_\perp = 0.01$ – *сплошная линия,* $\varepsilon_\perp = 0.001$ – *точки*

Таким образом, в магнитосфере пульсара возможна ситуация, когда релятивистская частица одновременно теряет энергию по двум каналам: за счет изгибного излучения со значительной ролью линейной поляризации и за счет ондуляторного излучения со значительным вкладом круговой поляризации.

В заключение автор выражает благодарность А. Г. Боеву, Ю. Э. Любарскому и В. Н. Мельнику за обсуждение и полезные замечания.

Приложение 1. Общие формулы для ондуляторно-изгибного излучения

Разложим интеграл (16) по степеням $\varepsilon_\perp$. Для этого воспользуемся разложениями:

$$e^{-i\nu\kappa\sin\tau} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\tau} J_n(\nu\kappa) , \qquad (\text{П}1)$$

$$e^{i\nu\kappa\frac{e_\alpha}{|e_\alpha|}\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\gamma_\parallel}\frac{\tau}{N}} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{l!}\left(i\nu\kappa\frac{e_\alpha}{|e_\alpha|}\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\gamma_\parallel}\frac{\tau}{T}\cos\tau\right)^{\prime}. \tag{П2}$$

Подставляя разложения (П1) и (П2) в интеграл (16) и разложив функции Бесселя $J_n(\nu\kappa)$ в степенной ряд, находим:

$$\begin{aligned}
b_\pi ={}& \frac{2\pi}{|\omega_{\mathrm{B}}|}\frac{\beta_\parallel\sin\vartheta}{f^{1/3}}\operatorname{Ai}\left(\frac{\nu}{f^{1/3}}\right) + \frac{2\pi}{|\omega_{\mathrm{B}}|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\nu\kappa}{2}\right)^{n+1}\left\{\beta_\parallel\sin\vartheta\sum_{l=0}^{n+1}\left(\frac{e_\alpha}{|e_\alpha|}\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\gamma_\parallel N}\right)^{l}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n+1-l}{2}\right]}B_{n+1,l,m}\times\right.\\
&\times\sum_{q=0}^{l}\binom{l}{q}\frac{1}{f^{(l+1)/3}}\left[\operatorname{Ai}^{(l)}\left(\frac{\nu-(n+1-2m-2l+2q)}{f^{1/3}}\right)+(-1)^{n+1-2m-l}\operatorname{Ai}^{(l)}\left(\frac{\nu+(n+1-2m-2q)}{f^{1/3}}\right)\right]-\\
&-\frac{1-\beta_\parallel\cos\vartheta}{\nu\sin\vartheta}\cos\vartheta\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-l}{2}\right]}B_{n,l,m}\left(\frac{e_\alpha}{|e_\alpha|}\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\gamma_\parallel N}\right)^{l}\sum_{q=0}^{l+1}\binom{l+1}{q}\frac{1}{f^{(l+1)/3}}\left[\operatorname{Ai}^{(l)}\left(\frac{\nu-(n-1-2l-2m+2q)}{f^{1/3}}\right)+\right.\\
&\left.\left.+(1-\delta_{0,\mathrm{n}})(-1)^{n-2m-l}\operatorname{Ai}^{(l)}\left(\frac{\nu+(n+1-2m-2q)}{f^{1/3}}\right)\right]\right\},
\end{aligned} \tag{П3}$$

$$\begin{aligned}
b_\sigma ={}& \frac{2\pi i}{|\omega_{\mathrm{B}}|}\frac{\beta_\parallel}{\gamma_\parallel N}\frac{1}{f^{2/3}}\operatorname{Ai}'\left(\frac{\nu}{f^{1/3}}\right) + \frac{2\pi i}{|\omega_{\mathrm{B}}|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\nu\kappa}{2}\right)^{n+1}\left\{\frac{\beta_\parallel}{\gamma_\parallel N}\sum_{l=0}^{n+1}\left(\frac{e_\alpha}{|e_\alpha|}\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\gamma_\parallel N}\right)^{l}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n+1-l}{2}\right]}B_{n+1,l,m}\times\right.\\
&\times\sum_{q=0}^{l}\binom{l}{m}\frac{1}{f^{(l+2)/3}}\left[\operatorname{Ai}^{(l+1)}\left(\frac{\nu-(n+1-2l-2m+2q)}{f^{1/3}}\right)+(-1)^{n+1-2m-l}\times\right.\\
&\left.\times\operatorname{Ai}^{(l+1)}\left(\frac{\nu+(n+1-2m-2q)}{f^{1/3}}\right)\right]+\frac{e_\alpha}{|e_\alpha|}\frac{1-\beta_\parallel\cos\vartheta}{\nu\sin\vartheta}\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-l}{2}\right]}B_{n,l,m}\left(\frac{e_\alpha}{|e_\alpha|}\frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{\gamma_\parallel N}\right)^{l}\sum_{q=0}^{l}\binom{l}{q}\times\\
&\times\frac{1}{f^{(l+1)/3}}\left[\operatorname{Ai}^{(l)}\left(\frac{\nu-(n+1-2l-2m+2q)}{f^{1/3}}\right)-\operatorname{Ai}^{(l)}\left(\frac{\nu-(n-1-2l-2m+2q)}{f^{1/3}}\right)+\right.\\
&\left.\left.+(1-\delta_{0,\mathrm{n}})(-1)^{n-2m-l}\left(\operatorname{Ai}^{(l)}\left(\frac{\nu+(n-1-2m-2q)}{f^{1/3}}\right)-\operatorname{Ai}^{(l)}\left(\frac{\nu+(n+1-2m-2q)}{f^{1/3}}\right)\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{П4}$$

Здесь

$$B_{n,l,m}=\frac{(-1)^m}{l!\,m!\,\Gamma(n-(l+m)+1)}, \qquad \binom{l}{q}=\frac{l!}{(l-q)!\,q!},$$

где $\Gamma(n)$ – гамма-функция, $\delta_{0,\mathrm{n}}=\{1$ при $n=0$; 0 при $n\neq 0\}$ – символ Кронекера, $\left[\dfrac{n-l}{2}\right]$ – целая часть числа. В выражениях (П3), (П4) для функций Эйри и ее производных $\operatorname{Ai}^{(l)}(\zeta)\equiv \mathrm{d}^l\operatorname{Ai}(\zeta)/\mathrm{d}\zeta^l$ принято определение [16]:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{if(Q^2\tau+\tau^3/3)\right\} = \frac{2\pi}{f^{1/3}} \mathrm{Ai}(f^{1/3}Q^2)\,, \qquad (\Pi5)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (i\tau)^l \exp\left\{if(Q^2\tau+\tau^3/3)\right\} = \frac{2\pi}{f^{(l+1)/3}} \mathrm{Ai}^{(l)}(f^{1/3}Q^2)\,.$$

Приложение 2

Для вычисления спектральной мощности ондуляторного излучения выведем для функций Эйри формулы, аналогичные формулам теории синхротронного излучения для функций Макдональда $K_{1/3}(x)$, $K_{2/3}(x)$ [6], [11]:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\psi \left| \frac{1}{f^{1/3}} \mathrm{Ai}\left(\frac{(1+\psi^2)\xi-n}{f^{1/3}}\right)\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\xi f}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{(2f^{1/3})} \mathrm{Ai}\left(2\frac{x-n}{(2f)^{1/3}}\right). \qquad (\Pi6)$$

В формуле (П6) и далее $f=\xi/N^2$

Для получения выражения (П6) в левой части под интегралом заменяем функцию Эйри ее интегральным представлением (П5). В результате получаем тройной интеграл с переменными интегрирования ψ, τ_1 и τ_2. Далее делаем замену переменных $u=(\tau_1-\tau_2)$, $w=(\tau_1+\tau_2)$ и интегрируем по переменным w, затем ψ. Полученный результат приводит к выражению в правой части (П6).

И аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\psi \left(\frac{\psi^2-1}{1+\psi^2}\right)^2 \left|\frac{1}{f^{1/3}} \mathrm{Ai}\left(\frac{\nu-n}{f^{1/3}}\right)\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\xi f}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{(2f^{1/3})} \left[1-2\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1/2}+2\left(\frac{\xi}{x}\right)^{3/2}\right] \mathrm{Ai}\left(2\frac{x-n}{(2f)^{1/3}}\right) \qquad (\Pi7)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\psi \frac{\psi^2(\psi^2-1)^2}{(1+\psi^2)^4} \left|\frac{1}{f^{1/3}} \mathrm{Ai}\left(\frac{\nu-n}{f^{1/3}}\right)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\xi f}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{(2f^{1/3})} \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1/2} - 5\left(\frac{\xi}{x}\right)^{3/2} + 9\left(\frac{\xi}{x}\right)^{5/2} - 5\left(\frac{\xi}{x}\right)^{7/2}\right] \mathrm{Ai}\left(2\frac{x-n}{(2f)^{1/3}}\right), \qquad (\Pi8)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\psi \frac{\psi^2}{(1+\psi^2)^2} \left|\frac{1}{f^{1/3}} \mathrm{Ai}\left(\frac{\nu-n}{f^{1/3}}\right)\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{\xi f}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{(2f^{1/3})} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1/2} - \left(\frac{\xi}{x}\right)^{3/2}\right] \mathrm{Ai}\left(2\frac{x-n}{(2f)^{1/3}}\right). \qquad (\Pi9)$$

В формулах (П7)-(П9) $\nu=(1+\psi^2)\xi$.

Литература

1. J. M. Rankin. ApJ. 1983, **274**, pp. 333-358.
2. V. Radhakrisnan, J. M. Rankin. ApJ. 1990, **352**, p. 258.
3. И. Ф. Малов. Астрон. ж. 1990, **67**, с. 377-392.
4. В. Л. Гинзбург. Изв. АН СССР. 1947, **11**, с. 165-169.
5. H. Motz. J. Appl. Phys. 1951, **22**, pp. 527-535.
6. А. А. Соколов, В. Ч. Жуковский, М. М. Колесникова. Изв. вузов. Физика. 1969, №2, с. 108-116.
7. G. A. Schott. Electromagnetic Radiation. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1912.
8. V. Radhakrishnan. Proc. Astron. Soc. Austral. 1969, **1**, No. 6, p. 254.
9. Yu. V. Chugunov, Ja. Eidman, E. V. Suvorov. Astr. Sp. Sci. 1975, **32**, L7-L10.
10. V. V. Zheleznyakov, V. E. Shaposhnikov. Austral. J. Phys. 1979, **32**, pp. 71-78.
11. K. S. Cheng, J. L. Zhang. ApJ. 1996, **463**, pp. 271-283.
12. В. Л. Гинзбург. Теоретическая физика и астрофизика. Москва, Наука, 1987, 488 с.
13. D. B. Melrose. ApJ. 1978, **225**, pp. 557-573.
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Москва, Наука, 1973, 504 с.
15. Д. Ф. Алферов, Ю. А. Башмаков, Е. Г. Бессонов. ЖТФ. 1973, **43**, с. 2126-2132.
16. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Москва, Наука, 1979, 832 с.

17. P. Goldreich, W. H. Julian. ApJ. 1969, **157**, pp. 869-880.
18. M. A. Rudermann, P. G. Sutherland. ApJ. 1975, **196**, pp. 51-72.
19. K. S. Cheng, C. Ho, M. A. Ruderman. ApJ. 1986, **300**, pp. 500-521.

On Relativistic Charged Particle Radiation in a Curved Magnetic Field

Ya. M. Sobolev

The radiation of a charged particle moving along curved magnetic field line is considered. The spectral-angular and spectral distributions are obtained in the case when the ultrarelativistic particle with an arbitrary pitch-angle loses the energy through both the curvature and undulator radiation mechanisms. It is shown that there are zones in pulsar magnetosphere where this radiative mechanism takes place.