

Функция Грина с явно выделенной особенностью для круглого волновода

С. Д. Прийменко, Н. А. Хижняк

*Институт плазменной электроники и новых методов ускорения
Национального научного центра
"Харьковский физико-технический институт"**e-mail: spriyemenko@kipt.kharkov.ua.**Статья поступила в редакцию 19 июля 1999 г., после переработки 6 января 2000 г.*

Тензорная функция Грина для векторного потенциала получена как решение задачи дифракции расходящейся сферической волны на внутренней поверхности круглого волновода. Она найдена в виде суперпозиции тензорной функции Грина неограниченного пространства в замкнутой форме и регулярной функции Грина. Представление функции Грина и ее производных первого и второго порядков в виде сумм сингулярной и регулярной частей позволило создать алгоритм, обеспечивающий необходимую точность расчета практически при любых расстояниях между источником тока и точкой наблюдения. Алгоритм может быть эффективно использован в задачах, где требуется расчет поля, как непосредственно в области источника тока, так и вблизи этой области для нагруженных круглых волноводов. В качестве примера вычислены функция Грина и ее производная первого порядка для расстояний между источником тока и точкой наблюдения от нескольких сотых до половины длины волны.

Тензорна функція Гріна для векторного потенціалу отримана як рішення задачі дифракції розбіжної сферичної хвилі на внутрішній поверхні круглого хвилеводу. Вона знайдена у вигляді суперпозиції тензорної функції Гріна нескінченного простору в замкненій формі і регулярної функції Гріна. Зображення функції Гріна та її похідних першого і другого порядків у вигляді сум сингулярної і регулярної частин дозволило створити алгоритм, який забезпечує необхідну точність розрахунку практично при довільних відстанях між джерелом струму та точкою спостереження. Алгоритм може бути ефективно використаний в задачах, де є потреба в розрахунках поля як безпосередньо в області джерела струму, так і біля цієї області для навантажених круглих хвилеводів. Для прикладу виконано розрахунок функції Гріна та її похідної першого порядку для відстаней між джерелом струму і точкою спостереження від декількох сотих до половини довжини хвилі.

1. Введение

Многие электронные и ускоряющие устройства, в частности ЛБВ, ЛОВ, электронные и ионные ускорители, представляют собой нагруженный волновод. При изучении нагруженных волноводных структур перспективным является метод интегральных уравнений макроскопической электродинамики [1] с использованием функции Грина и ее производных. Классические результаты по теории электромагнитных функций Грина для волноводных структур изложены в работах [2-4].

Предпосылки применения интегральных методов в задачах дифракции в круглом волноводе возникли с появлением работ [5-8], в которых была построена тензорная функция Грина $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ для электрического векторного потенциала круглого волновода. С момента публикации статьи [5] прошло почти 30 лет, однако количество работ с использованием тензорной функции Грина осталось крайне ограниченным [7-9] и касалось

объектов, обладающих слабой пространственной неоднородностью, $0.1 \leq l/\lambda \leq 1$, где l – линейный размер пространственной неоднородности, λ – длина волны в неограниченном пространстве.

Это связано с тем, что в [5-8] функция $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ построена в виде двойных рядов, которые плохо сходятся, а в отдельных случаях расходятся для $\nabla \hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ при $|\vec{r} - \vec{r}'|/\lambda \leq 0.01$ [10,11]. Последнее имеет место потому, что двойные ряды для $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ и $\nabla \hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ в неявном виде включают особенности типа $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$, $1/|\vec{r} - \vec{r}'|^2$ и разрывную функцию $\theta(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ (обобщенная функция Хевисайда), а $\nabla \hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ включает еще и сингулярности типа $1/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$, $\delta(|\vec{r} - \vec{r}'|)$.

Выделение вышеуказанных особенностей в явном виде дает возможность расширить круг

электродинамических задач, к которым успешно применимы интегральные методы. Это показано на примере резонансного рассеяния волны H_{11} на импедансном вибраторе [12-14] и диэлектрической сфере (с большим значением диэлектрической проницаемости) в круглом волноводе [15], а также при анализе электродинамических характеристик ускоряющей структуры H -типа, которая обладает значительной пространственной неоднородностью $0.01 \leq l/\lambda \leq 1$ [16-17].

В данной статье задача построения $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ решена как задача дифракции расходящейся сферической волны на внутренней поверхности неограниченного круглого волновода. Авторами обобщены и существенно дополнены опубликованные ими ранее материалы, связанные с представлением $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ в виде суммы функции Грина неограниченного пространства и регулярной добавки, обусловленной переотражениями от стенок волновода. Предложенный метод позволяет выделить в явном виде сингулярности функции Грина и разработать эффективный алгоритм расчета этой функции и ее производных. Приводятся результаты расчета $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ и $\nabla \hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ для расстояния между источником и точкой наблюдения $0.02 \leq |\vec{r} - \vec{r}'|/\lambda \leq 0.574$ в поперечном сечении круглого волновода.

2. Аналитические соотношения

Рассмотрим круглый цилиндрический волновод радиуса R с идеально проводящими стенками. Волновод всюду заполнен однородной изотропной средой за исключением конечного объема V . В объеме V локализован произвольно ориентированный электрический ток \vec{j}_E , возбуждающий волновод. Зависимость тока от времени задается в виде $e^{-i\omega t}$. Электромагнитное поле, возникающее в волноводе, определяется с помощью электрического вектора Герца \vec{Z}_E [1]:

$$\vec{E} = \left(\hat{I}k^2 + \text{grad div} \right) \vec{Z}_E, \tag{1}$$

$$\vec{H} = (-1)i\omega\epsilon_0 \text{rot} \vec{Z}_E,$$

где \hat{I} – единичный тензор; $k = \omega\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}$ – волновое число в неограниченном пространстве; $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$, μ – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно; ϵ_0 , μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума;

$$\vec{Z}_E = \frac{1}{i\omega\epsilon\epsilon_0} \int_V \hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}') \vec{j}_E(\vec{r}') d\vec{r}', \tag{2}$$

где $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ – электрическая функция Грина для векторного потенциала круглого волновода. Величины \vec{E} и \vec{H} удовлетворяют принципу предельного поглощения при $|z| \rightarrow \infty$.

Согласно (1), (2) определение напряженности электромагнитного поля сводится к операциям интегрирования и дифференцирования заданных выражений, если известна функция Грина $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ и распределение плотности электрического тока $\vec{j}_E(\vec{r}')$ в объеме V . Если распределение $\vec{j}_E(\vec{r}')$ неизвестно, оно предварительно находится из решения интегрального уравнения путем введения эквивалентной плотности электрического тока $\vec{j}_E(\vec{r}') = -i\omega\epsilon_0(\epsilon_V(\vec{r}')/\epsilon - 1)\vec{E}(\vec{r}')$, где $\epsilon_V(\vec{r}')$ – относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей объем V ; при этом $\mu_V = 1$, где μ_V – относительная магнитная проницаемость среды в объеме V .

Электрическая функция Грина $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ для векторного потенциала является решением неоднородного уравнения Гельмгольца

$$[\nabla^2 + k^2] \hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}') = (-1)\hat{I}\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{3}$$

которое удовлетворяет однородным граничным условиям на внутренней стенке волновода:

$$\vec{n} \times \hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}') = 0, \tag{4}$$

$$\text{div} \hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}') = 0, \tag{5}$$

и принципу предельного поглощения при $|z - z'| \rightarrow \infty$.

Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ является суммой част-

ного фундаментального решения уравнения Гельмгольца $\hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}')$ и решения однородного уравнения Гельмгольца $\hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}')$:

$$\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}') = \hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}') + \hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}'), \quad (6)$$

т. е. $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$, определяющая результирующее поле точечного источника тока в круглом волноводе, складывается из функции Грина неограниченного пространства $\hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}')$, соответствующей первичному полю, и регуляризированной функции Грина $\hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}')$, соответствующей вторичному полю, т. е. полю токов, наводимых на стенках волновода.

2.1. Частное фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $\hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}')$

Используя операторное тождество [2]

$$\hat{I} = \nabla \nabla / \nabla^2 - \nabla \times \left(\nabla \times \hat{I} \right) / \nabla^2$$

и формулу обращения

$$\left[A(\nabla \nabla / \nabla^2) - B \left(\nabla \times \left(\nabla \times \hat{I} \right) / \nabla^2 \right) \right]^{-1} = \left[(1/A)(\nabla \nabla / \nabla^2) - (1/B) \left(\nabla \times \left(\nabla \times \hat{I} \right) / \nabla^2 \right) \right],$$

где A и B – скаляры или скалярные операторы, которые коммутируют с дифференциальным оператором ∇ , находим частное решение

$\hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}')$ уравнения (3) в операторной форме:

$$\begin{aligned} \hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}') &= \left(\nabla^2 \hat{I} + k^2 \hat{I} \right)^{-1} (-1) \hat{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \\ &= \hat{I} \left[(\Delta + k^2)^{-1} (-1) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) $\left(\nabla^2 \hat{I} + k^2 \hat{I} \right)^{-1}$ – обратный оператор тензорного уравнения Гельмгольца (3); $(\Delta + k^2)^{-1}$ – обратный оператор скалярного уравнения Гельмгольца

$$\left[\Delta + k^2 \right] G_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}') = (-1) \delta(\vec{r} - \vec{r}'); \quad (8)$$

а ∇^2 – оператор Лапласа для тензора или вектора, Δ есть оператор Лапласа для скаляра.

Из (7), (8) следует, что

$$\hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}') = \hat{I} G_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}'), \quad (9)$$

и нахождение частного решения тензорной задачи (3)-(5) сводится к нахождению частного решения скалярного уравнения (8) с использованием (9).

Учитывая однородность круглого волновода вдоль координат z и φ , ищем $G_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}')$ в виде интеграла Фурье по $z - z'$ и ряда Фурье по $\varphi - \varphi'$:

$$\begin{aligned} G_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi e^{i\chi(z-z')} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m(v(\chi); \rho, \rho') e^{im(\varphi-\varphi')}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $v(\chi)$ – поперечное волновое число

$$v(\chi) = \sqrt{k^2 - \chi^2}, \quad (11)$$

на которое согласно принципу предельного поглощения накладывается ограничение

$$0 \leq \arg \sqrt{k^2 - \chi^2} < \pi. \quad (12)$$

Принимая во внимание соотношение [2]

$$\delta(\varphi - \varphi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{im(\varphi-\varphi')}, \quad (13)$$

приходим к неоднородному уравнению Бесселя относительно $R_m(v(\chi); \rho, \rho')$. Находим частное фундаментальное решение уравнения Бесселя с учетом (10), (9) и получаем частное решение тензорной задачи (3)-(5):

$$\begin{aligned} \hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}') &= \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(z-z')} d\chi \hat{F}_E^S(v(\chi); \vec{\rho}, \vec{\rho}') = \\ &= \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(z-z')} d\chi \hat{I} F_E^S(v(\chi); \vec{\rho}, \vec{\rho}') = \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(z-z')} d\chi \hat{I} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \times \\ \times \left\{ \begin{aligned} & J_m(v(\chi)\rho'_<) H_m^{(1)}(v(\chi)\rho_>) \\ & J_m(v(\chi)\rho_<) H_m^{(1)}(v(\chi)\rho'_>) \end{aligned} \right. \quad (14)$$

(J_m , $H_m^{(1)}$ – функции Бесселя и Ганкеля соответственно; комбинации $\rho_>$, $\rho'_<$ и $\rho_<$, $\rho'_>$ означают, что $\rho \geq \rho'$ и $\rho' \geq \rho$), или в замкнутой форме

$$\hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \hat{I} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (15)$$

При этом для $\hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}')$ в диадном базисе $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ (\otimes – символ диадного умножения [19]; \vec{e}_i , \vec{e}_j – векторы ортонормированного локального базиса в точке наблюдения \vec{r} и точке источника \vec{r}' соответственно; $\vec{e}_1 = \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$; $\vec{e}_1' = \vec{e}_{\rho'}$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_{\varphi'}$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_{z'}$; $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$; $x^1' = \rho'$, $x^2' = \varphi'$, $x^3' = z'$) отличными от нуля являются компоненты $G_{E11'}^S$, $G_{E12'}^S$, $G_{E21'}^S$, $G_{E22'}^S$, $G_{E33'}^S$, где физическая компонента $G_{Eij'}^S$ соответствует диаде $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j'$. В частности, $G_{E11'}^S$ имеет вид:

$$G_{E11'}^S(k; \vec{r}, \vec{r}') = \frac{i}{8\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(z-z')} d\chi \times \\ \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{m^2}{v^2(\chi)\rho_>\rho'_<} J_m(v(\chi)\rho'_<) H_m^{(1)}(v(\chi)\rho_>) + \\ & \frac{m^2}{v^2(\chi)\rho_<\rho'_>} J_m(v(\chi)\rho_<) H_m^{(1)}(v(\chi)\rho'_>) + \\ & J_m'(v(\chi)\rho'_<) H_m^{(1)'}(v(\chi)\rho_>) + \\ & J_m'(v(\chi)\rho_<) H_m^{(1)'}(v(\chi)\rho'_>) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где J_m' , $H_m^{(1)'}$ – производные функций Бесселя и Ганкеля соответственно. Частное фундаментальное решение $\hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}')$ является сингулярной обобщенной функцией переменных \vec{r} и \vec{r}' , которая описывает бегущие цилиндриче-

ские волны непрерывного спектра (14), (16) либо расходящуюся сферическую волну (15).

2.2. Решение однородного уравнения

Гельмгольца $\hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}')$

Регулярная часть функции Грина $\hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}')$ является решением однородного уравнения Гельмгольца

$$[\nabla^2 + k^2] \hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (17)$$

и удовлетворяет неоднородным граничным условиям

$$\vec{n} \times \hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}') = (-1) \vec{n} \times \hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}'), \quad (18)$$

$$\text{div} \hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}') = (-1) \text{div} \hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}'), \quad (19)$$

которые вытекают из (4), (5) и (6), а также принципу предельного поглощения при $|z-z'| \rightarrow \infty$.

Решение задачи (17)-(19) $\hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}')$ (принимая во внимание однородность круглого волновода вдоль оси) ищем в виде интеграла Фурье:

$$\hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(z-z')} \hat{F}_E^R(v(\chi); \vec{\rho}, \vec{\rho}') d\chi \quad (20)$$

Разделяя переменные, получаем однородное двумерное уравнение Гельмгольца относительно преобразования Фурье $\hat{F}_E^R(v(\chi); \vec{\rho}, \vec{\rho}')$ тензорной функции $\hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}')$:

$$[\nabla^2(\vec{\rho}) + v^2(\chi)] \hat{F}_E^R(v(\chi); \vec{\rho}, \vec{\rho}') = 0, \quad (21)$$

с неоднородными граничными условиями

$$\text{div}(\vec{\rho}_s) \left[\hat{F}_E^R(v(\chi); \vec{\rho}_s, \vec{\rho}') + \hat{F}_E^S(v(\chi); \vec{\rho}_s, \vec{\rho}') \right] + \\ + i\chi \left[\left(\vec{e}_3 \cdot \hat{F}_E^R(v(\chi); \vec{\rho}_s, \vec{\rho}') \right) + \left(\vec{e}_3 \cdot \hat{F}_E^S(v(\chi); \vec{\rho}_s, \vec{\rho}') \right) \right] = 0, \quad (22)$$

$$\left(\rho_s \bar{e}_2 \cdot \hat{F}_E^R(v(\chi); \bar{\rho}_s, \bar{\rho}') \right) + \left(\rho_s \bar{e}_2 \hat{F}_E^S(v(\chi); \bar{\rho}_s, \bar{\rho}') \right) = 0, \quad (23)$$

$$\left(\bar{e}_3 \hat{F}_E^R(v(\chi); \bar{\rho}_s, \bar{\rho}') \right) + \left(\bar{e}_3 \hat{F}_E^S(v(\chi); \bar{\rho}_s, \bar{\rho}') \right) = 0. \quad (24)$$

Граничные условия (22), (23) и (24) для двумерной тензорной функции $\hat{F}_E^R(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}')$ вытекают из граничных условий (19) и (18) соответственно.

Представим $\hat{F}_E^R(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}')$ в виде суммы трех диад:

$$\hat{F}_E^R(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}') = \bar{A}_1(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}') \otimes \bar{e}_1 + \bar{A}_2(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}') \otimes \bar{e}_2 + \bar{A}_3(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}') \otimes \bar{e}_3. \quad (25)$$

Левые векторы диад $\bar{A}_1(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}')$, $\bar{A}_2(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}')$, $\bar{A}_3(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}')$ соответствуют спектральной плотности поля, которое возбуждается источниками тока, находящимися в точке \bar{r}' и имеющими радиальную, азимутальную и продольную ориентацию соответственно.

Векторные функции $\bar{A}_j(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}')$ в точке наблюдения \bar{r} разлагаем по системе векторных функций Хансена [20]-[22] на потенциальную и вихревую компоненты:

$$\begin{aligned} \bar{A}_j(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}') &= \\ &= \frac{1}{v(\chi)} \text{rot}(\bar{r}) [\psi_j(v(\chi); \bar{\rho})] \bar{e}_3 C_j(\bar{\rho}') + \\ &+ \frac{1}{v(\chi)} \text{grad}(\bar{r}) [\zeta_j(v(\chi); \bar{\rho})] G_j(\bar{\rho}') + \\ &+ \frac{1}{v^2(\chi)} \text{rot}(\bar{r}) \text{rot}(\bar{r}) [\xi_j(v(\chi); \bar{\rho})] \bar{e}_3 L_j(\bar{\rho}'), \quad (26) \end{aligned}$$

где $\psi_j(v(\chi); \bar{\rho})$, $\zeta_j(v(\chi); \bar{\rho})$, $\xi_j(v(\chi); \bar{\rho})$ – скалярные функции, которые подлежат определению и зависят от координат ρ , φ в точке наблюдения \bar{r} ; $C_j(\bar{\rho}')$, $G_j(\bar{\rho}')$, $L_j(\bar{\rho}')$ – коэффициенты разложения, которые зависят от координат ρ' , φ' в точке источника \bar{r}' .

Подставляя (25) и (26) в (21) и используя коммутацию операторов $\frac{1}{v(\chi)} \text{rot}(\bar{r})$, $\frac{1}{v(\chi)} \text{grad}(\bar{r})$,

$\frac{1}{v^2(\chi)} \text{rot}(\bar{r}) \text{rot}(\bar{r})$ с оператором Лапласа $\nabla^2(\bar{\rho})$,

приходим к однородным уравнениям Гельмгольца относительно скалярных функций $\psi_j(v(\chi); \bar{\rho})$, $\zeta_j(v(\chi); \bar{\rho})$, $\xi_j(v(\chi); \bar{\rho})$. Принимая во внимание осевую симметрию круглого волновода, решения однородных уравнений ограниченных на оси волновода ищем в виде:

$$\psi_j(v(\chi); \bar{\rho}) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_{mj} J_m(v(\chi)\rho) e^{im(\varphi-\varphi')}, \quad (27)$$

$$\zeta_j(v(\chi); \bar{\rho}) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} G_{mj} J_m(v(\chi)\rho) e^{im(\varphi-\varphi')}, \quad (28)$$

$$\xi_j(v(\chi); \bar{\rho}) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} L_{mj} J_m(v(\chi)\rho) e^{im(\varphi-\varphi')}, \quad (29)$$

где C_{mj} , G_{mj} , L_{mj} – неизвестные коэффициенты разложения.

С учетом (26-29) введем обозначения:

$$C_{mj}(v(\chi), \bar{\rho}') = C_{mj} C_j(\bar{\rho}'), \quad (30)$$

$$G_{mj}(v(\chi), \bar{\rho}') = G_{mj} G_j(\bar{\rho}'), \quad (31)$$

$$L_{mj}(v(\chi), \bar{\rho}') = L_{mj} L_j(\bar{\rho}'). \quad (32)$$

Согласно операторному методу [2,3], представим $\hat{F}_E^S(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}')$ в диадном базисе $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$:

$$\begin{aligned} \hat{F}_E^S(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}') &= \frac{1}{v(\chi)} \text{rot}(\bar{r}) \frac{1}{v(\chi)} \times \\ &\times \text{rot}(\bar{r}') (F_E^S(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}')) \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 + \\ &+ \frac{1}{v(\chi)} \text{grad}(\bar{r}) \otimes \frac{1}{v(\chi)} \text{grad}(\bar{r}') (F_E^S(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}')) + \\ &+ \frac{1}{v^2(\chi)} \text{rot}(\bar{r}) \text{rot}(\bar{r}) \frac{1}{v^2(\chi)} \text{rot}(\bar{r}') \text{rot}(\bar{r}') (F_E^S(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}')) \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3. \quad (33) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_{11'}(\chi) d\chi = 2\pi i \times \sum_m \sum_n [\text{res } \tilde{F}_{11'}(\chi(v_{mn})) + \text{res } \tilde{F}_{11'}(\chi(v'_{mn}))], \quad (44)$$

Для случая $z - z' < 0$ рассуждения остаются прежними, с той разницей, что область χ расположена в нижней полуплоскости комплексного переменного χ и вместо (40) имеем регулярную ветвь функции χ , определяемую выражением $\chi = -i\sqrt{v^2 - k^2}$, а интеграл (44) записывается в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_{11'}(\chi) d\chi = -2\pi i \times \sum_m \sum_n [\text{res } \tilde{F}_{11'}(\chi(v_{mn})) + \text{res } \tilde{F}_{11'}(\chi(v'_{mn}))]. \quad (45)$$

В выражениях (36), (38), (44), (45) устремим $\text{Im } k$ к нулю в соответствии с принципом предельного поглощения и примем во внимание соотношения:

$$\frac{d}{d\chi} J'_m(v(\chi)R) \Big|_{\chi=i\sqrt{(v'_{mn})^2 - k^2}} = i \frac{\gamma_{mn}}{k_{mn}^e} J_m(k_{mn}^e R) \left[1 - \frac{m^2}{(k_{mn}^e R)^2} \right] R,$$

$$\frac{d}{d\chi} J_m(v(\chi)R) \Big|_{\chi=i\sqrt{(v_{mn})^2 - k^2}} = -i \frac{\gamma_{mn}}{k_{mn}^e} J_{m+1}(k_{mn}^e R) \frac{\beta_{mn}}{k_{mn}^h},$$

где $\beta_{mn} = \sqrt{(k_{mn}^h)^2 - k^2}$, $\gamma_{mn} = \sqrt{(k_{mn}^e)^2 - k^2}$, $k_{mn}^h = v_{mn}$, $k_{mn}^e = v'_{mn}$. Тогда для любых \bar{r} и \bar{r}' получаем:

$$G_{E11'}(k; \bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \times [A_{mn} J'_m(k_{mn}^h \rho) J'_m(k_{mn}^h \rho') f_{mn}(z, z') + B_{mn} \frac{m^2}{(k_{mn}^e)^2 \rho \rho'} J_m(k_{mn}^e \rho) J_m(k_{mn}^e \rho') l_{mn}(z, z')], \quad (46)$$

$$\text{где } A_{mn} = \frac{1}{\pi J_{m+1}^2(k_{mn}^h R) R^2},$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\pi J_m^2(k_{mn}^e R) R^2 [1 - m^2 / (k_{mn}^e R)^2]},$$

$$f_{mn}(z, z') = \frac{e^{-\beta_{mn}|z-z'|}}{2\beta_{mn}}, \quad l_{mn}(z, z') = \frac{e^{-\gamma_{mn}|z-z'|}}{2\gamma_{mn}}.$$

Интегралы для остальных компонент $G_{E11'}(k; \bar{r}, \bar{r}')$ в (37) вычисляются так же, как и для $G_{E11'}(k; \bar{r}, \bar{r}')$. В результате получаем:

$$G_{E12'}(k; \bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{i} e^{im(\varphi - \varphi')} \times \left[\frac{A_{mn}}{k_{mn}^h \rho'} J'_m(k_{mn}^h \rho) J'_m(k_{mn}^h \rho') f_{mn}(z, z') + \frac{B_{mn}}{k_{mn}^e \rho} J_m(k_{mn}^e \rho) J'_m(k_{mn}^e \rho') l_{mn}(z, z') \right], \quad (47)$$

$$G_{E21'}(k; \bar{r}, \bar{r}') = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{i} e^{im(\varphi - \varphi')} \times \left[\frac{A_{mn}}{k_{mn}^h \rho} J_m(k_{mn}^h \rho) J'_m(k_{mn}^h \rho') f_{mn}(z, z') + \frac{B_{mn}}{k_{mn}^e \rho'} J'_m(k_{mn}^e \rho) J_m(k_{mn}^e \rho') l_{mn}(z, z') \right], \quad (48)$$

$$G_{E22'}(k; \bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \times \left[A_{mn} \frac{m^2}{(k_{mn}^h)^2 \rho \rho'} J_m(k_{mn}^h \rho) J_m(k_{mn}^h \rho') f_{mn}(z, z') + B_{mn} J'_m(k_{mn}^e \rho) J'_m(k_{mn}^e \rho') l_{mn}(z, z') \right], \quad (49)$$

$$G_{E33'}(k; \bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \times A_{mn} J_m(k_{mn}^h \rho) J_m(k_{mn}^h \rho') f_{mn}(z, z'). \quad (50)$$

Компоненты $G_{E13'}(k; \bar{r}, \bar{r}')$, $G_{E23'}(k; \bar{r}, \bar{r}')$, $G_{E31'}(k; \bar{r}, \bar{r}')$, $G_{E32'}(k; \bar{r}, \bar{r}')$ равны нулю. Выражения (46)-(50) получены как решение задачи дифракции расходящейся сферической волны на внутренней поверхности круглого волновода и совпадают с результатами работы [7], в

которой при построении $G_{Eij}(k; \vec{r}, \vec{r}')$ используется разложение по системе собственных функций волновода. Эти соотношения представляют электрическую тензорную функцию Грина для векторного потенциала круглого волновода в виде суммы дискретного спектра стоячих цилиндрических волн.

3. Численные результаты

Решение конкретных задач, связанных, в частности, с резонансным рассеянием на импедансном вибраторе и диэлектрической сфере в круглом волноводе, предполагает вычисление напряженности электрического поля и требует знания электрической функции Грина $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ для векторного потенциала и ее производных при $0.01 \leq |\vec{r} - \vec{r}'|/\lambda \leq 1$. Ниже показано, что в таких задачах рационально представить $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ в виде суммы сингулярной $\hat{G}_E^S(k; \vec{r}, \vec{r}')$ и регулярной $\hat{G}_E^R(k; \vec{r}, \vec{r}')$ частей; подобный подход сопоставлен с представлением $\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}')$ в виде двойного ряда.

Рассмотрен волновод радиуса $R = 0.0755$ м в режиме отсечки ($f = 0.6$ ГГц, $k = 12.56$ м⁻¹) и в режиме бегущей волны H_{11} ($f = 1.35$ ГГц, $k = 27.7263$ м⁻¹). Точка наблюдения (\vec{r}) и точка источника (\vec{r}') располагались в одном и том же поперечном сечении волновода ($z = z'$) при $\rho = 0.07$ м, $\rho' = 0.06$ м и $\varphi = \varphi'$, $\varphi = \varphi' + \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \varphi' + \pi$. Отношение $|\vec{r} - \vec{r}'|/\lambda$ составляло 0.02; 0.044; 0.184; 0.26; 0.574.

Согласно (2) и (1), для вычисления напряженности электрического поля необходимо определить $\text{div}(\vec{r}) \left[\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}') \right]$, где

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{r}) \left[\hat{G}_E(k; \vec{r}, \vec{r}') \right] &= \left[\frac{\partial G_{E11}(k; \vec{r}, \vec{r}')}{\partial x^1} + \right. \\ &+ \frac{1}{x^1} \left(G_{E11}(k; \vec{r}, \vec{r}') + \frac{\partial G_{E21}(k; \vec{r}, \vec{r}')}{\partial x^2} \right) \left. \right] j_1(\vec{r}') + \\ &+ \left[\frac{\partial G_{E12}(k; \vec{r}, \vec{r}')}{\partial x^1} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{x^1} \left(G_{E12}(k; \vec{r}, \vec{r}') + \frac{\partial G_{E22}(k; \vec{r}, \vec{r}')}{\partial x^2} \right) \right] j_2(\vec{r}') + \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{\partial G_{E33}(k; \vec{r}, \vec{r}')}{\partial x^3} \right] j_3(\vec{r}') \tag{51}$$

а $j_l(\vec{r}')$ – физические компоненты вектора плотности тока в точке \vec{r}' . В (51) содержатся частные производные физических компонент функции Грина $\frac{\partial G_{Emp}(k; \vec{r}, \vec{r}')}{\partial x^s}$ и физические компоненты функции Грина $G_{Eip}(k; \vec{r}, \vec{r}')$ в диадном базисе $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_p$.

Рассмотрим частную производную $\frac{\partial G_{E11}(k; \vec{r}, \vec{r}')}{\partial x^1}$ для бегущей волны H_{11} и компоненты функции Грина $G_{E11}(k; \vec{r}, \vec{r}')$, $G_{E12}(k; \vec{r}, \vec{r}')$, $G_{E22}(k; \vec{r}, \vec{r}')$, $G_{E33}(k; \vec{r}, \vec{r}')$ в случае заперделного волновода.

При вычислении их в виде двойного ряда использовались соотношения (46), (47), (49), (50), а в виде суммы сингулярной и регулярной частей – соотношения (15), (6) и (34), (П.1), (П.3), (П.4). В соответствии с принципом предельного поглощения, $\text{Im} k$ в (15), (34), (П.1), (П.3), (П.4) устремим к нулю. Тогда при вычислении контурного интеграла в (34) для бегущей волны H_{11} контур интегрирования приобретает вид, изображенный на рис. 2. В случае заперделного волновода дуги для комплексных значений χ в выражениях (34), (П.1), (П.3), (П.4) охватывают лишь точки $+k$ и $-k$ (рис. 3).

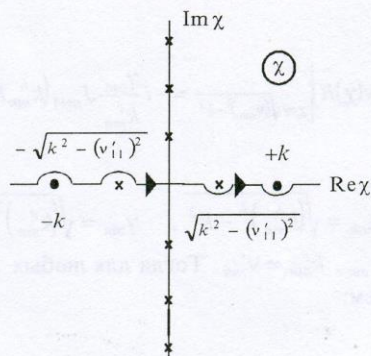


Рис. 2. Контур интегрирования для бегущей волны H_{11} в комплексной плоскости χ

Согласно (6), (15), сингулярность $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ содержится в действительной части указанных компонент функции Грина, а сингулярность $1/|\vec{r} - \vec{r}'|^2$ содержится в действительной

Используя развернутую форму записи $\hat{F}_E^S(v(\chi); \bar{\rho}, \bar{\rho}')$ из (14) при $\rho > \rho'$, а также принимая во внимание (25), (26), (29), (32), (33) и граничные условия (24), находим коэффициенты разложения $L_{mj}(v(\chi), \bar{\rho}')$. Коэффициенты разложения $G_{mj}(v(\chi), \bar{\rho}')$ получаем из граничных условий (22) с учетом (25), (26), (28), (31), (33) и граничных условий (24), а $C_{mj}(v(\chi), \bar{\rho}')$ – из граничных условий (23) с учетом (25)-(27) и (30), (33) и граничных условий (24), (22).

Функцию Грина $\hat{G}_E^R(k; \bar{r}, \bar{r}')$, которая принимает конечное значение для любых \bar{r} и \bar{r}' внутри волновода и определяет вторичное поле, возбуждаемое точечным источником тока, получаем в диадном базисе $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ в виде суммы по бесконечному спектру стоячих цилиндрических волн. Компонента G_{E11}^R записывается в виде:

$$G_{E11}^R(k; \bar{r}, \bar{r}') = \frac{-i}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(z-z')} \left[\frac{m^2}{v^2(\chi)\rho\rho'} J_m(v(\chi)\rho') \times J_m(v(\chi)\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\chi)R)}{J_m'(v(\chi)R)} + J_m'(v(\chi)\rho') \times J_m'(v(\chi)\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\chi)R)}{J_m(v(\chi)R)} \right] d\chi. \quad (34)$$

(Остальные компоненты G_{Eij}^R приведены в приложении).

Функция $\hat{G}_E^R(k; \bar{r}, \bar{r}')$ и ее производные, как первого, так и второго порядка, являются регулярными обобщенными функциями, т. е. регулярными при $\bar{r} = \bar{r}'$.

2.3. Фундаментальное решение уравнения

$$\text{Гельмгольца } \hat{G}_E(k; \bar{r}, \bar{r}')$$

Общее решение $\hat{G}_E(k; \bar{r}, \bar{r}')$ трехмерной тензорной задачи (3)-(5) в диадном базисе $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$ получаем, согласно (6), в виде суперпозиции бегущих цилиндрических волн непрерывного спектра (16) и стоячих цилиндрических волн непрерывного спектра (34), (П.1)-(П.5). Функ-

ция Грина $\hat{G}_E(k; \bar{r}, \bar{r}')$ является сингулярной обобщенной функцией переменных \bar{r} , \bar{r}' и соответствует результирующему полю, возбуждаемому точечным источником тока в круглом волноводе. В частности, $G_{E11}(k; \bar{r}, \bar{r}')$ в форме интеграла Фурье имеет вид:

$$G_{E11}(k; \bar{r}, \bar{r}') = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(z-z')} d\chi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} \times \left[\frac{m^2}{v^2(\chi)\rho\rho'} J_m(v(\chi)\rho') \times \left[H_m^{(1)}(v(\chi)\rho) - J_m(v(\chi)\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\chi)R)}{J_m'(v(\chi)R)} \right] + J_m'(v(\chi)\rho') \times \left[H_m^{(1)'}(v(\chi)\rho) - J_m'(v(\chi)\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\chi)R)}{J_m(v(\chi)R)} \right], \rho > \rho' \right] \times \left[\frac{m^2}{v^2(\chi)\rho\rho'} J_m(v(\chi)\rho) \times \left[H_m^{(1)}(v(\chi)\rho') - J_m(v(\chi)\rho') \frac{H_m^{(1)'}(v(\chi)R)}{J_m'(v(\chi)R)} \right] + J_m'(v(\chi)\rho) \times \left[H_m^{(1)'}(v(\chi)\rho') - J_m'(v(\chi)\rho') \frac{H_m^{(1)}(v(\chi)R)}{J_m(v(\chi)R)} \right], \rho' > \rho \right] \quad (35)$$

или

$$G_{E11}(k; \bar{r}, \bar{r}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{11}(k; \bar{r}, \bar{r}'; \chi, m) d\chi. \quad (36)$$

Другие компоненты $G_{Epq}(k; \bar{r}, \bar{r}')$ имеют аналогичное представление:

$$G_{Epq}(k; \bar{r}, \bar{r}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{pq}(k; \bar{r}, \bar{r}'; \chi, m) d\chi. \quad (37)$$

Поэтому вычисление контурного интеграла в (36) и (37) рассмотрим на примере $G_{E11}(k; \bar{r}, \bar{r}')$ для $\rho > \rho'$.

Введем для $\rho > \rho'$ обозначение:

$$\tilde{F}_{1r}(\chi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{1r}(k; \bar{r}, \bar{r}'; \chi, m). \quad (38)$$

Входящие в $\tilde{F}_{1r}(\chi)$ комплексные переменные $v(\chi)$ и $\chi(v)$, являются многозначными функциями аргументов χ и v соответственно. Регулярные ветви $v(\chi)$ и $\chi(v)$ выбираем в виде:

$$v = i\sqrt{\chi^2 - k^2}, \quad (39)$$

$$\chi = i\sqrt{v^2 - k^2}. \quad (40)$$

Символ $\sqrt{\cdot}$ в (39), (40) обозначает главное значение аналитической функции. Отметим, что между регулярными ветвями функций $v(\chi)$ и $\chi(v)$ существует взаимно однозначное соответствие [23]. В этом случае в верхней полуплоскости комплексного переменного v значение $\tilde{F}_{1r}(\chi)$ стремится к нулю при $v \rightarrow \infty$. В верхней полуплоскости переменной χ для $z - z' > 0$ функция $\tilde{F}_{1r}(\chi)$ стремится к нулю при $\chi \rightarrow \infty$.

Анализ выражений (35), (36) с учетом (38) показывает, что $\tilde{F}_{1r}(\chi)$ имеет в верхней и нижней полуплоскостях переменного χ точки ветвления $\chi = k$, $\chi = -k$ (с разрезом вдоль ветви гиперболы), а также бесконечное число полюсов, которые определяются из условий $J_m(v_{mn}R) = 0$, $J'_m(v'_{mn}R) = 0$ ($v_{mn} = \frac{y_{mn}}{R}$; $v'_{mn} = \frac{y'_{mn}}{R}$; где y_{mn} , y'_{mn} – корни функции $J_m(u)$ и ее производной $J'_m(u)$ соответственно).

Образум для $z - z' > 0$ интеграл от $\tilde{F}_{1r}(\chi)$ по контуру C , который находится на комплексной плоскости χ (см. рис. 1),

$$I = \int_C \tilde{F}_{1r}(\chi) d\chi. \quad (41)$$

$$H_m^{(1)}(v(\chi)\rho) = \frac{2i}{\pi} \ln \left[\frac{v(\chi)\rho}{2} \right] J_m(v(\chi)\rho) + K(v(\chi)\rho),$$

$$H_m^{(1)'}(v(\chi)\rho) = \frac{2i}{\pi} \ln \left[\frac{v(\chi)\rho}{2} \right] J'_m(v(\chi)\rho) + K_1(v(\chi)\rho),$$

где $K(v(\chi)\rho)$ и $K_1(v(\chi)\rho)$ – однозначные функции переменной χ в замкнутой области χ . Согласно соотношениям для $H_m^{(1)}(v(\chi)\rho)$ и $H_m^{(1)'}(v(\chi)\rho)$ подынтегральная функция $\tilde{F}_{1r}(\chi)$

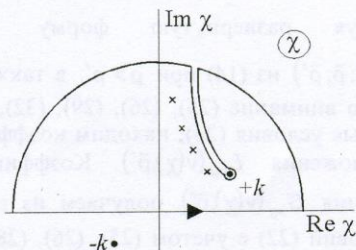


Рис. 1. Контур интегрирования функции $G_{E_{pq}}(k; \bar{r}, \bar{r}')$ в комплексной плоскости χ при $z - z' > 0$

Для вычисления контурного интеграла (41) выпишем функции $H_m^{(1)}(v(\chi)\rho)$ и $H_m^{(1)'}(v(\chi)\rho)$:

имеет одинаковое значение на обоих берегах разреза, проведенного из точки $\chi = +k$, и является регулярной функцией в окрестности данной точки. Это обусловлено тем, что скачок слагаемых

$$J_m(v(\chi)\rho) \frac{H_m^{(1)'}(v(\chi)R)}{J'_m(v(\chi)R)}, \quad J'_m(v(\chi)\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\chi)R)}{J_m(v(\chi)R)}$$

в квадратных скобках выражения (35) при обходе точки $\chi = +k$ компенсируется соответствующим скачком слагаемых $H_m^{(1)}(v(\chi)\rho)$ и $H_m^{(1)'}(v(\chi)\rho)$. Поэтому контурный интеграл на разрезе равен нулю:

$$\int \tilde{F}_{1r}(\chi) d\chi = 0. \quad (42)$$

Подынтегральная функция $\tilde{F}_{1r}(\chi)$ имеет в области χ полюсы:

$$\chi(v_{mn}) = i\sqrt{v_{mn}^2 - k^2}, \quad \chi(v'_{mn}) = i\sqrt{v'_{mn}^2 - k^2}.$$

Отсюда интеграл по замкнутому контуру C равен:

$$\int_C \tilde{F}_{1r}(\chi) d\chi = 2\pi i \times \sum_m \sum_n [\text{res } \tilde{F}_{1r}(\chi(v_{mn})) + \text{res } \tilde{F}_{1r}(\chi(v'_{mn}))]. \quad (43)$$

Учитывая, что интегралы вдоль дуг окружности (при перемещении этих дуг на бесконечность) равны нулю, и используя (41)-(43), получаем:

части производной. Следовательно, трудности возникли только при вычислении действительных частей.

Рассматриваемые величины как функции числа азимутальных гармоник m вычислялись с использованием выражений (46), (47), (49), (50), где особенности содержатся неявным образом (кривые 2 на рис. 4-6), и с использованием выражений (6), (15), (34), (П.1), (П.3), (П.4), где особенность выделена в явном виде (кривые 1 на рис. 4-6).

В формулах (46), (47), (49), (50) суммирование по n (номер корня) выполнялось от 1 до 200, так как дальнейшее увеличение n слабо влияло на точность вычислений. В формуле (34)

подынтегральное выражение является четной функцией χ и при $\chi > k$ экспоненциально убывает с ростом χ , поэтому интегрирование по χ выполнялось в пределах от 0 до $40k$. Радиус

полуокружностей вокруг полюса $\sqrt{k^2 - (v'_{11})^2}$ (рис. 2) и точки ветвления $+k$ (рис. 2, 3) выбирался равным $0.01k$; при указанных параметрах вклад контурных интегралов по полуокружностям в величину результирующего контурного интеграла оказывается незначительным.

Как следует из рис. 4, 5, кривые 1 для действительной части компонент функции Грина выходят на насыщение при меньшем числе азимутальных гармоник m , чем кривые 2. Это обусловлено тем, что в первом случае особенность действительной части компонент функции Грина вычислялась в замкнутом виде. В режиме бегущей волны H_{11} для $\text{Re} \frac{\partial G_{E11}(k; \vec{r}, \vec{r}')}{\partial x^1}$ кривые 1 стабилизируются одинаково хорошо как при малых, так и при больших расстояниях между источником \vec{r}' и точкой наблюдения \vec{r} (рис. 6, а, б). Кривые 2 на рис. 6 осциллируют относительно постоянного значения $\text{Re} \frac{\partial G_{E11}(k; \vec{r}, \vec{r}')}{\partial x^1}$, т. е. в пределах заданного числа азимутальных гармоник m и $n_{\text{max}} = 200$ (n_{max} – максимальный номер корня) двойной ряд расходится. Последнее обстоятельство вызвано тем, что

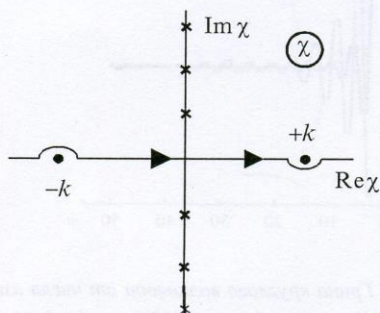


Рис. 3. Контур интегрирования в комплексной плоскости χ для режима отсечки

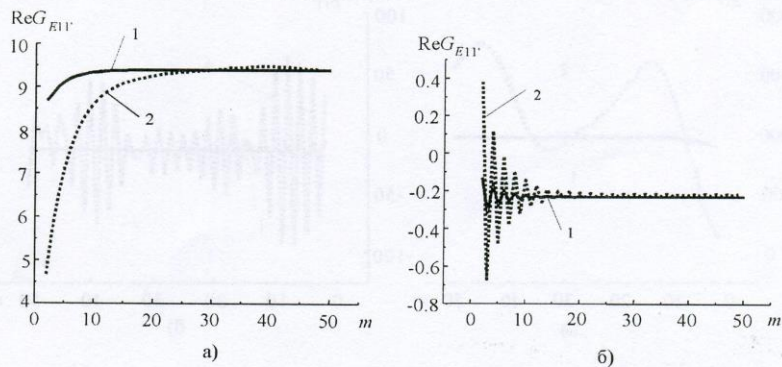


Рис. 4. Зависимость действительной части компоненты функции Грина круглого волновода $\text{Re} G_{E11}(k; \vec{r}, \vec{r}')$ от числа азимутальных гармоник m в режиме отсечки ($k = 12.56 \text{ м}^{-1}$, $R = 0.0755 \text{ м}$, $z = z'$, $\rho = 0.07 \text{ м}$, $\rho' = 0.06 \text{ м}$):

1 – особенность выделена в явном виде, 2 – особенность не выделена явно;
а) $\varphi = \varphi'$, $|\vec{r} - \vec{r}'|/\lambda = 0.02$; б) $\varphi = \varphi' + \pi$; $|\vec{r} - \vec{r}'|/\lambda = 0.26$

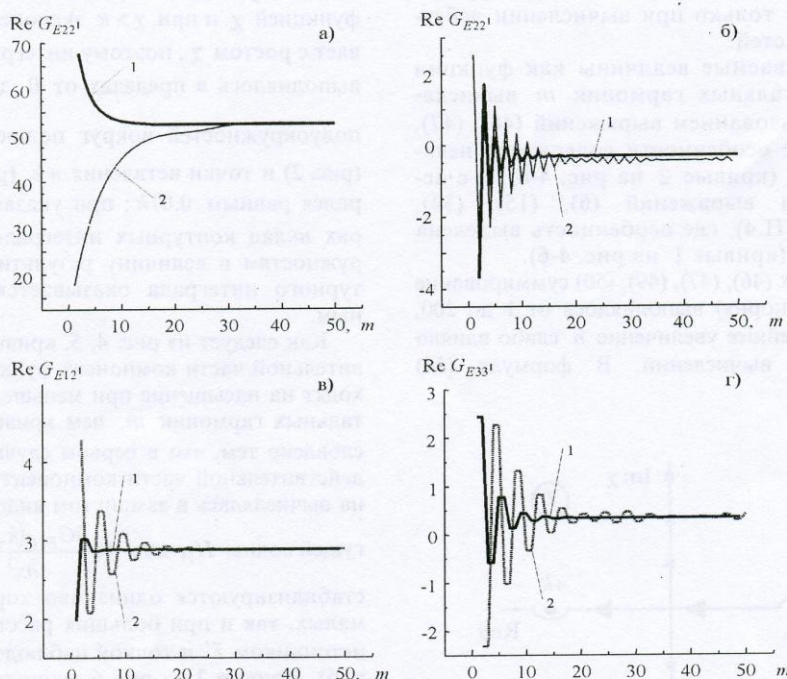


Рис. 5. Зависимость действительной части компонент функции Грина круглого волновода от числа азимутальных гармоник m в режиме отсечки ($k=12.56 \text{ м}^{-1}$, $R=0.0755 \text{ м}$, $z=z'$, $\rho=0.07 \text{ м}$, $\rho'=0.06 \text{ м}$):

1 – особенность выделена в явном виде, 2 – особенность не выделена;

а) $\varphi = \varphi'$, $|\bar{r} - \bar{r}'|/\lambda = 0.02$; б) $\varphi = \varphi' + \pi$; $|\bar{r} - \bar{r}'|/\lambda = 0.26$; в) $\varphi = \varphi' + \pi/2$, $|\bar{r} - \bar{r}'|/\lambda = 0.184$;

г) $\varphi = \varphi' + \pi/2$, $|\bar{r} - \bar{r}'|/\lambda = 0.184$

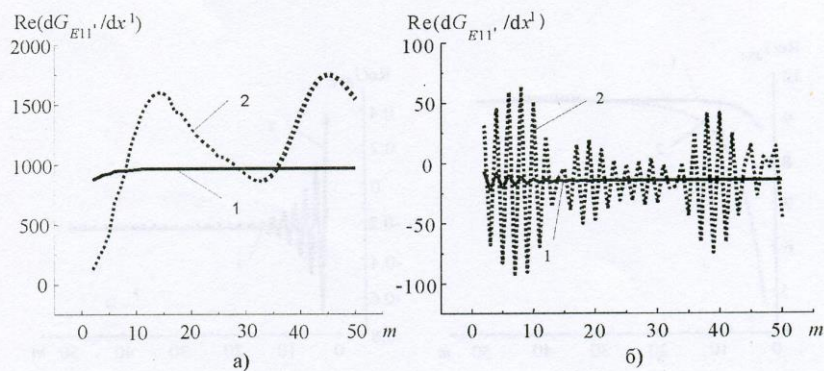


Рис. 6. Зависимость действительной части производной компоненты функции Грина круглого волновода $\text{Re} \frac{\partial G_{E11}(k; \bar{r}, \bar{r}')}{\partial x^1}$ от числа азимутальных гармоник m в режиме бегущей волны H_{11} ($k=27.7263 \text{ м}^{-1}$, $R=0.0755 \text{ м}$, $z=z'$, $\rho=0.07 \text{ м}$, $\rho'=0.06 \text{ м}$):

1 – особенность выделена в явном виде, 2 – особенность не выделена;

а) $\varphi = \varphi'$, $|\bar{r} - \bar{r}'|/\lambda = 0.044$; б) $\varphi = \varphi' + \pi$; $|\bar{r} - \bar{r}'|/\lambda = 0.574$

двойные ряды для $\text{Re} \frac{\partial G_{E11}(k; \bar{r}, \bar{r}')}{\partial x^1}$ в неявном виде содержат особенность более высокого порядка $1/|\bar{r} - \bar{r}'|^2$. Кривые 1 на рис. 4, 5 и 6 выходят на насыщение практически при одинаковом значении m благодаря тому, что выражения $\frac{\cos(k|\bar{r} - \bar{r}'|)}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$ и $\frac{\cos(k|\bar{r} - \bar{r}'|)}{|\bar{r} - \bar{r}'|^2}$ вычисляются в замкнутом виде.

Отношение $|\bar{r} - \bar{r}'|/\lambda$ изменялось в широких пределах от 0.02 до 0.574 и почти не влияло на стабилизацию кривых 1 на рис. 4-6.

4. Выводы

Решена задача построения тензорной функции Грина $\hat{G}_E(k; \bar{r}, \bar{r}')$ для векторного потенциала круглого волновода, которая удовлетворяет однородным граничным условиям на стенках волновода. Функция $\hat{G}_E(k; \bar{r}, \bar{r}')$ получена в виде суммы тензорной функции Грина неограниченного пространства $\hat{G}_E^S(k; \bar{r}, \bar{r}')$ и регулярной функции Грина $\hat{G}_E^R(k; \bar{r}, \bar{r}')$, соответствующей полю токов в стенке волновода.

Такое представление дает возможность рассчитывать $\hat{G}_E(k; \bar{r}, \bar{r}')$ при $\forall \left(\frac{|\bar{p} - \bar{p}'|}{\lambda} \cup \frac{|z - z'|}{\lambda} \leq 0.2 \right)$.

С учетом того, что при $\forall \left(\frac{|\bar{p} - \bar{p}'|}{\lambda} \cup \frac{|z - z'|}{\lambda} \geq 0.2 \right)$

для вычисления $\hat{G}_E(k; \bar{r}, \bar{r}')$ успешно используются выражения в виде двойных сумм, разработан алгоритм расчета функции $\hat{G}_E(k; \bar{r}, \bar{r}')$ и ее производных, применимый практически при любых расстояниях между источником и точкой наблюдения. Выделение особенностей функции Грина $\hat{G}_E(k; \bar{r}, \bar{r}')$ в явном виде позволяет расширить круг электродинамических задач для круглого волновода, к которым применимы интегральные методы. Алгоритм расчета $\hat{G}_E(k; \bar{r}, \bar{r}')$ был апробирован на задачах о рассеянии волны H_{11} на импедансном вибраторе и диэлектрической сфере (с большим значением диэлектрической проницаемости) в круглом волноводе.

Приложение

Компоненты регулярной функции Грина круглого волновода $\hat{G}_E^R(k; \bar{r}, \bar{r}')$ в диадном базисе $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$:

$$G_{E12'}^R(k; \bar{r}, \bar{r}') = \frac{i}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i m e^{im(\varphi - \varphi')} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(z-z')} \left[\frac{1}{v(\chi)\rho} \times J'_m(v(\chi)\rho') J_m(v(\chi)\rho) \frac{H_m^{(1)'}(v(\chi)R)}{J'_m(v(\chi)R)} + \frac{1}{v(\chi)\rho'} J_m(v(\chi)\rho') J'_m(v(\chi)\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\chi)R)}{J_m(v(\chi)R)} \right] d\chi, \quad (\text{П.1})$$

$$G_{E21'}^R(k; \bar{r}, \bar{r}') = \frac{-i}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i m e^{im(\varphi - \varphi')} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(z-z')} \left[\frac{1}{v(\chi)\rho'} \times J_m(v(\chi)\rho') J_m(v(\chi)\rho) \frac{H_m^{(1)'}(v(\chi)R)}{J'_m(v(\chi)R)} + \frac{1}{v(\chi)\rho} J'_m(v(\chi)\rho') J_m(v(\chi)\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\chi)R)}{J_m(v(\chi)R)} \right] d\chi, \quad (\text{П.2})$$

$$G_{E22'}^R(k; \bar{r}, \bar{r}') = \frac{-i}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(z-z')} \left[J'_m(v(\chi)\rho') J'_m(v(\chi)\rho) \times \frac{H_m^{(1)'}(v(\chi)R)}{J'_m(v(\chi)R)} + \frac{m^2}{v^2(\chi)\rho\rho'} J_m(v(\chi)\rho') J_m(v(\chi)\rho) \times \frac{H_m^{(1)}(v(\chi)R)}{J_m(v(\chi)R)} \right] d\chi, \quad (\text{П.3})$$

$$G_{E33'}^R(k; \bar{r}, \bar{r}') = \frac{-i}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi - \varphi')} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi(z-z')} \left[J_m(v(\chi)\rho') J_m(v(\chi)\rho) \times \frac{H_m^{(1)}(v(\chi)R)}{J_m(v(\chi)R)} \right] d\chi, \quad (\text{П.4})$$

$$G_{E13'}^R(k; \vec{r}, \vec{r}') = G_{E23'}^R(k; \vec{r}, \vec{r}') = G_{E31'}^R(k; \vec{r}, \vec{r}') = G_{E32'}^R(k; \vec{r}, \vec{r}') = 0. \quad (\text{П.5})$$

Работа выполнена в рамках проекта 2.4/799 "Интегральные методы анализа сильно нагруженных волноведущих структур", финансируемого Государственным фондом фундаментальных исследований Украины.

Литература

1. Н. А. Хижняк. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев, Наукова думка, 1986, 280 с.
2. Л. Фелсен, Н. Маркувиц. Излучение и рассеяние волн. (Пер. с англ.) Москва, Мир, 1978, Т. 1, 547 с.; Т. 2, 555 с.
3. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. (Пер. с англ.) Москва, Издательство иностранной литературы, 1958, Т. 1, 930 с.; 1960, Т. 2, 886 с.
4. С. Т. Tai. Dyadic Green's functions in electromagnetic theory. Stranton, Intent educational publishers, 1972, 119 pp.
5. В. А. Панченко. Радиотехника. Харьков, 1970, Вып. 15, с. 85-91.
6. М. Kislyuk. IEEE Trans. Microwave Theory and Technique. 1980, МТТ-28, pp. 894-898.
7. А. Л. Гульянц, Е. Н. Тюрин. Ускорители. Москва, Атомиздат, 1981, Вып. 20, с. 76-85.
8. Н. М. Бравер. Радиотехника и электроника. 1987, 32, с. 2278-2285.
9. B.-S. Wang. IEEE Trans. Microwave Theory and Technique. 1989, МТТ-37, №6, pp. 1006-1011.
10. S. D. Prijmenko, N. A. Khizhnyak. Proc. of China-Jap. joint meeting on microwaves. Dalian, 1994, pp. 222-225.
11. S. D. Prijmenko, N. A. Khizhnyak. Proc. of the 6-th Intern. conf. on math. methods in electromagnetic theory. Lviv, 1996, pp. 132-135.
12. S. D. Prijmenko, N. A. Khizhnyak. Proc. of the Intern. conf. on math. methods in electromagnetic theory. Kharkov, 1994, pp. 342-345.
13. S. D. Prijmenko, N. A. Khizhnyak. Proc. of the Intern. Simp. on Antenna in NJCI. Nice, 1996, pp. 44-47.
14. С. Д. Прийменко, Н. А. Хижняк. Радиотехника. 1998, вып. 105, с. 3-13.
15. S. D. Prijmenko, L. A. Bondarenko, N. A. Khizhnyak, A. I. Kozjur. Proc. of the 8th Intern. Crimean Microwave Conf. Sevastopol, 1998, pp. 271-272.
16. S. D. Prijmenko, E. V. Krivorukov, N. A. Khizhnyak. Proc. of the 7th Intern. Crimean Microwave Conf. Sevastopol, 1997, pp. 580-581.
17. S. D. Prijmenko, G. A. Brjuzgalov, N. A. Khizhnyak. Proc. of 7th Intern. conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory. Kharkov, 1998, pp. 819-821.
18. С. Д. Прийменко, В. Г. Папкович, Н. А. Хижняк. Препринт ХФТИ. Харьков, 1991, №27, 11 с.
19. Б. Е. Победря. Лекции по тензорному анализу. Москва, Изд. МГУ, 1979, 223 с.
20. W. W. Hansen. Phys. Rev. 1935, 47, pp. 139-143.
21. W. W. Hansen. J. Appl. Phys. 1936, 7, pp. 460-465.
22. W. W. Hansen. J. Appl. Phys. 1937, 8, pp. 282-286.
23. М. А. Евграфов. Аналитические функции. Москва, Наука, 1968, 471 с.
24. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. (Пер. с англ.) Москва, Наука, 1979, 832 с.

Green's Function with Explicit Singularity in Circular Waveguide

S. D. Priymenko, N. A. Khizhnyak

The tensor Green's function for electric vector potential is obtained as solution of a problem of spherical wave diffraction on the inner surface of a circular waveguide. The Green's function of the circular waveguide is found as a superposition of the tensor infinite-space Green's function in closed form and the regular one. The representation of Green's function and its derivatives of first and second orders as the sums of the singular and regular parts permits to create an algorithm, which provides the necessary calculation accuracy at arbitrary space between the current source and observation point. The algorithm can be effectively used in the problems, where the fields for loaded circular waveguides are calculated both in the current source region and its vicinity. The calculations of the Green's function and its derivative of the first order were carried out for the distances between the source and observation point ranging from few hundred to the half of the wavelength.