

## Строгое решение осесимметричной задачи о возбуждении полем электрического диполя неэквидистантной структуры из соосных дисков

А. Н. Хижняк

*Институт радиофизики и электроники НАН Украины,  
Украина, 61085, г. Харьков, ул. Ак. Проскуры, 12  
E-mail: khizh@kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 19 сентября 2000 г.*

Рассмотрена дифракция поля электрического диполя на неэквидистантной структуре из соосных дисков. С помощью метода моментов и метода частичного обращения оператора исходная граничная задача сведена к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений II рода, которая является фредгольмовой и допускает решение методом редукции с любой заранее заданной точностью. Приведены результаты численных расчетов характеристик рассеянного поля.

Розглянуто дифракцію поля електричного диполя на нееквідистантній структурі із співвісних дисків. За допомогою методу моментів та методу часткового обернення оператора початкова гранична задача зведена до еквівалентної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь II роду, яка є фредгольмовою і допускає розв'язання методом редукції з будь-якою необхідною точністю. Наведено дані розрахунків для характеристик розсіяного поля.

В работе [1] была рассмотрена задача о дифракции поля диполя на эквидистантной структуре, состоящей из произвольного числа соосных дисков одинакового радиуса. В настоящей работе развитый в [1] подход обобщается на случай неэквидистантной структуры, т. е. расстояния между дисками произвольны.

Используемый метод может быть кратко описан следующим образом. Из граничных условий получают парные интегральные уравнения относительно неизвестных спектральных амплитуд рассеянного поля. С помощью метода моментов проводится аналитическая регуляризация полученных уравнений и их преобразование в эквивалентную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений II рода. Эта система является фредгольмовой и может быть редуцирована и решена численно с использованием известных эффективных алгоритмов. Полученное решение за-

дачи явно не содержит ограничений на геометрические параметры исследуемой структуры и эффективно в широком диапазоне длин волн, особенно в длинноволновой области и резонансном диапазоне.

### 1. Постановка задачи

Пусть  $N+1$  идеально проводящих дисков одинакового радиуса  $R_0$  находятся на одной оси, положение каждого диска определяется расстоянием от крайнего диска  $h_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Поместим начало цилиндрической системы координат  $(r, \phi, z)$  в центр крайнего диска, так чтобы остальные находились в области  $z > 0$ , см. рис. 1. Структура возбуждается элементарным электрическим диполем, расположенным параллельно оси  $z$  в точке  $z = -d$ . В дальней-

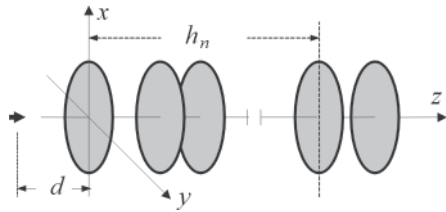


Рис. 1. Рассеивающая структура

шем удобно считать все величины с размерностью длины нормированными на радиус диска  $R_0$ . Введем также нормированное волновое число  $k = (\omega/c)R_0$  (предполагается зависимость от времени вида  $\exp(-i\omega t)$ ). Задача заключается в определении полного поля во всем пространстве.

Учитывая симметрию поля источника и рассеивающей структуры, электромагнитное поле в данном случае можно описать с использованием одной скалярной функции –  $z$ -компоненты вектора Герца  $P(r, z, k)$ . Выражения для тангенциальных компонент поля имеют следующий вид:

$$E_r = \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial z}, \quad H_\phi = ik \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (1)$$

Полное поле может быть представлено как суперпозиция поля источника  $P_0$  и рассеянного поля  $P_s$ :

$$P(r, z; k) = P_0(r, z; k) + P_s(r, z; k). \quad (2)$$

Функция  $P_s(r, z; k)$ , описывающая поле рассеянной волны, должна удовлетворять уравнению Гельмгольца в свободном пространстве; граничным условиям в плоскостях  $z = h_n, n = 0, 1, 2, \dots, N$ ; условию излучения и условию ограниченности энергии в любом конечном объеме пространства (условию на ребре). Решение уравнения Гельмгольца с учетом условия излучения удобно записать

с использованием преобразования Фурье по переменной  $z$  и преобразования Ханкеля по переменной  $r$ :

$$P_s(r, z; k) = \int_0^\infty a(\xi) J_0(\xi r) e^{-iz\gamma(\xi)} d\xi, \quad z < 0;$$

$$P_{s,n}^+(r, z; k) = \int_0^\infty c_n(\xi) J_0(\xi r) e^{i(z-h_{n-1})\gamma(\xi)} d\xi; \quad (3)$$

$$P_{s,n}^-(r, z; k) = \int_0^\infty b_n(\xi) J_0(\xi r) e^{-i(z-h_n)\gamma(\xi)} d\xi,$$

$$h_{n-1} < z < h_n;$$

$$P_s(r, z; k) = \int_0^\infty d(\xi) J_0(\xi r) e^{i(z-h_N)\gamma(\xi)} d\xi,$$

$$z > h_N;$$

где  $P_0(r, z, k) = -i \int_0^\infty \frac{\xi}{\gamma(\xi)} J_0(\xi r) e^{i|z+d|\gamma(\xi)} d\xi$  – вектор Герца поля диполя.

Здесь  $\gamma(\xi) = \sqrt{k^2 - \xi^2}$  – постоянная распространения вдоль оси  $z$ , которая находится из уравнения Гельмгольца;  $\text{Im } \gamma \geq 0; n = 1, 2, 3, \dots, N$ . Неизвестные спектральные амплитуды  $a(\xi), d(\xi), b_n(\xi), c_n(\xi)$  подлежат определению.

## 2. Парные интегральные уравнения

Рассмотрим участок структуры  $h_{n-1} < z < h_n$ . Из граничных условий получаем соотношения между амплитудами

$$\begin{aligned} & c_n(\xi) e^{i(h_n-h_{n-1})\gamma(\xi)} - b_n(\xi) = \\ & = c_{n+1}(\xi) - b_{n+1}(\xi) e^{i(h_{n+1}-h_n)\gamma(\xi)}, \quad z = h_n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & c_n(\xi) - b_n(\xi)e^{i(h_n - h_{n-1})\gamma(\xi)} = \\
 & = c_{n-1}(\xi)e^{i(h_{n-1} - h_{n-2})\gamma(\xi)} - b_{n-1}(\xi), \quad z = h_{n-1};
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

$$a(\xi) = b_1(\xi)e^{ih_1\gamma(\xi)} - c_1(\xi), \quad z = 0;$$

$$d(\xi) = b_N(\xi) - c_N(\xi)e^{i(h_N - h_{N-1})\gamma(\xi)}, \quad z = h_N$$

и парные интегральные уравнения

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty [c_n(\xi)e^{i(h_n - h_{n-1})\gamma(\xi)} - b_n(\xi) + q(\xi)e^{ih_n\gamma(\xi)}] \times \\
 & \times \gamma(\xi)J_1(\xi r)\xi d\xi = 0, \\
 & 0 < r < 1, \quad z = h_n;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty [c_n(\xi) - b_n(\xi)e^{i(h_n - h_{n-1})\gamma(\xi)} + q(\xi)e^{ih_n\gamma(\xi)}] \times \\
 & \times \gamma(\xi)J_1(\xi r)\xi d\xi = 0, \\
 & 0 < r < 1, \quad z = h_{n-1};
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty [b_n(\xi) + c_n(\xi)e^{i(h_n - h_{n-1})\gamma(\xi)}] J_1(\xi r)\xi d\xi = \\
 & = \int_0^\infty [b_n(\xi)e^{i(h_{n+1} - h_n)\gamma(\xi)} + c_n(\xi)] J_1(\xi r)\xi d\xi, \\
 & r > 1, \quad z = h_n;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty [b_n(\xi)e^{i(h_n - h_{n-1})\gamma(\xi)} + c_n(\xi)] J_1(\xi r)\xi d\xi = \\
 & = \int_0^\infty [b_{n-1}(\xi) + c_{n-1}(\xi)e^{i(h_{n-1} - h_{n-2})\gamma(\xi)}] J_1(\xi r)\xi d\xi, \\
 & r > 1, \quad z = h_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $q(\xi) = -i\xi/\gamma(\xi)\exp(id\gamma(\xi))$  – спектральная амплитуда поля источника.

Как отмечалось в [1], большое значение для успешной реализации используемой схемы решения имеет аналитическое обращение части оператора задачи, а именно статической части оператора задачи дифракции на одном диске. Чтобы выделить в уравнениях (5) соответствующие слагаемые, необходимы дополнительные преобразования. Поскольку радиусы дисков одинаковы, уравнения, полученные из граничных условий в разных плоскостях, имеют одинаковые области определения по параметру  $r$  и их можно комбинировать между собой. Введем вспомогательные функции

$$\begin{aligned}
 u_n^\pm = \xi & \left( (c_n \pm b_n) - (c_{n-1}e^{i(h_{n-1} - h_{n-2})\gamma(\xi)} \pm \right. \\
 & \left. \pm b_{n+1})e^{i(h_{n+1} - h_n)\gamma(\xi)} \right).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

После некоторых преобразований [1] из (5) с учетом (4) и (6) получаем парные интегральные уравнения для определения функций  $u_n^\pm(\xi)$ :

$$\int_0^\infty u_n^\pm(\xi)J_1(\xi r)d\xi = 0, \quad r > 1;
 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty u_n^\pm(\xi)J_1(\xi r)\gamma(\xi) \left( 1 \mp e^{i(h_n - h_{n-1})\gamma(\xi)} \right) d\xi = \\
 & = - \int_0^\infty q(\xi)J_1(\xi r)e^{ih_n\gamma(\xi)} \left( 1 \mp e^{i(h_n - h_{n-1})\gamma(\xi)} \right) \gamma(\xi) d\xi -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \int_0^\infty J_1(\xi r)\gamma(\xi) \left( 1 \mp e^{i(h_n - h_{n-1})\gamma(\xi)} \right) \times \\
 & \times \left[ \sum_{r=0}^{n-2} e^{i(h_{n-1} - h_{n-r-2})\gamma(\xi)} (u_{n-r-1}^+(\xi) + u_{n-r-1}^-(\xi)) \pm \right. \\
 & \left. \pm \sum_{r=0}^{N-n-1} e^{i(h_{n+r+1} - h_n)\gamma(\xi)} (u_{n+r+1}^+(\xi) - u_{n+r+1}^-(\xi)) \right] d\xi,
 \end{aligned}$$

$$0 < r < 1, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Уравнения (7) аналогичны уравнениям задачи дифракции на одном диске [2], но дополнительно содержат слагаемые, описывающие взаимодействие между дисками. В предельном случае  $h_n = nh$  они переходят в уравнения задачи дифракции на эквидистантной структуре [1].

### 3. Переход к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений II рода

С помощью метода моментов от парных интегральных уравнений (7) можно перейти к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Известно, что эффективность применения метода моментов в значительной степени определяется выбором базисных функций. Как показано в [1, 2], решение уравнений (7) следует искать в виде разложения по функциям  $\phi_s^{(m)}(\xi)$ :

$$u_n^\pm(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{n,s}^\pm \phi_s^{(1)}(\xi), \tag{8}$$

$$\phi_s^{(m)}(x) = \sqrt{4s + 2m + 3} J_{2s+m+3/2}(x) x^{-1/2}.$$

Свойства функций (8) определены в [1, 2].

Применение к уравнениям (7) стандартной процедуры метода моментов в сочетании с методом частичного обращения оператора [3] позволяет, учитывая свойства базисных функций (8), получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $C_{n,s}^\pm$ , которая является фредгольмовой системой II рода и может быть решена методом редукции с любой заранее заданной точностью:

$$B_{n,s}^\pm = \sum_{j=0}^{\infty} C_{n,j}^\pm A_{n,j}^\pm - C_{n,s}^\pm +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n-1} (C_{n-r-1,j}^+ + C_{n-r-1,j}^-) D_{n,r;j}^\pm \pm \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-n-1} (C_{n+r+1,j}^+ - C_{n+r+1,j}^-) G_{n,r;j}^\pm, \tag{9}$$

$$n = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь

$$B_{n,s}^\pm = -i \int_0^\infty \phi_s^{(1)}(\xi) q(\xi) e^{ih_{n-1}\gamma(\xi)} \times \\ \times (1 \mp e^{i(h_n - h_{n-1})\gamma(\xi)}) \gamma(\xi) d\xi,$$

$$A_{n,j}^\pm = \int_0^\infty \phi_j^{(1)}(\xi) \phi_s^{(1)}(\xi) \epsilon_n^\pm(\xi) d\xi,$$

$$\epsilon_n^\pm(\xi) = 1 + i \frac{\gamma(\xi)}{\xi} (1 \mp e^{i(h_n - h_{n-1})\gamma(\xi)}),$$

$$D_{n,q;j}^\pm = H_{n-1,n-q-2;j} \mp H_{n,n-q-2;j},$$

$$G_{n,q;j}^\pm = H_{n+q+1,n;j} \mp H_{n+q+1,n-1;j},$$

$$H_{n,s;j} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \phi_j^{(1)}(\xi) \phi_s^{(1)}(\xi) e^{i(h_n - h_s)\gamma(\xi)} \gamma(\xi) d\xi.$$

Подынтегральные функции в (9) не имеют особенностей и убывают при  $\xi \rightarrow \infty$  либо обратно пропорционально четвертой степени  $\xi$ , либо экспоненциально, и вычисление матричных элементов может быть проведено с использованием стандартных методов численного интегрирования.

### 4. Рассеянное поле в дальней зоне

Чтобы получить рассеянное поле в дальней зоне, интегралы в (3) можно вычислить методом стационарной фазы. Связь между

решением уравнений (9) и амплитудой рассеяния  $F(\vartheta, \kappa)$  определяется следующими соотношениями:

$$P_s(R, \vartheta; k) = F(\vartheta, \kappa) \frac{e^{ikR}}{R};$$

$$E_\vartheta = H_\varphi = -\kappa^2 \sin \vartheta P_s(R, \vartheta; k); \quad (10)$$

$$F(\vartheta, \kappa) = -i \operatorname{ctg} \vartheta a(\kappa \sin \vartheta), \quad \pi/2 < \vartheta < \pi;$$

$$F(\vartheta, \kappa) = -i \operatorname{ctg} \vartheta d(\kappa \sin \vartheta) e^{-i\kappa h_N \cos \vartheta}, \quad 0 < \vartheta < \pi/2;$$

где  $R, \phi, \vartheta$  – сферические координаты.

Из (4) и (6) получаем:

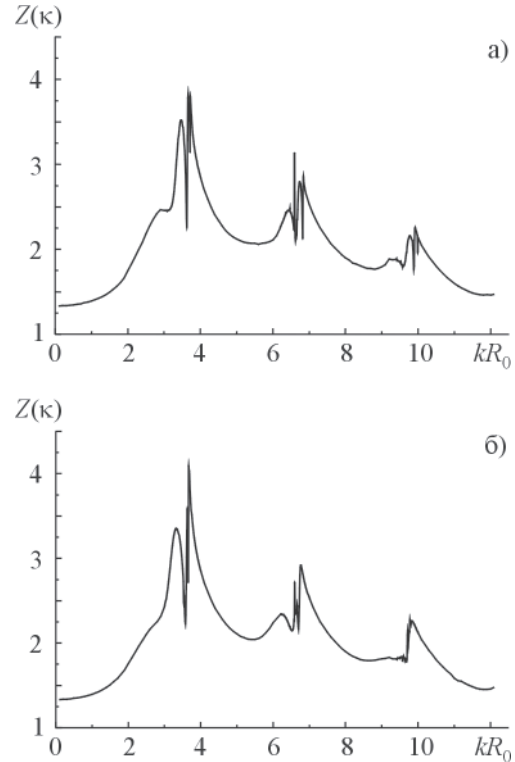
$$a(x)x = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{N-1} [u_{q+1}^+(x) - u_{q+1}^-(x)] e^{ih_{q+1}\gamma(x)} - \frac{1}{2} [u_1^+(x) + u_1^-(x)],$$

$$d(x)x = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{N-1} [u_{N-q}^+(x) + u_{N-q}^-(x)] e^{i(h_N - h_{N-q-1})\gamma(x)} - \frac{1}{2} [u_N^+(x) - u_N^-(x)].$$

Физические свойства рассеянного поля в дальней зоне можно характеризовать такими величинами, как диаграмма направленности  $S(\vartheta, \kappa)$  и сопротивление излучения  $Z(\kappa)$ , которые с точностью до постоянного коэффициента определим следующим образом:

$$S(\vartheta, \kappa) = |\sin \vartheta F(\vartheta, \kappa)|^2, \quad (11)$$

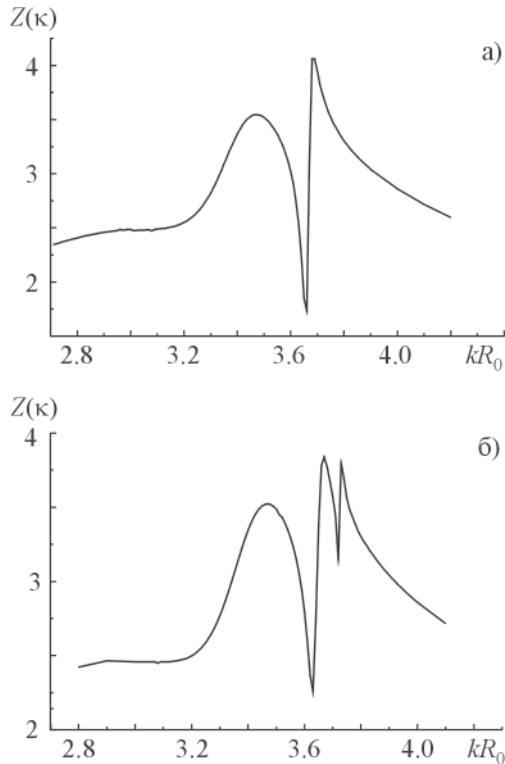
$$Z(\kappa) = \int_0^\pi S(\vartheta, \kappa) \sin \vartheta d\vartheta.$$



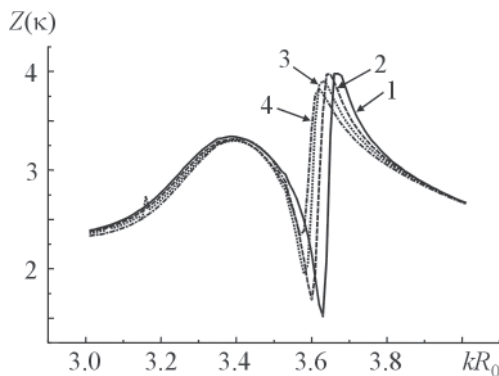
**Рис. 2.** Зависимость сопротивления излучения от  $kR_0$  для структуры из четырех дисков:  
 а)  $h_1 = 0.1, h_2 = 0.2, h_3 = 0.3, d = 0.15$ ;  
 б)  $h_1 = 0.1, h_2 = 0.3, h_3 = 0.5, d = 0.15$

### 5. Численные результаты

На рис. 2 приведены графики зависимости сопротивления излучения от величины нормированного волнового числа для двух рассеивающих структур с различными параметрами. Как отмечено в [4], в подобных структурах могут существовать резонансы двух типов. Резонансы первого типа хорошо известны и связаны с появлением между дисками стоячих волн в направлении, перпендикулярном плоскостям дисков. Резонансы второго типа – “поршневые” резонансы, обусловленные возбуждением между дисками стоячей волны вида  $J_1(\kappa r)$ , возникают вблизи корней функции  $J_1(\kappa)$ , причем отсутствие торцевых стенок приводит к уменьшению резонансных частот. В данном случае параметры рассеивающих структур выбраны таким образом, что в них могут возбуждаться



**Рис. 3.** Зависимость сопротивления излучения от  $kR_0$  для структуры из  
 а) трех дисков ( $h_1 = 0.1$ ,  $h_2 = 0.3$ ,  $d = 0.15$ );  
 б) четырех дисков ( $h_1 = 0.1$ ,  $h_2 = 0.2$ ,  $h_3 = 0.3$ ,  
 $d = 0.15$ )



**Рис. 4.** Зависимость сопротивления излучения от  $kR_0$  для структуры из трех дисков,  $d = 0.2$ ,  $h_1 = 0.1$ ,  $h_3 = 0.4$ :  
 1 –  $h_2 = 0.11$ , 2 –  $h_2 = 0.13$ , 3 –  $h_2 = 0.16$ ,  
 4 –  $h_2 = 0.2$

только “поршневые” резонансы. Можно заметить, что в целом графики подобны один другому и изменение геометрических пара-

метров приводит, в основном, к различиям в тонкой структуре резонансов. Резонансы между разными парами дисков дают различные значения сдвигки резонансной частоты, что приводит к усложнению структуры резонансов при увеличении числа дисков (см. рис. 3). Динамика тонкой структуры резонанса при смещении одного из дисков показана на рис. 4.

## 6. Заключение

В настоящей работе получено строгое решение осесимметричной задачи дифракции поля точечного источника на ограниченной структуре из соосных одинаковых идеально проводящих дисков, находящихся на произвольных расстояниях друг от друга. Соответствующая граничная задача сведена к математически эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений II рода типа Фредгольма, которая решается стандартными численными методами.

Автор благодарит канд. физ.-мат. наук Воробьева С. Н. за полезные обсуждения.

## Литература

1. А. Н. Хижняк. Радиофизика и радиоастрономия. 1997, **2**, №4, с. 501-505.
2. А. Н. Хижняк. Акуст. ж. 1989, **35**, №5, с. 929-933.
3. Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев, Наукова думка, 1984, 239 с.
4. В. Г. Сологуб. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Харьков, ИРЭ АН УССР, 1975, 302 с.

## Rigorous Solution of Axial-Symmetric Problem of Excitation of Non-Equidistant Structure of Coaxial Disks by Field of Electric Dipole

A. N. Khizhnyak

Diffraction of the dipole field by the non-equidistant structure consisting of coaxial

disks is considered. Using the method of moments and the method of partial inversion of the problem's operator the solution of the appropriate boundary problem is obtained in the form of infinite system of the linear algebra-

ic equations of the II kind which appears to be the Fredholm's one and can be solved using reduction with any given accuracy. Some numerical results for the scattered field are found.