

## Дифракция плоской электромагнитной волны на однородном бианизотропном слое

А. В. Малюскин, В. М. Шульга, С. Н. Шульга

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина,

Украина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4  
E-mail: Sergey.N.Shulga@univer.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 7 октября 1999 г.

В данной работе построено численно-аналитическое решение задачи дифракции плоской монохроматической электромагнитной волны на однородном бианизотропном слое в свободном пространстве. Получены представления для векторных амплитуд электромагнитного поля через два скалярных потенциала. Соответствующая задача для скалярных потенциалов в виде системы двух связанных дифференциальных уравнений решена численно с помощью метода конечных разностей. Приведены иллюстративные результаты расчетов.

У даній роботі побудовано чисельно-аналітичне рішення задачі дифракції плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі на однорідному біанізотропному шарі у вільному просторі. Одержано вирази для векторних амплітуд електромагнітного поля через два скалярних потенціали. Відповідна задача для скалярних потенціалів як система двох зв'язаних диференціальних рівнянь розв'язана чисельно за допомогою методу скінченних різниць. Наведено ілюстративні результати розрахунків.

### Введение

Бианизотропные среды представляют собой класс материальных сред, для которых характерно существование магнитоэлектрического взаимодействия полей. Для гармонически изменяющихся со временем полей,  $\exp(-i\omega t)$ , материальные уравнения, определяющие связь электрической  $\vec{D}$  и магнитной  $\vec{B}$  индукций с напряженностями электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей, могут быть записаны в виде:

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \cdot \vec{E} + \hat{\xi} \cdot \vec{H}, \quad (1)$$

$$\vec{B} = -\hat{\zeta} \cdot \vec{E} + \hat{\mu} \cdot \vec{H}. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) материальные параметры бианизотропной среды даются тензорами диэлектрической  $\hat{\epsilon}$  и магнитной  $\hat{\mu}$  проницаемости, в то время как магнитоэлектрическое взаимодействие характеризуется тензорами  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\zeta}$ . Среда, для которых выполняются материальные соотношения (1), (2), могут быть созданы искусственно путем композиции маленьких металлических либо керамических

частиц и вмещающего их диэлектрика [1,2]. В зависимости от вида тензоров  $\hat{\epsilon}$ ,  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\zeta}$  различают киральные среды [3,4],  $\Omega$ -среды [5], одноосные [6,7] и произвольно бианизотропные среды.

В последние годы интенсивно исследуется взаимодействие электромагнитных волн с бианизотропными средами, что связано с широкими возможностями применения бианизотропных материалов в оптике световодов, микроволновой технике, антенных устройствах. Явления распространения электромагнитных волн в таких средах изучались ранее в рамках двух основных подходов.

Бескоординатный метод, развитый в [8] для исследования дифракции электромагнитных волн в анизотропных средах, был обобщен для случая бианизотропных сред в работах [9,10]. Этот метод позволяет решать задачи дифракции плоских волн в слоистых бианизотропных средах, оперируя непосредственно векторными амплитудами полей и диадными материальными параметрами среды без введения специальным образом выбранной системы координат. Другой подход, по-видимому, впервые предложенный в работах [11,12], основан на процедуре исключения компонент напряженностей электромагнитного поля, параллельных оси стратификации. Уравнения Максвелла сводят-

ся при этом к системе четырех связанных дифференциальных уравнений относительно поперечных компонент электромагнитного поля. Решение указанной системы в однородном слое записывается в виде экспоненты от матрицы с последующим использованием теоремы Кейли-Гамильтона. Этот метод координатно-зависимый, и в случае, когда в выбранной системе координат диады материальных параметров характеризуются произвольными девятикомпонентными матрицами, необходим большой объем операций с матричными величинами.

Предложенный в работе [13] скаляризационный подход синтезирует идеи бескоординатного метода и процедуру исключения компонент электромагнитного поля. В настоящей работе скаляризационный метод развит для случая плоскострой бианизотропной среды. Среди преимуществ метода по сравнению с методами, основанными на технике исключения компонент поля, отметим то, что представления амплитуд электромагнитного поля через скалярные потенциалы, равно как и формулировка задачи для скалярных потенциалов не зависят от выбора декартовой координатной системы, в которой определяются диады материальных параметров. Кроме того, нет необходимости в использовании матричного исчисления – искомые физические величины выражаются непосредственно через скалярные потенциалы. Основные идеи скаляризационного метода применительно к задаче дифракции плоской монохроматической электромагнитной волны на однородном произвольно бианизотропном слое рассматриваются в следующем пункте.

### 1. Скаляризация электромагнитного поля в плоскострой бианизотропной среде

Плоскострой бианизотропная среда, рассматриваемая в настоящей работе, представляет собой слой  $0 < z < b$ ,  $-\infty < x, y < \infty$ . Внутри бианизотропного слоя  $0 < z < b$  гармонические во времени электромагнитные поля  $\vec{E}(\vec{R})$ ,  $\vec{H}(\vec{R})$  удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\nabla \times \vec{H} + ik_0 \left( \hat{\epsilon} \cdot \vec{E} + \hat{\xi} \cdot \vec{H} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} - ik_0 \left( \hat{\mu} \cdot \vec{H} - \hat{\zeta} \cdot \vec{E} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{M}. \quad (4)$$

Здесь  $\vec{R} = (x, y, z)$ ,  $k_0$  и  $c$  – волновое число и скорость света в вакууме,  $k_0 = \omega/c$ ;  $\vec{J} \equiv \vec{J}(\vec{R})$  и

$\vec{M} \equiv \vec{M}(\vec{R})$  – объемные плотности сторонних электрического и магнитного токов, расположенных в среде и не пересекающих границ раздела. В декартовой системе координат  $x, y, z$

диады  $\hat{\eta} = \hat{\epsilon}, \hat{\mu}, \hat{\xi}, \hat{\zeta}$  характеризуются в общем случае девятикомпонентными комплексными матрицами. Верхняя,  $z=b$ , и нижняя,  $z=0$ , границы раздела представляют собой импедансные поверхности, на которых для тангенциальных компонент электромагнитного поля  $\vec{E}_\perp$ ,  $\vec{H}_\perp$  справедливы следующие граничные условия:

$$\vec{E}_\perp + \hat{L}^{(u)} \cdot \vec{z}_0 \times \vec{H}_\perp = 0, \quad (z=b-0), \quad (5)$$

$$\vec{E}_\perp - \hat{L}^{(l)} \cdot \vec{z}_0 \times \vec{H}_\perp = 0, \quad (z=+0). \quad (6)$$

Здесь  $\vec{E}_\perp \cdot \vec{z}_0 = 0$ ,  $\vec{H}_\perp \cdot \vec{z}_0 = 0$ ,  $\vec{z}_0$  – единичный вектор оси  $z$ , а диадные величины  $\hat{L}^{(u,l)}$  характеризуют свойства проницаемой границы раздела и в системе координат  $x, y$  определяются матрицами с размерами  $2 \times 2$  с комплексными компонентами [14].

Рассмотрим случай, когда сторонние источники представляют собой пространственные гармоники с волновым вектором  $\vec{\chi} = (\chi_x, \chi_y, 0)$ :

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{\chi}, z) \exp(i\vec{\chi} \cdot \vec{r}), \quad (7)$$

$$\vec{M}(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{\chi}, z) \exp(i\vec{\chi} \cdot \vec{r}).$$

Здесь  $\vec{r} = (x, y, 0)$ , а величины  $\vec{J}(\vec{\chi}, z)$ ,  $\vec{M}(\vec{\chi}, z)$ , есть векторные амплитуды источников,  $\chi_{x,y}$  – произвольные комплексные константы. Выбор сторонних источников в форме (7) объясняется тем фактом, что произвольный источник можно представить в виде соответствующей суперпозиции пространственных гармоник (7). Из (3)-(7) следует, что электромагнитное поле также можно представить в виде пространственных гармоник:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \vec{E}(\vec{\chi}, z) \exp(i\vec{\chi} \cdot \vec{r}), \quad (8)$$

$$\vec{H}(\vec{R}) = \vec{H}(\vec{\chi}, z) \exp(i\vec{\chi} \cdot \vec{r}),$$

где  $\vec{E}(\vec{\chi}, z)$ ,  $\vec{H}(\vec{\chi}, z)$  определяют векторные амплитуды поля.

Основная цель этого пункта статьи заключается в том, чтобы найти представление для векторных амплитуд в виде двух скалярных величин – скалярных потенциалов. Для этого введем правинтовую базис векторов [13]:

$$\vec{a}_1 = \vec{n}, \quad \vec{a}_2 = \vec{z}_0 \times \vec{n}, \quad \vec{a}_z = \vec{z}_0. \quad (9)$$

Здесь  $\vec{n} = \vec{\chi}/\chi$  – единичный вектор, лежащий в плоскости  $z = 0$ ;  $\chi = (\chi_x^2 + \chi_y^2)^{1/2}$ . Ветвь квадратного корня выбрана так, что  $0 \leq \arg \sqrt{\cdot} < \pi$ . Всюду в дальнейшем считается, что  $\chi_x^2 + \chi_y^2 \neq 0$ . Умножив скалярно уравнения Максвелла (3), (4) на векторы  $\vec{a}_z, \vec{a}_1$ , после несложных, но громоздких преобразований векторной алгебры получим прямые формулы, выражающие величины  $\vec{a}_{z,l} \cdot \vec{E}(\vec{\chi}, z), \vec{a}_{z,l} \cdot \vec{H}(\vec{\chi}, z)$  в терминах скалярных потенциалов:

$$\mathcal{E}(\vec{\chi}, z) \equiv \vec{a}_1 \cdot \vec{E}(\vec{\chi}, z), \quad \mathcal{H}(\vec{\chi}, z) \equiv \vec{a}_1 \cdot \vec{H}(\vec{\chi}, z) \quad (10)$$

и их первых производных по  $z$ . В случае действительного и отличного от нуля вектора  $\vec{\chi}$  потенциалы (10) имеют физический смысл проекций соответствующих векторных амплитуд пространственных гармоник на плоскость  $z = 0$ .

Разложение векторных амплитуд  $\vec{E}(\vec{\chi}, z), \vec{H}(\vec{\chi}, z)$  в базисе (9) имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{\chi}, z) = & \vec{v}_e \mathcal{E}(\vec{\chi}, z) - \vec{w}_e \mathcal{H}(\vec{\chi}, z) + \\ & + (4\pi i/\omega) \left[ \hat{\alpha}_{ee} \cdot \vec{J}(\vec{\chi}, z) - \hat{\alpha}_{em} \cdot \vec{M}(\vec{\chi}, z) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{\chi}, z) = & \vec{v}_m \mathcal{H}(\vec{\chi}, z) + \vec{w}_m \mathcal{E}(\vec{\chi}, z) + \\ & + (4\pi i/\omega) \left[ \hat{\alpha}_{mm} \cdot \vec{M}(\vec{\chi}, z) - \hat{\alpha}_{me} \cdot \vec{J}(\vec{\chi}, z) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{v}_\beta, \vec{w}_\beta, (\beta = e, m)$  – векторные дифференциальные операторы, действующие по  $z$  и зависящие от  $\chi, \vec{n}$ :

$$\begin{aligned} \vec{v}_e = & \vec{z}_0 \times \vec{n} + \vec{n}v_l + \vec{z}_0v_z + \\ & + k_0^{-1} [\chi(\vec{n}r_l - \vec{z}_0r_{ll}) + i(\vec{z}_0r_{zl} - \vec{n}r_{zz})\partial_z], \\ \vec{w}_e = & \vec{n}l + \vec{z}_0l_z + \\ & + k_0^{-1} [\chi(\vec{z}_0p_{ll} - \vec{n}p_{lz}) + i(\vec{n}p_{zz} - \vec{z}_0p_{zl})\partial_z]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_e \rightarrow \vec{w}_m, \quad (t_\sigma \rightarrow u_\sigma, p_\sigma \rightarrow q_\sigma), \\ \vec{v}_e \rightarrow \vec{v}_m, \quad (v_\sigma \rightarrow w_\sigma, r_\sigma \rightarrow s_\sigma); \end{aligned} \quad (13)$$

$\partial_z = \partial/\partial z, \hat{\alpha}_{ee}, \dots, \hat{\alpha}_{mm}$  – диадные функции вектора  $\vec{n}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{ee} = & \vec{n}\vec{z}_0p_{lz} + \vec{z}_0\vec{n}p_{zl} - \vec{n}\vec{n}p_{zz} - \vec{z}_0\vec{z}_0p_{ll}, \\ \hat{\alpha}_{em} = & \vec{n}\vec{z}_0r_{lz} + \vec{z}_0\vec{n}r_{zl} - \vec{n}\vec{n}r_{zz} - \vec{z}_0\vec{z}_0r_{ll}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\hat{\alpha}_{ee} \rightarrow \hat{\alpha}_{mm}, (p_{\sigma\tau} \rightarrow q_{\sigma\tau}), \hat{\alpha}_{em} \rightarrow \hat{\alpha}_{me}, (r_{\sigma\tau} \rightarrow s_{\sigma\tau}) \quad (15)$$

Скалярные функции вектора  $\vec{n}$ :  $p_{\sigma\tau}, q_{\sigma\tau}, r_{\sigma\tau}, s_{\sigma\tau}, t_\sigma, u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma$  ( $\sigma, \tau = l, z$ ) – приведены в Приложении 1.

Формулы (11) представляют собой искомые выражения для векторных амплитуд поля через скалярные потенциалы  $\mathcal{E}(\vec{\chi}, z), \mathcal{H}(\vec{\chi}, z)$ .

Умножим скалярно уравнения Максвелла (3), (4) на вектор  $\vec{a}_1$ . Подстановка в эти соотношения полученных ранее величин  $\vec{a}_{z,l} \cdot \vec{E}(\vec{\chi}, z), \vec{a}_{z,l} \cdot \vec{H}(\vec{\chi}, z)$  дает систему связанных дифференциальных уравнений второго порядка для скалярных потенциалов:

$$D_{ss}\mathcal{H}(\vec{\chi}, z) + D_{sp}\mathcal{E}(\vec{\chi}, z) = \frac{4\pi}{c}q_s(\vec{\chi}, z), \quad (16)$$

$$-D_{ps}\mathcal{H}(\vec{\chi}, z) + D_{pp}\mathcal{E}(\vec{\chi}, z) = \frac{4\pi}{c}q_p(\vec{\chi}, z), \quad (17)$$

В уравнениях (16), (17)  $q_v(\vec{\chi}, z)$  – функции сторонних источников;  $D_{\lambda\nu}$  – операторы Штурма-Лиувилля, действующие по  $z$  ( $\lambda, \nu = p, s$ ):

$$\begin{aligned} D_{ss} = & p_{zz}\partial_z^2 + i\chi(p_{lz} + p_{zl})\partial_z + ik_0(b_l - t_l)\partial_z + \\ & + k_0^2\delta_\mu - \chi^2p_{ll} + \chi k_0(b_z - t_z), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D_{sp} = & r_{zz}\partial_z^2 + i\chi(r_{lz} + r_{zl})\partial_z + ik_0(d_l + v_l)\partial_z + \\ & + k_0^2\delta_\zeta - \chi^2r_{ll} + \chi k_0(d_z + v_z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{ss} \rightarrow D_{pp}, \\ (b_\sigma \rightarrow c_\sigma, t_\sigma \rightarrow u_\sigma, \delta_\mu \rightarrow \delta_\epsilon, p_{\sigma\tau} \rightarrow q_{\sigma\tau}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} D_{sp} \rightarrow D_{ps}, \\ (d_\sigma \rightarrow f_\sigma, v_\sigma \rightarrow w_\sigma, \delta_\zeta \rightarrow \delta_\xi, r_{\sigma\tau} \rightarrow s_{\sigma\tau}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_s(\vec{\chi}, z) = & [\bar{z}_0(\partial_z p_{lz} + i\chi p_{ll} - ik_0 b_z) - \\
 & - \bar{n}(\partial_z p_{zz} + i\chi p_{zl} + ik_0 b_l)] \cdot \bar{J}(\vec{\chi}, z) + \\
 & + [\bar{n}(\partial_z r_{zz} + i\chi r_{zl} + ik_0 d_l) - \\
 & - \bar{z}_0(\partial_z r_{lz} + i\chi r_{ll} - ik_0 d_z) - ik_0 \bar{z}_0 \times \bar{n}] \cdot \bar{M}(\vec{\chi}, z);
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 q_p(\vec{\chi}, z) = & [\bar{n}(\partial_z q_{zz} + i\chi q_{zl} + ik_0 c_l) - \\
 & - \bar{z}_0(\partial_z q_{lz} + i\chi q_{ll} - ik_0 c_z)] \cdot \bar{M}(\vec{\chi}, z) + \\
 & + [\bar{n}(\partial_z s_{zz} + i\chi s_{zl} + ik_0 f_l) - \bar{z}_0(\partial_z s_{lz} + i\chi s_{ll} - ik_0 f_d) - \\
 & - ik_0 \bar{z}_0 \times \bar{n}] \cdot \bar{J}(\vec{\chi}, z).
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Скалярные функции вектора  $\bar{n}$ :  $b_\sigma, c_\sigma, d_\sigma, f_\sigma$  ( $\sigma = l, z$ ),  $\delta_\alpha$  ( $\alpha = \varepsilon, \mu, \xi, \zeta$ ) – приведены в Приложении 1.

Рассмотрим, как выражаются импедансные граничные условия (5), (6) в терминах скалярных потенциалов. Подставляя (11) в (5), (6) будем иметь две пары соотношений, связывающих скалярные потенциалы и их производные по  $z$ . Первая пара уравнений для верхней границы ( $z=b=0$ ) запишется в виде:

$$(ik_0 a_{ss} + b_{ss} \partial_z) \mathcal{F}(\vec{\chi}, z) + (ik_0 a_{sp} + b_{sp} \partial_z) \mathcal{E}(\vec{\chi}, z) = 0,
 \tag{22}$$

$$(ik_0 a_{ps} + b_{ps} \partial_z) \mathcal{F}(\vec{\chi}, z) + (ik_0 a_{pp} + b_{pp} \partial_z) \mathcal{E}(\vec{\chi}, z) = 0.$$

Для нижней границы ( $z=+0$ ) получаем аналогичные соотношения:

$$(ik_0 \tilde{a}_{ss} + \tilde{b}_{ss} \partial_z) \mathcal{F}(\vec{\chi}, z) + (ik_0 \tilde{a}_{sp} + \tilde{b}_{sp} \partial_z) \mathcal{E}(\vec{\chi}, z) = 0,
 \tag{23}$$

$$(ik_0 \tilde{a}_{ps} + \tilde{b}_{ps} \partial_z) \mathcal{F}(\vec{\chi}, z) + (ik_0 \tilde{a}_{pp} + \tilde{b}_{pp} \partial_z) \mathcal{E}(\vec{\chi}, z) = 0.$$

Величины  $a_{\lambda\nu}, b_{\lambda\nu}, \tilde{a}_{\lambda\nu}, \tilde{b}_{\lambda\nu}$ , приведенные в Приложении 2, выражаются через компоненты тензоров импеданса  $\hat{L}^{(u,l)}$  и электромагнитные параметры слоя.

Таким образом, на основе формул (16)-(23), сводящих задачу дифракции векторного электромагнитного поля к системе связанных дифференциальных уравнений для скалярных потенциалов, можно построить численное решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на бианизотропном слое.

## 2. Численное решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на однородном бианизотропном слое

Рассмотрим однородный бианизотропный слой  $0 < z < b$ , на который из верхнего свободного полупространства  $b < z < +\infty$  падает плоская монохроматическая волна в направлении вектора  $\vec{l}_{in}$ , который определяется углом скольжения  $\theta$  и азимутальным углом  $\varphi$  (см. рис. 1):

$$\begin{aligned}
 \vec{l}_{in} = & (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta), \\
 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

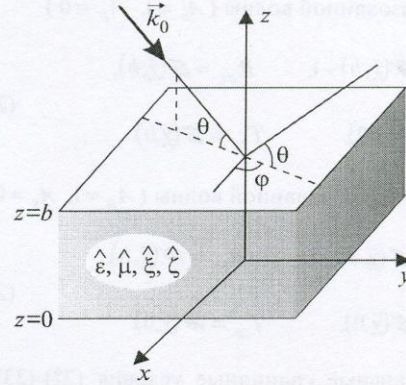


Рис. 1. Геометрия задачи

Вне бианизотропного слоя скалярные потенциалы в области  $b < z < +\infty$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\vec{\chi}, z) = & A_p [\exp(-i\gamma_0(z-b)) + R_{pp} \exp(i\gamma_0(z-b))] + \\
 & + R_{ps} A_s \exp(i\gamma_0(z-b)),
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\vec{\chi}, z) = & A_s [\exp(-i\gamma_0(z-b)) + R_{ss} \exp(i\gamma_0(z-b))] + \\
 & + R_{sp} A_p \exp(i\gamma_0(z-b));
 \end{aligned}$$

и в области  $-\infty < z < 0$ :

$$\mathcal{E}(\vec{\chi}, z) = [T_{ps} A_s + T_{pp} A_p] \exp(-i\gamma_0 z),
 \tag{26}$$

$$\mathcal{F}(\vec{\chi}, z) = [T_{ss} A_s + T_{sp} A_p] \exp(-i\gamma_0 z).$$

Здесь  $\gamma_0 = k_0 \sin\theta$ , а комплексные, в общем случае, числа  $A_p$  и  $A_s$  характеризуют соответственно составляющие электромагнитной волны, которые поляризованы перпендикулярно (индекс  $p$ ) и параллельно (индекс  $s$ ) плоскости падения. В формулах (25)-(26) нами введены

в рассмотрение комплексные коэффициенты отражения  $R_{\sigma\tau}$  и прохождения  $T_{\sigma\tau}$  для бианизотропного слоя ( $\sigma, \tau = p, s$ ). Они зависят от частоты падающего поля, углов  $\theta, \varphi$ , а также прочих электрофизических и геометрических параметров задачи. Коэффициенты с совпадающими индексами ( $\sigma = \tau$ ) описывают преобразование падающей волны в волну той же поляризации, а коэффициенты с разноименными индексами ( $\sigma \neq \tau$ ) – в волну ортогональной поляризации (в принятой нами записи  $R_{\sigma\tau}, T_{\sigma\tau}$  левый индекс  $\sigma$  отвечает отраженной или прошедшей волне, а правый  $\tau$  – падающей). Из выражений (25)-(26) следует, что для  $s$ -поляризованной волны ( $A_s = 1, A_p = 0$ )

$$R_{ss} = \mathcal{R}(\tilde{\chi}, b) - 1, \quad R_{ps} = \mathcal{E}(\tilde{\chi}, b),$$

$$T_{ss} = \mathcal{R}(\tilde{\chi}, 0), \quad T_{ps} = \mathcal{E}(\tilde{\chi}, 0) \quad (27)$$

Для  $p$ -поляризованной волны ( $A_p = 1, A_s = 0$ )

$$R_{pp} = \mathcal{E}(\tilde{\chi}, b) - 1, \quad R_{sp} = \mathcal{R}(\tilde{\chi}, b),$$

$$T_{pp} = \mathcal{E}(\tilde{\chi}, 0), \quad T_{sp} = \mathcal{R}(\tilde{\chi}, 0) \quad (28)$$

Импедансные граничные условия (22)-(23) на верхней границе ( $z = b - 0$ ) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} = ik_0 (\lambda_{sp} \mathcal{E} + \lambda_{ss} \mathcal{R}) + f_s, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = ik_0 (\lambda_{pp} \mathcal{E} + \lambda_{ps} \mathcal{R}) + f_p;$$

на нижней границе ( $z = +0$ ):

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} = ik_0 (\tilde{\lambda}_{sp} \mathcal{E} + \tilde{\lambda}_{ss} \mathcal{R}), \quad (30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = ik_0 (\tilde{\lambda}_{pp} \mathcal{E} + \tilde{\lambda}_{ps} \mathcal{R});$$

$$f_s = (g_s b_{pp} - g_p b_{sp}) / D,$$

$$f_p = (g_p b_{ss} - g_s b_{ps}) / D.$$

Здесь  $g_s = -2ik_0 A_s \sin \theta, \quad g_p = -2ik_0 A_p \sin \theta,$   
 $D = b_{ss} b_{pp} - b_{sp} b_{ps}.$  Выражения для величин  $\lambda_{\sigma\tau}, \tilde{\lambda}_{\sigma\tau}$  ( $\sigma, \tau = p, s$ ), зависящих от углов  $\theta, \varphi$ , приведены в Приложении 2.

Построим конечно-разностную схему, приближенно описывающую систему связанных дифференциальных уравнений (16), (17) и гра-

ничных условий (29)-(30). Учтем то обстоятельство, что внутри бианизотропного слоя источников нет, поэтому в формулах (16), (17) необходимо положить  $q_p = q_s \equiv 0$ . Разобьем отрезок  $0 < z < b$  на  $N$  равных частей. Выберем шаг сетки разбиений  $h = b / N$ . Далее аппроксимируем частные производные в уравнениях (16), (17) центральной разностью, в граничном условии (29) – левой, а в граничных условиях (30) – правой разностью. В узлах сетки для случая  $p$ -поляризации получим систему  $2N+2$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных комплексных констант  $x_k = \mathcal{R}(\tilde{\chi}, z_k), y_k = \mathcal{E}(\tilde{\chi}, z_k), (k = 0, 1, 2, \dots, N):$

$$\begin{cases} x_N (1 - ik_0 h \lambda_{ss}) - x_{N-1} - ik_0 h \lambda_{sp} y_N = f_{ss}, \\ y_N (1 - ik_0 h \lambda_{pp}) - y_{N-1} - ik_0 h \lambda_{ps} x_N = f_{ps}; \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} Ax_{j+1} + Bx_j + Cx_{j-1} + Dy_{j+1} + Ey_j + Gy_{j-1} = 0, \\ -Kx_{j+1} - Lx_j - Mx_{j-1} + Py_{j+1} + Qy_j + Ry_{j-1} = 0; \\ j = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_0 (1 + ik_0 h \tilde{\lambda}_{ss}) - ik_0 h \tilde{\lambda}_{sp} y_0 = 0, \\ y_1 - y_0 (1 - ik_0 h \tilde{\lambda}_{pp}) - ik_0 h \tilde{\lambda}_{ps} x_0 = 0. \end{cases} \quad (33)$$

Здесь пара уравнений (31) отвечает конечно-разностной аппроксимации граничных условий (29) при  $z = b - 0$ , где положено  $A_p = 1, A_s = 0$ . Следующая группа  $2(N-1)$  уравнений представляет собой аппроксимацию дифференциальных уравнений (16), (17), а последняя пара уравнений – аппроксимацию граничных условий (30). Величины  $f_{v\lambda}$  ( $v, \lambda = p, s$ ) имеют следующий смысл:  $f_{sp} \equiv f_s, \quad f_{pp} \equiv f_p$  для падающей  $p$ -поляризованной волны и  $f_{ss} \equiv f_s, \quad f_{ps} \equiv f_p$  для падающей  $s$ -поляризованной волны. Коэффициенты при неизвестных в уравнениях (32) даются выражениями:

$$A = p_{zz} + \frac{ik_0 h}{2} (b_l - t_l + (p_{lz} + p_{zl}) \cos \theta),$$

$$B = -2p_{zz} + (k_0 h)^2 (\delta_\mu + (b_l - t_l) \cos \theta - p_{ll} \cos^2 \theta)$$

$$C = p_{zz} - \frac{ik_0 h}{2} (b_l - t_l + (p_{lz} + p_{zl}) \cos \theta),$$

$$D = r_{zz} + \frac{ik_0 h}{2} (d_l + v_l + (r_{lz} + r_{zl}) \cos \theta),$$

$$F = -2r_{zz} + (k_0 h)^2 (\delta_\zeta + (d_l + v_l) \cos \theta - r_{ll} \cos^2 \theta)$$

$$G = r_{zz} - \frac{ik_0 h}{2} (d_l + v_l + (r_{lz} + r_{zl}) \cos \theta),$$

$$K = s_{zz} + \frac{ik_0 h}{2} (f_l + w_l + (s_{lz} + s_{zl}) \cos \theta),$$

$$L = -2s_{zz} + (k_0 h)^2 (\delta_\xi + (f_z + w_z) \cos \theta - s_{ll} \cos^2 \theta),$$

$$M = s_{zz} - \frac{ik_0 h}{2} (w_l + f_l + (s_{lz} + s_{zl}) \cos \theta),$$

$$P = q_{zz} + \frac{ik_0 h}{2} (c_l - u_l + (q_{lz} + q_{zl}) \cos \theta),$$

$$Q = -2q_{zz} + (k_0 h)^2 (\delta_\epsilon + (c_z - u_z) \cos \theta - q_{ll} \cos^2 \theta),$$

$$R = q_{zz} - \frac{ik_0 h}{2} (c_l - u_l + (q_{lz} + q_{zl}) \cos \theta).$$

Аналогичная система для  $p$ -поляризации получается заменой правых частей в первой паре уравнений (31):  $f_{ss}$  на  $f_{sp}$  и  $f_{ps}$  на  $f_{pp}$ .

Численные расчеты, иллюстрирующие закономерности дифракции плоской монохроматической электромагнитной волны, выполнены в соответствии с предложенной конечно-разностной схемой (31)-(33). Как известно, существует ряд работ, использующих методологию исключения компонент поля, например [15], [16], в которых исследовалась дифракция плоских электромагнитных волн на однородном бианизотропном слое. Однако в упомянутых работах численные расчеты ограничивались случаем одноосных бианизотропных сред. Универсаль-

ность скаляризационного метода позволяет рассмотреть рассеяние электромагнитных волн для наиболее общего вида линейных сред – двухосной взаимной бианизотропной среды. Электромагнитные параметры бианизотропного слоя – тензоры диэлектрической  $\hat{\epsilon}$  и магнитной  $\hat{\mu}$  проницаемостей, – а также тензоры магнитоэлектрического взаимодействия  $\hat{\zeta}$ ,  $\hat{\xi}$  определяются в системе координат  $x, y, z$  матрицами:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 6.12 + i0.8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.0 + i1.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 9.4 + i2.8 \end{bmatrix},$$

$$\mu = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.12 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\zeta = \xi^T = i \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 & 0.35 \\ 0.0 & 0.0 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Такого рода среда может быть создана искусственно внедрением металлических частиц двух сортов – в виде спирали и в виде буквы  $\Omega$  – в анизотропный магнитодиэлектрик. Толщина слоя  $b$  определена соотношением  $k_0 b = 6.82$ . Численные расчеты дифракции для  $s$ - и  $p$ -поляризованной волны приведены на рис. 2-4. Для случая падения  $s$ -поляризованной волны зависимость абсолютной величины коэффициента

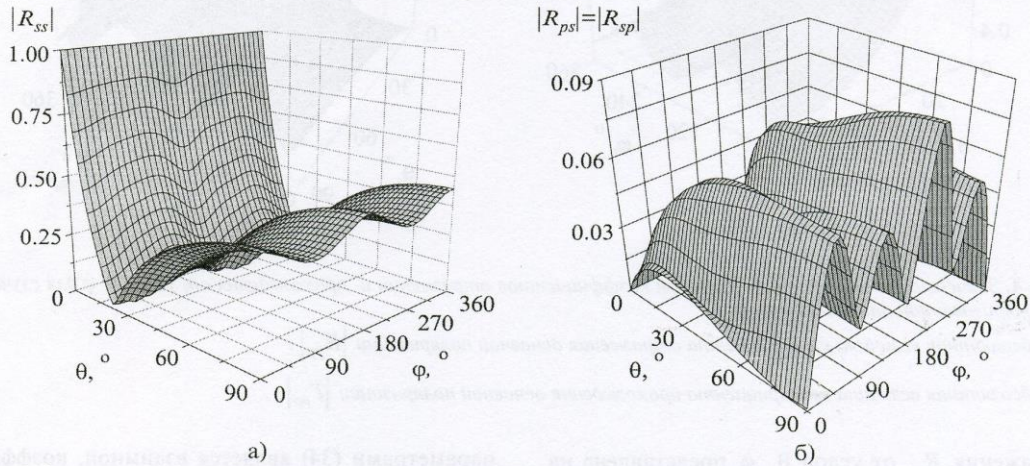
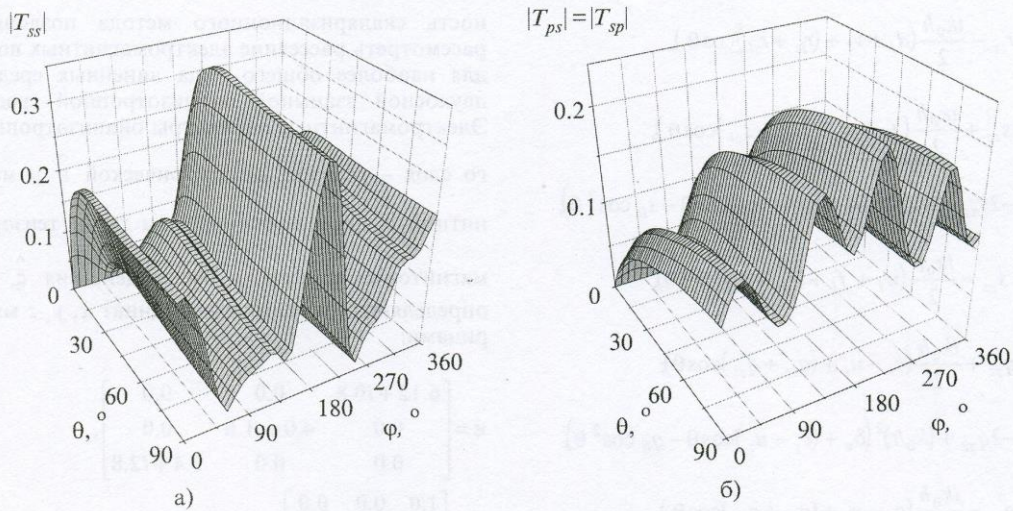


Рис. 2. Зависимость абсолютной величины коэффициентов отражения от углов  $\theta, \varphi$  ( $s$ -поляризованная падающая волна):

а) абсолютная величина коэффициента отражения основной поляризации  $|R_{ss}|$ ;

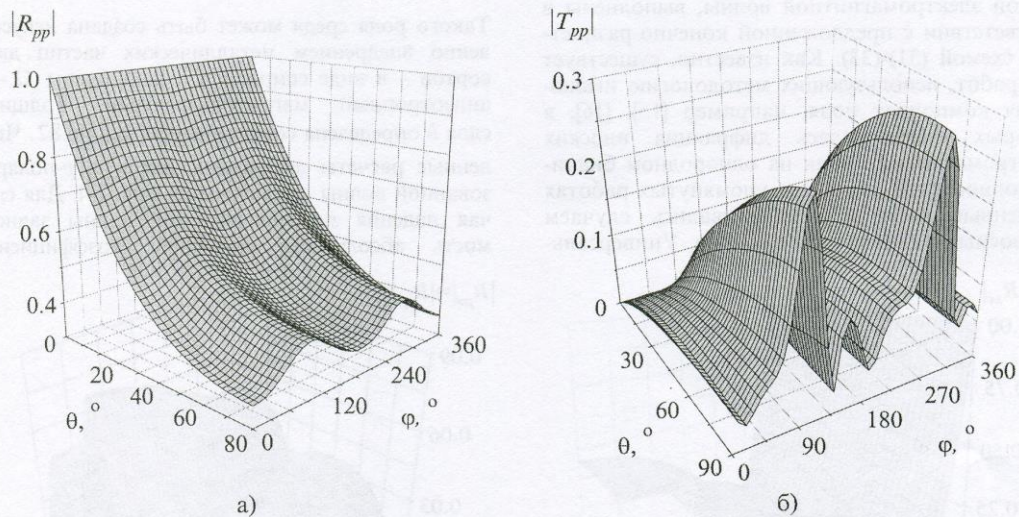
б) абсолютная величина коэффициентов отражения ортогональной поляризации  $|R_{ps}| = |R_{sp}|$



**Рис. 3.** Зависимость абсолютной величины коэффициентов прохождения от углов  $\theta, \varphi$  ( $s$ -поляризованная падающая волна):

а) абсолютная величина коэффициента прохождения основной поляризации  $|T_{ss}|$ ;

б) абсолютная величина коэффициентов прохождения ортогональной поляризации  $|T_{ps}| = |T_{sp}|$



**Рис. 4.** Зависимость абсолютной величины коэффициентов отражения и прохождения от углов  $\theta, \varphi$  для случая  $p$ -поляризованной падающей волны:

а) абсолютная величина коэффициента отражения основной поляризации  $|R_{pp}|$ ;

б) абсолютная величина коэффициента прохождения основной поляризации  $|T_{pp}|$

отражения  $R_{ss}$  от углов  $\theta, \varphi$  представлена на рис. 2, а. На рис. 2, б аналогичные зависимости представлены для коэффициентов отражения в волну ортогональной поляризации. Отметим, что в силу того, что среда с материальными

параметрами (34) является взаимной, коэффициенты отражения и для ортогональной поляризации равны по абсолютной величине:  $|R_{ps}| = |R_{sp}|, |T_{ps}| = |T_{sp}|$ . Рисунки 3, а и 3, б отображают зависимости абсолютной величини

ны коэффициентов прохождения волны основной  $T_{ss}$  и перекрестной  $T_{sp}$  и  $T_{ps}$  поляризации от углов  $\theta$ ,  $\varphi$ . И, наконец, на рис. 4 представлены коэффициенты прохождения  $T_{pp}$  и отражения  $R_{pp}$  для основной поляризации в случае падения  $p$ -поляризованной волны. Детальный анализ полученных зависимостей выходит за рамки данной работы, однако следует отметить, что бианизотропия слоя приводит к довольно неординарной угловой зависимости коэффициентов отражения и прохождения плоской электромагнитной волны.

### Приложение 1

В базисе (10) компоненты тензоров  $\hat{\eta} = \hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\xi}, \hat{\zeta}$  определяются следующим соотношением:

$$\eta_{\sigma\tau}(\vec{n}) = \vec{a}_\sigma \cdot \hat{\eta} \vec{a}_\tau \quad (\sigma, \tau = l, t, z). \quad (\text{П1.1})$$

В терминах компонент  $\eta_{\sigma\tau}$  функции вектора  $\vec{n}$ :  $p_{\sigma\tau}, q_{\sigma\tau}, r_{\sigma\tau}, s_{\sigma\tau}$  – запишутся следующим образом:

$$p_{\sigma\tau} = \left[ \varepsilon_{\sigma\tau} (\mu_{ll} \mu_{zz} - \mu_{zl} \mu_{lz}) + \xi_{\sigma l} (\mu_{zz} \zeta_{l\tau} - \mu_{lz} \zeta_{z\tau}) + \xi_{\sigma z} (\mu_{ll} \zeta_{z\tau} - \mu_{zl} \zeta_{l\tau}) \right] / \Delta, \quad (\text{П1.2})$$

$$p_{\sigma\tau} \rightarrow r_{\sigma\tau} \quad (\varepsilon \leftrightarrow \zeta, \mu \leftrightarrow \xi), \\ r_{\sigma\tau} \rightarrow s_{\sigma\tau}, p_{\sigma\tau} \rightarrow q_{\sigma\tau} \quad (\varepsilon \leftrightarrow \mu, \zeta \leftrightarrow \xi). \quad (\text{П1.3})$$

Величина  $\Delta = \Delta(\chi)$  определена ниже соотношением (1.6). В базисе (10) тензоры  $\hat{\eta} = \hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\xi}, \hat{\zeta}$  характеризуются  $3 \times 3$ -матрицами  $\eta$  с компонентами  $\eta_{\sigma\tau}$ , определенными соотношением (1.1). Введем в рассмотрение матрицу с размерами  $6 \times 6$ :

$$\pi = \begin{bmatrix} \mu & \zeta \\ \xi & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (\text{П1.4})$$

и обозначим через  $\pi_{km}^{ij}$  определитель матрицы, получаемой из матрицы  $\pi$  вычеркиванием  $i$ -го и  $j$ -го столбца и  $k$ -й и  $m$ -й строки ( $i, j, k, m = 1, 2, \dots, 6$ ). С учетом сделанных обозначений величины  $t_\sigma, u_\sigma, v_\sigma, w_\sigma$ , фигурирующие в формулах (11), (12), и величины  $b_\sigma, c_\sigma, d_\sigma, f_\sigma$  ( $\sigma = l, z$ ) из соотношений (16), (17) запишутся в виде:

$$b_l = \pi_{45}^{25} / \Delta, \quad b_z = -\pi_{56}^{25} / \Delta; \quad d_l = \pi_{15}^{25} / \Delta, \\ d_z = \pi_{35}^{25} / \Delta;$$

$$t_l = -\pi_{25}^{45} / \Delta, \quad t_z = -\pi_{25}^{56} / \Delta; \quad (\text{П1.5})$$

$$v_l = -\pi_{25}^{24} / \Delta, \quad v_z = -\pi_{25}^{26} / \Delta;$$

$$b_\sigma \leftrightarrow c_\sigma, \quad d_\sigma \leftrightarrow f_\sigma, \quad t_\sigma \leftrightarrow u_\sigma, \quad v_\sigma \leftrightarrow w_\sigma, \quad \varepsilon \leftrightarrow \mu, \\ \zeta \leftrightarrow \xi;$$

$$\Delta = \pi_{25}^{25}. \quad (\text{П1.6})$$

Обозначим через  $\pi_k^i$  определитель матрицы, получаемой из матрицы  $\pi$  вычеркиванием  $i$ -го столбца и  $k$ -й строки ( $i, k = 1, 2, \dots, 6$ ). Тогда функции  $\delta_\alpha$  ( $\alpha = \varepsilon, \mu, \xi, \zeta$ ) можно представить в виде:

$$\delta_\varepsilon = \pi_2^2 / \Delta, \quad \delta_\mu = \pi_5^5 / \Delta, \quad (\text{П1.7})$$

$$\delta_\xi = -\pi_3^6 / \Delta, \quad \delta_\zeta = \pi_5^2 / \Delta.$$

### Приложение 2

Величины  $a_{v\lambda}, b_{v\lambda}$ , ( $v, \lambda = p, s$ ) фигурирующие в граничных условиях (23) имеют вид (см. также [14]):

$$a_{pp} = \sin \theta + u_l - q_{lz} \cos \theta, \quad a_{ps} = w_l + s_{lz} \cos \theta, \\ a_{sp} = v_l + r_{lz} \cos \theta, \quad a_{ss} = -\sin \theta - t_l + p_{lz} \cos \theta, \\ b_{pp} = -q_{zz}, \quad b_{ps} = s_{zz}, \quad b_{sp} = r_{zz}, \quad b_{ss} = p_{zz} \quad (\text{П2.1})$$

Коэффициенты  $\tilde{a}_{v\lambda}, \tilde{b}_{v\lambda}$ , ( $v, \lambda = p, s$ ) из соотношений (24) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{a}_{pp} = \sin \theta - u_l + q_{lz} \cos \theta, \quad \tilde{a}_{ps} = -w_l - s_{lz} \cos \theta, \\ \tilde{a}_{sp} = v_l + r_{lz} \cos \theta, \quad \tilde{a}_{ss} = \sin \theta - t_l + p_{lz} \cos \theta; \quad (\text{П2.2})$$

$$\tilde{b}_{pp} = q_{zz}, \quad \tilde{b}_{ps} = -s_{zz}, \quad \tilde{b}_{sp} = r_{zz}, \quad \tilde{b}_{ss} = p_{zz}$$

Величины  $\lambda_{\sigma\tau}, \tilde{\lambda}_{\sigma\tau}$ , ( $\sigma, \tau = p, s$ ) выражаются через  $a_{\sigma\tau}, b_{\sigma\tau}, \tilde{a}_{\sigma\tau}, \tilde{b}_{\sigma\tau}$  следующим образом:



$$\begin{aligned} \lambda_{pp} &= (a_{sp}b_{sp} - a_{pp}b_{ss})/D, \\ \lambda_{ps} &= (a_{ss}b_{ps} - a_{ps}b_{ss})/D, \\ \lambda_{sp} &= (a_{pp}b_{sp} - a_{sp}b_{pp})/D, \\ \lambda_{ss} &= (a_{ps}b_{sp} - a_{ss}b_{pp})/D; \end{aligned} \quad (\text{П2.3})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{pp} &= (\tilde{a}_{sp}\tilde{b}_{sp} - \tilde{a}_{pp}\tilde{b}_{ss})/\tilde{D}, \\ \tilde{\lambda}_{ps} &= (\tilde{a}_{ss}\tilde{b}_{ps} - \tilde{a}_{ps}\tilde{b}_{ss})/\tilde{D}, \\ \tilde{\lambda}_{sp} &= (\tilde{a}_{pp}\tilde{b}_{sp} - \tilde{a}_{sp}\tilde{b}_{pp})/\tilde{D}, \\ \tilde{\lambda}_{ss} &= (\tilde{a}_{ps}\tilde{b}_{sp} - \tilde{a}_{ss}\tilde{b}_{pp})/\tilde{D}, \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

где

$$D = b_{ss}b_{pp} - b_{sp}b_{ps}, \quad \tilde{D} = \tilde{b}_{ss}\tilde{b}_{pp} - \tilde{b}_{sp}\tilde{b}_{ps}. \quad (\text{П2.5})$$

### Литература

1. A. H. Sihvola, I. V. Lindell. *Int. J. Appl. Electromagn. Mechn.* 1995, **6**, No. 2, pp. 113-130.
2. S. A. Tretyakov et al. *Microwave Opt. Technol. Lett.* 1997, **15**, No. 4, pp. 260-263.
3. D. J. Jaggard, X. Sun, N. Engheta. *IEEE Trans.* 1988, **AP-36**, No. 7, pp. 1007-1013.
4. A. Lakhtakia, V. K. Varadan, V. V. Varadan. *Time-harmonic electromagnetic waves in chiral media. Lecture Notes in Physics.* Berlin: Springer-Verlag. 1989, 335 pp.
5. M. M. I. Saadoun, N. Engheta. *Microwave Opt. Technol. Lett.* 1992, **5**, No. 4, pp. 184-187.
6. S. He, I. V. Lindell. *IEEE Trans.* 1993, **AP-41**, No. 12, pp. 1659-1664.
7. I. V. Lindell, A. Viitanen. *J. Electron. Lett.* 1993, **29**, No. 2, pp. 150-152.

8. Ф. И. Федоров. *Оптика анизотропных сред.* Минск, АН БССР, 1958.
9. I. V. Lindell. *Acta Polytechnica Scandinavica*, Helsinki, Univ. Tech. Otaniemi, Finland. Rep. EI 31. 1972.
10. R. D. Graglia, P. L. E. Uslenghi, and R. E. Zich. *IEEE Trans.* 1990, **AP-39**, pp. 83-90.
11. S. Teitler, and B. W. Hennis. *J. Opt. Soc. Am.* 1970, **60**, pp. 830-834.
12. D. W. Berreman, *J. Opt. Soc. Am.* 1972, **62**, pp. 502-510.
13. N. P. Zhuck. *Int. J. Electronics.* 1993, **75**, pp. 141-148.
14. N. P. Zhuck. *Soviet J. Communications Technology and Electronics.* 1990, **35**, No. 5, pp. 101-108.
15. M. Norgren, S. He. *Int. J. Infrared MM Waves.* 1994, **15**, No. 9, pp. 1537-1554.
16. M. Norgren. *Optimal design using stratified bi-anisotropic media.* Technical Report TRITA-TET 96-8. Royal Inst. of Technology, Stocholm, Sweden, 1996.

### Diffraction of a Plane Electromagnetic Wave on Homogeneous Bianisotropic Layer

A. V. Malyuskin, V. M. Shulga, S. N. Shulga

The numeric-analytical solution of the problem of a plane-wave diffraction from bianisotropic homogeneous layer into a free space is constructed. The vector amplitudes of electromagnetic field are represented through two quantities- scalar potentials. The corresponding problem for scalar potentials is solved numerically using the finite-difference approximation. Illustrative examples are presented.