

О симметричном электромагнитном облучении конечного конуса

Д. Б. Куриляк, З. Т. Назарчук

Физико-механический институт НАНУ
Украина, 290601, Львов, ул. Наукова, 5
e-mail: kuryliak@ipm.lviv.ua, nazarch@ipm.lviv.ua

Статья поступила в редакцию 10 августа 1999 г.

Обоснован формализм метода рядов собственных функций при решении скалярной задачи дифракции на конечном конусе. При этом сумматорные уравнения задачи получены предельным переходом к рядам на границе раздела областей. Сформулировано правило предельного перехода к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, для которых существует единственное решение, строго удовлетворяющее условию Мейкснера. Доказательство основано на анализе асимптотик этих уравнений с привлечением метода "полуобращения". Полученные системы второго рода использованы для численного анализа диаграмм направленности и нормированного сопоставления излучения радиального электрического диполя в присутствии конечного конуса.

Обґрунтовано формалізм методу рядів власних функцій при розв'язанні скалярної задачі дифракції на скінченному конусі. Суматорні рівняння задачі отримані граничним переходом до рядів на межі розділу областей. Сформульовано правило граничного переходу до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, для яких існує єдиний розв'язок, що строго задовольняє умові Мейкснера. Доведення базується на аналізі асимптотик із залученням методу "напівобертання". Отримані системи другого роду використані для чисельного аналізу діаграм спрямованості і нормованого опору випромінювання радіального електричного диполя за наявності скінченного конуса.

Введение

Конические поверхности конечной протяженности являются базисными элементами при изучении взаимодействия электромагнитных полей с элементами радиофизических устройств, радиолокационными мишенями, дефектами материалов. Проблема рассеяния волн конечными конусами исследовалась с помощью различных подходов, включая асимптотические [1], численные [2] и численно-аналитические, базирующиеся на применении методов Винера-Хопфа [3,4] и "полуобращения" [5,6]. Учитывая важность конических структур при решении широкого класса задач технической физики и сложность строгого анализа соответствующих процессов дифракции, целесообразно обосновать формализм метода рядов собственных функций и тем самым расширить возможности метода "полуобращения" при решении скалярных задач. Такой подход продемонстрирован на примере наиболее простой задачи дифракции на конечном конусе. Это позволило установить более глубокую связь с методами, используемыми при анализе плоских структур [7] и дало дополнительные возможности для сравнения и контроля численных результатов.

Постановка задачи и основные соотношения

Пусть в сферической системе координат (r, θ, φ) задана идеально проводящая коническая поверхность

$$Q = \{r \in [0, c], \theta = \gamma, \varphi \in [0, 2\pi]\}, \quad (1)$$

облучаемая радиальным электрическим диполем, расположенным на оси симметрии конуса (рис. 1) и возбуждающим симметричные ТМ-волны с отличными от нуля компонентами E_r, E_θ, H_φ . Зависимость от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$, который в дальнейшем опускаем. Задача заключается в определении возмущения, вносимого конусом (1) в поле источника. Физические процессы, связанные с дифракцией симметричных волн на рассматриваемом конусе, описываются одной скалярной функцией (потенциалом), являющейся ограниченным решением уравнения Гельмгольца, удовлетворяющего граничным условиям, а также условиям излучения и условиям Мейкснера на краях и вершине. Поэтому, используя метод разложения в ряды собственных функций частных областей, искомую функцию представляем так:

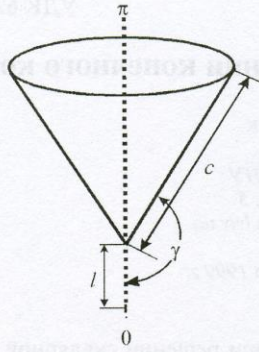


Рис. 1. Геометрия задачи

$$U(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} x_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) \frac{K_{z_n}(\rho)}{K_{z_n}(\rho_1)}, \quad (2a)$$

$$\rho, \theta \in D_2: \{r \in (c, \infty), \theta \in [0, \pi]\},$$

$$U(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(1)} P_{v_n-1/2}(\cos \theta) \frac{I_{v_n}(\rho)}{I_{v_n}(\rho_1)}, \quad (2б)$$

$$\rho, \theta \in D_1^{(1)}: \{r \in [0, c), \theta \in [0, \gamma]\},$$

$$U(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(2)} P_{\mu_n-1/2}(-\cos \theta) \frac{I_{\mu_n}(\rho)}{I_{\mu_n}(\rho_1)}, \quad (2в)$$

$$\rho, \theta \in D_1^{(2)}: \{r \in [0, c), \theta \in [\gamma, \pi]\},$$

Здесь $x_n, y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ – неизвестные коэффициенты разложения; $\rho = sr$ ($s = -ik$), $k = k_1 + ik_2$ – волновое число, $\text{Im } k > 0$; $\rho_1 = sc$; $I_v(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя; $K_v(\cdot)$ – функция Макдональда; $z_n = n + 1/2$; $P_{v-1/2}(\cdot)$ – функция Лежандра; индексы v_n, μ_n – соответственно положительные корни трансцендентных уравнений:

$$\begin{aligned} P_{v-1/2}(\cos \gamma) &= 0, \\ P_{\mu-1/2}(-\cos \gamma) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая выражения (2), потенциал полного поля записываем в виде:

$$U^{(i)}(r, \theta) = \begin{cases} U^{(i)}(r, \theta) + U(r, \theta) & \text{(для областей, содержащих диполь);} \\ U(r, \theta) & \text{(для областей без диполя).} \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $U^{(i)}(r, \theta)$ – потенциал первичного поля.

Для диполя, локализованного в области D_2 , потенциал первичного поля соответствует его значению в однородном пространстве и записывается в виде ряда:

$$U^{(i)}(r, \theta) = \frac{A_0}{\sqrt{\rho\rho_0}} \times \sum_{n=1}^{\infty} z_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) \begin{cases} K_{z_n}(\rho) I_{z_n}(\rho_0), & r \geq l \\ I_{z_n}(\rho) K_{z_n}(\rho_0), & r \leq l \end{cases}, \quad (5a)$$

где $A_0 = 2P_0 Z / l$, P_0 – момент диполя, l – его радиальная координата на оси симметрии конуса при $\theta = 0$, Z – волновое сопротивление среды; $\rho_0 = sl$.

В случае локализации диполя в конических областях $D_1^{(1)}$ или $D_1^{(2)}$ функция $U^{(i)}(r, \theta)$ соответствует потенциалу поля, возбуждаемого рассматриваемым источником при наличии бесконечной идеально проводящей конической поверхности, и представляется так:

$$U^{(i)}(r, \theta) = \frac{A_0 \pi}{\sqrt{\rho\rho_0}} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n P_{\eta_n-1/2}(\pm \cos \theta) P_{\eta_n-1/2}(\mp \cos \gamma)}{\cos(\pi \eta_n) \frac{\partial}{\partial \eta} [P_{\eta-1/2}(\pm \cos \gamma)]_{\eta=\eta_n}} \times \begin{cases} K_{\eta_n}(\rho) I_{\eta_n}(\rho_0), & r \geq l \\ I_{\eta_n}(\rho) K_{\eta_n}(\rho_0), & r \leq l \end{cases}, \quad (5б)$$

где $\eta_n = v_n$, и верхний знак соответствует локализации источника в области $D_1^{(1)}$; $\eta_n = \mu_n$, и нижний знак – в области $D_1^{(2)}$. Компоненты поля выражаются через потенциалы (2), (4), (5) при помощи соотношений:

$$\begin{aligned} \{E_r, E_\theta, H_\phi\} = & \\ = & \left\{ -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right); \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rU); ikZ^{-1} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Сумматорные уравнения и анализ решений

Запишем условия непрерывности тангенциальных компонент полного поля на сферической поверхности $r = c$ в виде:

$$\begin{aligned} E_{\theta}^{(i)}(r, \theta) \Big|_{r=c-0} &= E_{\theta}^{(i)}(r, \theta) \Big|_{r=c+0}, \\ H_{\phi}^{(i)}(r, \theta) \Big|_{r=c-0} &= H_{\phi}^{(i)}(r, \theta) \Big|_{r=c+0}. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом представлений (2), (4), (5), а также соотношений (6), (7) получаем сумматорные уравнения для определения коэффициентов разложения в (2). Ограничимся конечным числом членов в рядах исходных сумматорных уравнений и будем рассматривать предельный переход к бесконечному числу слагаемых. Для этого переписем эти уравнения так:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_{z_n-1/2}^1(\cos \theta) [x_n + A_0 \rho_0^{-1/2} z_n I_{z_n}(\rho_1) K_{z_n}(\rho_0)] = \\ = \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(1)} P_{v_p-1/2}^1(\cos \theta), & 0 \leq \theta \leq \gamma, \\ -\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M y_m^{(2)} P_{\mu_m-1/2}^1(-\cos \theta), & \gamma \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_{z_n-1/2}^1(\cos \theta) \times \\ \times \left[x_n \frac{K'_{z_n}(\rho_1)}{K_{z_n}(\rho_1)} + A_0 \rho_0^{-1/2} z_n I'_{z_n}(\rho_1) K_{z_n}(\rho_0) \right] = \\ = \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(1)} \frac{I'_{v_p}(\rho_1)}{I_{v_p}(\rho_1)} P_{v_p-1/2}^1(\cos \theta), & 0 \leq \theta \leq \gamma, \\ -\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M y_m^{(2)} \frac{I'_{\mu_m}(\rho_1)}{I_{\mu_m}(\rho_1)} P_{\mu_m-1/2}^1(-\cos \theta), & \gamma \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (8b)$$

Здесь $P_{v-1/2}^1(\pm \cos \theta) = \pm \partial / \partial \theta [P_{v-1/2}(\pm \cos \theta)]$, источник излучения размещен в области D_2 ; штрих в (8b) означает производную по аргументу.

После непосредственной проверки убеждаемся, что для выполнения условий Мейкснера решение сумматорных уравнений (8) следует

искать в классе последовательностей, элементы которых стремятся к нулю как $O(\lambda^{-2})$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ ($\lambda = n(p, m)$). При этом необходимо установить правило предельного перехода, обеспечивающее существование такого решения.

Используя условия ортогональности функций Лежандра, записываем соотношение

$$\begin{aligned} P_{z_n-1/2}^1(\cos \theta) &= q(z_n, \gamma) \times \\ \times \lim_{P(M) \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{P(M)} \frac{\eta_k \alpha^{\pm}(\eta_k, \gamma)}{\eta_k^2 - z_n^2} P_{\eta_k-1/2}^1(\pm \cos \theta), \end{aligned} \quad (9)$$

где верхний знак соответствует области $\theta \in [0, \gamma]$, и η_k принимает значение $\eta_k = v_k$, а нижний – $\theta \in [\gamma, \pi]$, $\eta_k = \mu_k$.

$$q(z_n, \gamma) = (z_n^2 - 0.25) P_{z_n-1/2}(\cos \gamma); \quad (10)$$

$$\alpha^{\pm}(\eta_k, \gamma) = \mp 2 \left[(\eta_k^2 - 0.25) \frac{\partial P_{\eta-1/2}(\pm \cos \gamma) |_{\eta=\eta_k}}{\partial \eta} \right]^{-1}.$$

Привлекая технику преобразования рядов (9) в интегралы на комплексной плоскости, аналогично [8] доказываем их равномерную сходимость к своим функциям.

Подставим соотношение (9) в уравнения (8) и приравняем члены с одинаковыми функциями Лежандра $P_{z_n-1/2}^1(\cos \theta)$. Затем из них исключим неизвестные $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$. В результате приходим к двум системам уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \tilde{x}_n \frac{\rho_1 W [K_{z_n} I_{v_p}]_{\rho_1}}{(v_p^2 - z_n^2) K_{z_n}(\rho_1) I_{v_p}(\rho_1)} &= f_p, \\ \sum_{n=1}^N \tilde{x}_n \frac{\rho_1 W [K_{z_n} I_{\mu_m}]_{\rho_1}}{(\mu_m^2 - z_n^2) K_{z_n}(\rho_1) I_{\mu_m}(\rho_1)} &= f_m. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $p = 1, 2, \dots, P$; $m = 1, 2, \dots, M$; $N = M + P$, $N(M, P) \rightarrow \infty$; $W[\cdot]$ – вронскиан;

$$\tilde{x}_p = q(z_p, \gamma) x_p; \quad (12)$$

$$f_k = -\frac{A_0}{\sqrt{\rho_0}} \sum_{n=1}^N z_n q(z_n, \gamma) I_{z_n}(\rho_1) K_{z_n}(\rho_0) \times \frac{\rho_1 W[I_{z_n} I_{\eta_k}]_{\rho_1}}{(\eta_k^2 - z_n^2) I_{z_n}(\rho_1) I_{\eta_k}(\rho_1)}, \quad (13)$$

где $\eta_k \in \{v_p\}_{p=1}^P$ и $\eta_k \in \{\mu_m\}_{m=1}^M$ для первого и второго уравнений (11) соответственно.

Непосредственной проверкой устанавливаем, что для действительных положительных значений индексов в (11) справедлива асимптотическая оценка:

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ (\eta \neq \lambda)}} \frac{\rho_1 W[K_{\eta} I_{\lambda}]_{\rho_1}}{(\eta^2 - \lambda^2) K_{\eta}(\rho_1) I_{\lambda}(\rho_1)} = \frac{1}{\eta - \lambda} + O((\eta^2 - \lambda^2)^{-1}). \quad (14)$$

Рассмотрим вспомогательные системы, которые получаем, заменяя коэффициенты при неизвестных в уравнениях (11) главными частями их асимптотик (14):

$$\sum_{n=1}^N \frac{\tilde{x}_n}{v_p - z_n} = \frac{\tilde{A}_j}{v_p + z_j}, \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{\tilde{x}_n}{\mu_m - z_n} = \frac{\tilde{A}_j}{\mu_m + z_j}.$$

Здесь $p=1, 2, \dots, P$; $m=1, 2, \dots, M$; $\tilde{A}_j / (\eta_k + z_j)$ – главная часть асимптотики j -го члена ряда (13). Учитывая, что при $p, m \rightarrow \infty$ имеют место соотношения:

$$v_p = \pi(p - 1/4) / \gamma + O(1/p), \quad (16)$$

$$\mu_m = \pi(m - 1/4) / (\pi - \gamma) + O(1/m),$$

и используя методику совместного решения систем типа двойных альтернатив [9], находим, что системы (15) допускают единственное решение с алгебраическим стремлением к нулю на бесконечности вида

$$\tilde{x}_n = O(n^{-1/2}) \quad \text{при } N \gg n \rightarrow \infty \quad (17)$$

только при условии

$$P/M = \gamma / (\pi - \gamma) \quad \text{для } P, M \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Соотношение (18) является аналогом известного в теории плоских разветвленных волноводов правила редукции бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ). Принимая во внимание выражения (12) и (10), находим, что $x_n = O(n^{-2})$. Следовательно, обеспечивается выполнение условий Мейкснера в области D_2 .

Для осуществления перехода к пределу $N \rightarrow \infty$ в (15) составим из элементов (16) возрастающую последовательность

$$\{\xi_n\}_{n=1}^N = \{v_p\}_{p=1}^P \cup \{\mu_m\}_{m=1}^M. \quad (19)$$

Размещая уравнения (15) в соответствии с последовательностью (19), приходим к системе вида:

$$\sum_{n=1}^N \frac{\tilde{x}_n}{\xi_q - z_n} = \frac{\tilde{A}_j}{\xi_q + z_j}, \quad q = \overline{1, N} \quad (20)$$

Вследствие (16) для уравнений системы (20) при больших N выполняется условие (18). Следовательно, в предельном случае $N \rightarrow \infty$ она имеет решение, асимптотика которого определяется соотношением (17).

Предполагая, что в (20) осуществлен предельный переход к бесконечной системе, рассмотрим матричный оператор A с элементами $a_{qn} = (\xi_q - z_n)^{-1}$, где $q, n = \overline{1, \infty}$. Для оператора A существует обратный оператор A^{-1} ; элементами которого являются выражения

$$\tau_{kq} = \left\langle \left\{ M_{-1}^{-1}(\xi_q) \right\} M_{-1}'(z_k) (z_k - \xi_q) \right\rangle^{-1}. \quad (21)$$

Здесь $M_{-1}(v)$ – функция, регулярная в полуплоскости $\text{Re} v < 1/2$. В области регулярности при $|v| \rightarrow \infty$ справедлива оценка $M_{-1}(v) = O(v^{-1/2})$. Вне этой области функция $M_{-1}(v)$ имеет простые действительные нули и полюсы в точках z_k и ξ_q соответственно ($k, q = \overline{1, \infty}$) и записывается в виде:

$$M_{-1}(v) = B_0 \times \left\langle (0.5 - v) \Gamma(0.5 - v) e^{-v\lambda} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - v/\xi_n) e^{v/\xi_n} \right\rangle^{-1}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 &\text{где } B_0 = i\sqrt{\pi} \{P_{-0.5}(\cos \gamma)P_{-0.5}(-\cos \gamma)\}^{-1/2}, \\
 &\chi = \frac{\gamma}{\pi} \ln \frac{\gamma}{\pi} + \frac{\pi - \gamma}{\pi} \ln \frac{\pi - \gamma}{\pi} - \psi(3/4) - S(\gamma) - S(\pi - \gamma); \\
 &S(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma}{\pi(n-1/4)} - \frac{1}{v_n} \right],
 \end{aligned}$$

$\psi(\cdot)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

Для матричных элементов (21) при $k, q \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\tau_{kq} = O\left(z_k^{1/2} \xi_q^{-1/2} (z_k - \xi_q)^{-1}\right). \quad (23)$$

Применяя оператор A^{-1} к системе (20) в предельном случае $N \rightarrow \infty$, находим:

$$\tilde{x}_n = A_j \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\tau_{nq}}{\xi_q + z_j} = -\frac{A_j M_+(z_j)}{M'_-(z_n)(z_n + z_j)} = O(n^{-1/2}), \quad (24)$$

где $M_+(v) = M_-(-v)$. Суммирование проводится с учетом (21), ряд преобразуется в интеграл в комплексной плоскости вдоль окружности бесконечного радиуса.

Возвращаясь к двум исходным системам (11), образуем из них одну с уравнениями, размещенными в соответствии с последовательностью (19), и перейдем к пределу $N \rightarrow \infty$. В связи с (16) эта процедура обеспечивает выполнение условия (18). В результате получаем БСЛАУ вида

$$A_1 \tilde{X} = F, \quad (25)$$

где $\tilde{X} = \{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, A_1 – бесконечная матрица с элементами

$$a_{qn}^{(1)} = \frac{\rho_1 W \left[K_{z_n} I_{\xi_q} \right]_{\rho_1}}{(\xi_q^2 - z_n^2) K_{z_n}(\rho_1) I_{\xi_q}(\rho_1)}, \quad (26)$$

$F = \left\{ f_q \right\}_{q=1}^{\infty}$ – известный вектор, определяемый из (13).

Выделяя оператор A из A_1 , и используя обратный оператор A^{-1} , переходим от системы (25) к БСЛАУ второго рода:

$$\tilde{X} = A^{-1}(A - A_1)\tilde{X} + A^{-1}F. \quad (27)$$

На основе анализа матричных операторов полученной системы доказываем, что она имеет единственное решение в классе последовательностей

$$b(\sigma) : \{ \|X\| = \sup_n |x_n n^\sigma|, \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n n^\sigma| = 0, 0 \leq \sigma < 1/2 \}. \quad (28)$$

Это решение находится методом редукции с заданной точностью для произвольных параметров задачи, за исключением множества их дискретных значений, для которых определитель в (27) равен нулю. При этом, вследствие соотношения (12), обеспечивается выполнение условий Мейкснера в D_2 , а алгоритм получения БСЛАУ (27) одновременно раскрывает смысл предельного перехода в сумматорных уравнениях (8), который состоит в соблюдении правила (18) при стремлении P , M и N к бесконечности.

Поскольку сумматорные уравнения (8) допускают также решение относительно коэффициентов разложения из области D_1 , следующей задачей будет их сопоставление. Для этого рассмотрим функцию

$$\Psi_{\eta_p}(\pm \cos \theta) = \begin{cases} P_{\eta_p-1/2}^1(\pm \cos \theta), & \theta \in \gamma^{\pm}; \\ 0, & \theta \in \gamma^{\mp}, \end{cases} \quad (29)$$

где $\gamma^+ : \{0 \leq \theta \leq \gamma\}$, $\gamma^- : \{\gamma \leq \theta \leq \pi\}$; $\eta_p = v_p$ для верхнего знака и $\eta_p = \mu_p$ – для нижнего. Используя условия ортогональности для функций Лежандра в конических областях, представляем (29) в виде:

$$\Psi_{\eta_p}(\pm \cos \theta) = \tilde{q}^{\pm}(\eta_p, \gamma) \times \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{z_k \tilde{\alpha}(z_k, \gamma)}{\eta_p^2 - z_k^2} P_{z_k-1/2}^1(\cos \theta), \quad (30)$$

$$\tilde{q}^{\pm}(\eta_p, \gamma) = \mp \sin \gamma P_{\eta_p-1/2}^1(\pm \cos \gamma), \quad (31)$$

$$\tilde{\alpha}(z_k, \gamma) = P_{z_k-1/2}^1(\cos \gamma).$$

Доказательство равномерной сходимости ряда (30) к функции (29) базируется на его преобразовании к интегралу в комплексной плоскости аналогично [8].

Подставим выражение (30) в правые части уравнений (8) и приравняем члены с одинаковыми функциями Лежандра $P_{\eta_p-1/2}^1(\cos \theta)$. За-

тем исключим неизвестные x_n и придем к системе уравнений вида

$$\sum_{p=1}^P y_p^{(1)} \frac{\tilde{q}^+(v_p, \gamma) \rho_1 W [K_{z_n} I_{v_p}]_{\rho_1}}{(v_p^2 - z_n^2) K_{z_n}(\rho_1) I_{v_p}(\rho_1)} - \sum_{m=1}^M y_m^{(2)} \frac{\tilde{q}^-(\mu_m, \gamma) \rho_1 W [K_{z_n} I_{\mu_m}]_{\rho_1}}{(\mu_m^2 - z_n^2) K_{z_n}(\rho_1) I_{\mu_m}(\rho_1)} = \varphi_n. \quad (32)$$

Здесь $n = \overline{1, N}$ ($N = P + M$),

$$\varphi_n = \frac{A_0 K_{z_n}(\rho_0)}{P_{z_n-1/2}(\cos \gamma) \sqrt{\rho_0} K_{z_n}(\rho_1)}. \quad (33)$$

Разместим неизвестные и коэффициенты в уравнениях системы (32) в соответствии с последовательностью (19) и перейдем к пределу $N \rightarrow \infty$. В результате получаем БСЛАУ

$$A_2 \tilde{Y} = \Phi, \quad (34)$$

где $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – известный и $\tilde{Y} = \{\tilde{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неизвестный векторы соответственно,

$$\tilde{y}_n = \begin{cases} \tilde{q}^+(\xi_n, \gamma) y_n^{(1)} & \text{для } \xi_n \in \{v_p\}_{p=1}^{\infty}, \\ -\tilde{q}^-(\xi_n, \gamma) y_n^{(2)} & \text{для } \xi_n \in \{\mu_p\}_{p=1}^{\infty}; \end{cases} \quad (35)$$

A_2 – бесконечная матрица с элементами

$$a_{nq}^{(2)} = \frac{\rho_1 W [K_{z_n} I_{\xi_q}]_{\rho_1}}{(\xi_q^2 - z_n^2) K_{z_n}(\rho_1) I_{\xi_q}(\rho_1)}. \quad (36)$$

Сопоставляя (26) и (36), находим, что операторы A_1 и A_2 связаны операцией транспонирования. Следовательно, выделяя оператор A^T в (34) и используя соответствующий обратный оператор, получим БСЛАУ второго рода:

$$\tilde{Y} = [A^{-1}]^T (A^T - A_1^T) \tilde{Y} + [A^{-1}]^T \Phi. \quad (37)$$

На основе оценок (14), (16), (23) устанавливаем, что БСЛАУ (37) обладает теми же свойствами, что и (27), и имеет решение в классе последовательностей (28) при $0 \leq \sigma < 3/2$. Используя соотношения (31), (35), находим, что $y_n^{(1)}$, $y_n^{(2)}$ при $n \rightarrow \infty$ допускают асимптотику $O(n^{-2})$, обеспечивающую выполнение условий Мейкснера для разложений (2) в конических областях

D_1 . Связь между решениями систем (27) и (37) устанавливается с помощью формул перераспределения (9) и (30). Например, из (8) непосредственно получаем:

$$y_n^{(2)} = \pm \eta_n \alpha^{\pm}(\eta_n, \gamma) \times \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\tilde{x}_p}{\eta_n^2 - z_p^2} + \frac{A_0}{\sqrt{\rho_0}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z_p q(z_p, \gamma)}{\eta_n^2 - z_p^2} K_{z_p}(\rho_0) I_{z_p}(\rho_1) \right]. \quad (38)$$

Здесь верхний знак соответствует $\eta_n = v_n$, а нижний – $\eta_n = \mu_n$.

Учитывая тот факт, что в статическом пределе матричные операторы (26), (36) переходят в главные части асимптотик (14) для всех значений индексов из спектра разложений в (2), решения систем (27), (37) для этого случая получаем в аналитическом виде. Подставляя их в формулу (38) при $|\sigma| \rightarrow 0$, приходим к тождеству. Это доказывает их эквивалентность в статическом пределе.

В уравнении (27) оператор A^{-1} используется в качестве левостороннего регуляризатора. Непосредственной проверкой устанавливаем, что $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, где I – единичная матрица. Следовательно, БСЛАУ (25) сводится к системе второго рода, где оператор A^{-1} применяется в качестве правостороннего регуляризатора. Такая система записывается так:

$$\hat{X} = (A - A_1) A^{-1} \hat{X} + F, \quad (39)$$

где $\hat{X} = AX$. Аналогичными свойствами обладает и пара операторов A^T , $[A^{-1}]^T$, используемых для регуляризации БСЛАУ (34). Решения этих систем также обеспечивает выполнение условий Мейкснера.

Аналогично, используя выражения (5б), получаем системы уравнений для случая, когда источник излучения помещен внутри конической области. В этом случае, например, для определения неизвестных коэффициентов разложения поля во внешнем пространстве получаем БСЛАУ (25) с более простым выражением для известного вектора в правой части. Его элементы запишем в виде:

$$f_k = -\frac{A_0 \pi I_{\xi_k}(\rho_0) (\xi_k^2 - 0.25) P_{\xi_k-1/2}(\mp \cos \gamma)}{2\sqrt{\rho_0} I_{\xi_k}(\rho_1) \cos(\pi \xi_k)}. \quad (40)$$

Здесь знаки “+” и “-” соответствуют размещению источника в областях $D_1^{(1)}$ и $D_1^{(2)}$ соответственно.

Численное решение и обсуждение результатов

Для анализа волновых процессов, связанных с дифракцией поля диполя на конечном конусе, мы принимали, что $P_0 k = 1/(4\pi)$ А и $Z = 1$ Ом. Рис. 2 иллюстрирует влияние геометрических параметров конуса на форму амплитудных диаграмм направленности дифрагированного поля при облучении со стороны вершины. Из-за симметричности они приведены для углов $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Графики на рис. 2 позволяют проследить динамику изменения диаграмм при переходе от конуса к диску. Видно, что при таком переходе диаграммы конусов постепенно приобретают характерные особенности диаграммы диска (рис. 2, г), в частности, для угла раскрытия $\gamma = 110^\circ$ (рис. 2, в) появляется глубокий минимум в направлении образующей и видна тенденция к симметриза-

ции лепестковой структуры относительно направления $\theta = \pi/2$.

Для выяснения взаимосвязи рассеивателя с источником исследовалось нормированное сопротивление излучения диполя в присутствии конуса (отношение излучаемой мощности диполя в присутствии конуса к мощности, излучаемой этим диполем в свободном пространстве). На рис. 3, 4 показаны зависимости нормированного сопротивления излучения от длины образующей. Кривые на этих рисунках вычислялись при различных углах раскрытия и положениях источника на оси. При этом мы ограничились исследованием случая облучения широкоугольной части конических поверхностей со стороны вершины. Кривые имеют осциллирующий характер. При локализации источника вблизи вершины наблюдаются явно выраженные максимумы в области $kc = 2.5 \div 3.5$, определяемые углом раскрыва конуса (см. рис. 3, а). Кривая 3 на рис. 3, а моделирует ситуацию локализации диполя на диске. Как видно из этого рисунка, нормированное сопротивление излучения диполя в этом

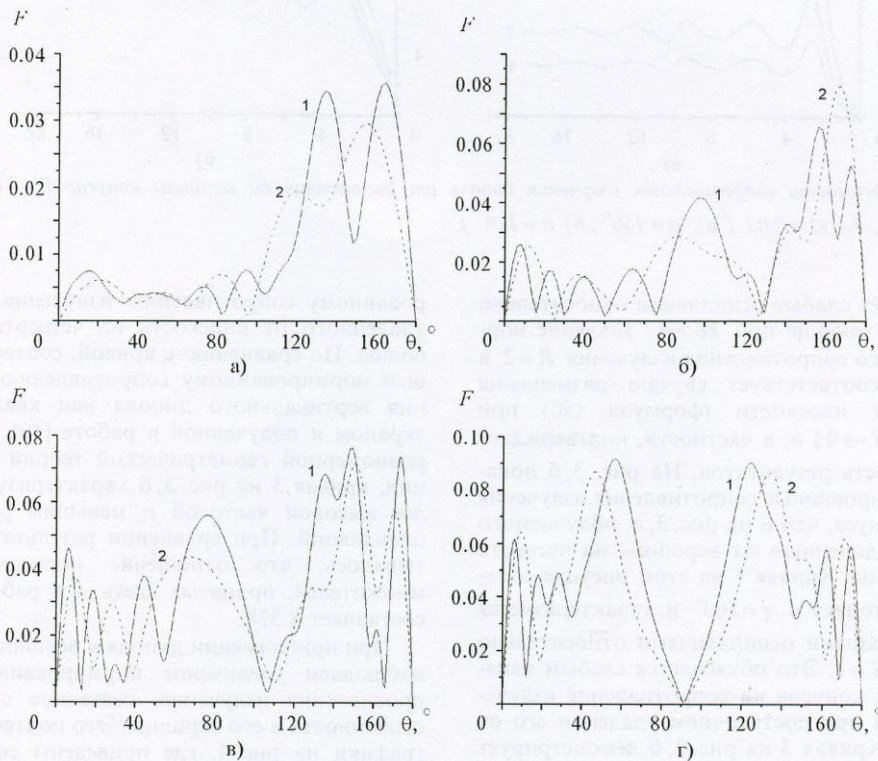


Рис. 2. Влияние угла раскрытия конуса γ на диаграммы направленности дифрагированного поля при $kl = 3$:
 1 – $kc = 18$, 2 – $kc = 12$ (а) $\bar{\alpha} = 160^\circ$; б) $\bar{\alpha} = 130^\circ$; в) $\bar{\alpha} = 110^\circ$; г) $\bar{\alpha} = 91^\circ$)

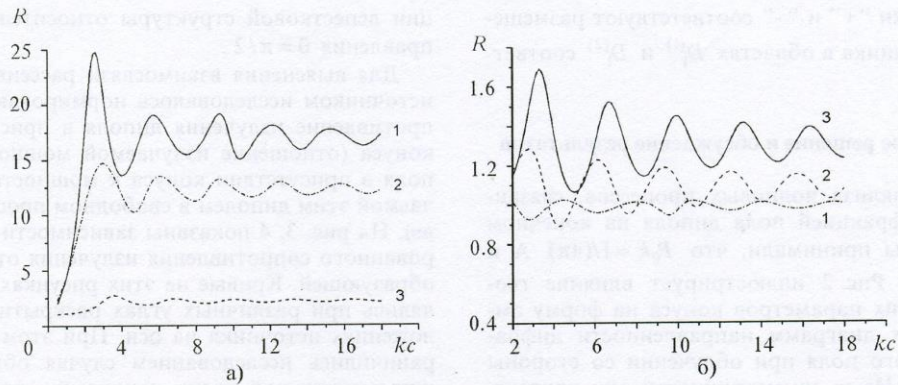


Рис. 3. Сопротивление излучения диполя в присутствии конуса с различными углами раскрытия: 1 – $\bar{\alpha}=160^\circ$; 2 – $\bar{\alpha}=130^\circ$; 3 – $\bar{\alpha}=91^\circ$ (а) $kl=0.1$; б) $kl=1.57$)

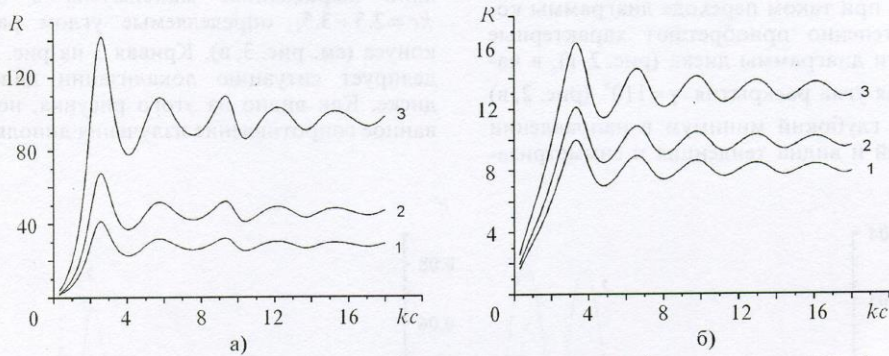


Рис. 4. Зависимость сопротивления излучения диполя от расстояния до вершины конуса: 1 – $kl=0.07$; 2 – $kl=0.05$; 3 – $kl=0.03$ (а) $\bar{\alpha}=160^\circ$; б) $\bar{\alpha}=110^\circ$)

случае имеет слабые осцилляции относительно $R=2$, затухающие при $kc > 4$. Значение нормированного сопротивления излучения $R=2$ в точности соответствует случаю размещения диполя на плоскости (формула (56) при $\gamma = \pi/2$ и $l \rightarrow 0$) и, в частности, подтверждает достоверность результатов. На рис. 3, б показаны нормированные сопротивления излучения того же конуса, что и на рис. 3, а, облучаемого диполем, удаленным от вершины на четверть длины волны. Кривая 1 на этом рисунке соответствует конусу с $\gamma=160^\circ$ и характеризуется незначительными осцилляциями относительно значения $R=1$. Это объясняется слабым влиянием узких конусов на сопротивление излучения диполя при достаточном удалении его от вершины. Кривая 3 на рис. 3, б демонстрирует противоположную ситуацию, а именно зависимость нормированного сопротивления излучения от длины образующей конуса, близкого к диску. Эта кривая осциллирует относительно значения $R=1.35$, соответствующего норми-

рованному сопротивлению излучения диполя, удаленного от плоскости на четверть длины волны. По сравнению с кривой, соответствующей нормированному сопротивлению излучения вертикального диполя над квадратным экраном и полученной в работе [10] методом равномерной геометрической теории дифракции, кривая 3 на рис. 3, б характеризуется более высокой частотой и меньшим размахом осцилляций. При сравнении результатов учитывалось, что отношение нормировочных множителей, принятых здесь и в работе [10], составляет 8.378.

При приближении диполя к вершине конуса наблюдаем увеличение нормированного сопротивления излучения, связанное с ростом особенности в его вершине. Это подтверждают графики на рис. 4, где приведены соответствующие кривые для конуса с различными углами раскрытия. При этом видно, что приближение диполя к конусу с более сильной особенностью в вершине (рис. 4, а) приводит к более сильному росту R .

Интересно проследить за диаграммами направленности полного поля для конусов с параметрами, обеспечивающими максимальные значения нормированного сопротивления излучения диполя на рис. 3, а. Эти диаграммы приведены на рис. 5. Из сопоставления кривых на рис. 5 видим, что при фиксированном положении источника максимум сопротивления излучения диполя соответствует конусу с параметрами, обеспечивающими диаграмму, наиболее близкую по форме к диаграмме диполя в свободном пространстве (кривая 3 на рис. 5).

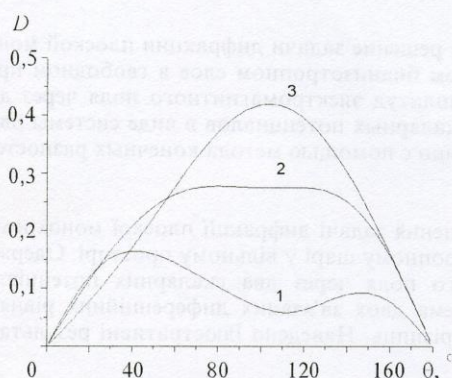


Рис. 5 Диаграммы направленности полного поля при $kl = 0.1$: 1 – $\gamma = 91^\circ$, $kc = 3.5$; 2 – $\gamma = 130^\circ$, $kc = 3.0$; 3 – $\gamma = 160^\circ$, $kc = 2.5$

Заключение

Таким образом, раскрытие формализма метода рядов собственных функций частичных областей и получение строгих решений задачи дифракции симметричных волн на конечных конусах состоит в реализации предельного перехода в выражении (8) пользуясь правилом (18) и методом полуобращения. Показано, что при облучении конусов конечных размеров со стороны вершины симметричными волнами ТМ-типа имеет место резкое увеличение нормированного сопротивления излучения радиального электрического диполя для длин образующей $kc \approx 2.5 + 3.5$. Из множества конусов с параметрами, обеспечивающими максимумы нормированного сопротивления излучения диполя, наибольшее значение R достигается для рассеивателя с наиболее сильной особенностью поля в вершине. При этом обеспечивается форма диаграммы, наиболее близкая к диаграмме поля диполя в свободном пространстве.

Исследования, проведенные в этой публикации, выполнены при частичной финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований, проект №2.4/687.

Литература

1. П. Я. Уфимцев. Метод краевых волн в физической теории дифракции. Москва, Сов. радио, 1962, 242 с.
2. Е. Н. Васильев, А. С. Ильинский, А. Г. Свешников. Численные методы решения задач дифракции на локальных неоднородностях. Вычислительные методы и программирование. Москва, Изд. МГУ, 1975, Вып. 24, с. 3-23.
3. Ю. В. Вайслейб. Тр. учебных институтов связи. 1967, Вып. 35, с. 58-66.
4. Ю. В. Вайслейб. Диссертация ... канд. техн. наук. Ленинград, 1968.
5. Д. Б. Куриляк. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1992, 35, №3, с. 3-9.
6. Д. Б. Куриляк. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1997, 40, №2, с. 27-35.
7. В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов. Матричные уравнения типа свертки в задачах теории дифракции. Київ, Наук. думка, 1984, 292 с.
8. Д. Б. Куриляк. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1998, 41, №9, с. 13-22.
9. Р. Миттра, С. Ли. Аналитические методы теории волноводов. Москва, Мир, 1974, 323 с.
10. Н. П. Елисеева. Радиофизика и Радиоастрономия. 1998, 3, №1, с. 105-110.

Illumination of a Finite Cone by an Axial-Symmetric Electromagnetic Wave

D. B. Kuryliak, Z. T. Nazarchuk

Formalism of a mode matching technique for solution of the scalar wave diffraction problem for a finite cone is grounded. The sum equations are obtained by a limiting transfer to the series at the boundary of the matching sphere. The rule of a passing to the infinite system of linear algebraic equations with unique solution satisfying the Meixner's condition at the edge and vertex is formulated. Its proof is founded on the analysis of obtained asymptotics with involving a "semi-inversion" technique. The final infinite systems of linear algebraic equations of the second kind are used also for numerical analysis of the far field pattern as well as the normalized radiation resistance in the case of the radial electrical dipole and the finite cone.