

Оптимальное обнаружение парнокоррелированного потока сигналов на фоне парнокоррелированного шума

А. М. Стадник

*Харьковский военный университет,
Украина, 61043, г. Харьков, пл. Свободы, 6
E-mail: Alex_Stadnik@yahoo.com*

Статья поступила в редакцию 4 декабря 2000 г.

С помощью метода производящего функционала получены выражения для статистических характеристик парнокоррелированного потока случайных событий. На основе найденного отношения правдоподобия синтезирована структурная схема оптимального по критерию Неймана-Пирсона обнаружителя парнокоррелированного потока сигналов на фоне парнокоррелированных помех, рассмотрены особенности его реализации и функционирования.

За допомогою метода твірного функціоналу отримано вирази для статистичних характеристик парнокорельованого потоку випадкових подій. На основі знайденого відношення правдоподібності синтезовано структурну схему оптимального за критерієм Неймана-Пірсона виявлювача парнокорельованого потоку сигналів на фоні парнокорельованих завад, розглянуто особливості його реалізації та функціонування.

1. Введение

Случайные события, которые характеризуются большой степенью локализации во времени или пространстве, можно изображать точками на оси времени или в исходной области пространства. Процесс появления таких точек называется случайным точечным процессом или потоком случайных событий [1-3].

Аппарат теории случайных потоков используется при изучении процессов радиоактивности, фотодетектирования, тепловой эмиссии электронов и т. д. Случайные потоки, в которых точки (события) характеризуются пространственными координатами, описывают положение звезд при астрономических наблюдениях или плотности электронов в чувствительных элементах электронных микроскопов. Как реализации случайных потоков можно рассматривать также случайные моменты появления и простран-

ственные координаты толчков при сейсмической активности.

Рассмотрение распределения фотоотсчетов в случайном поле (теплого или лазерного) излучения широко используется в современной статистической оптике для определения статистики интенсивности светового пучка [4].

Наиболее широко применяется пуассоновская модель случайного потока, поскольку она универсальна и дает возможность продвинуться в аналитических расчетах. Одной из ее характерных особенностей является отсутствие последствий, т. е. корреляции между событиями потока. Однако для адекватного описания реальных процессов учет таких корреляций принципиально важен, в связи с чем в последнее время значительное внимание уделяется исследованию статистических характеристик непуассоновских потоков.

Методы учета и алгоритмы обнаружения парных корреляций необходимы, в частности,

при разработке источников электромагнитного излучения с субпуассоновской статистикой, которые вызывают значительный интерес в связи с возможностью использования для повышения точности оптических измерений [5, 6].

Вопрос оптимального обнаружения парнокоррелированного потока был рассмотрен для случая пуассоновского шума в статье [7], где были исправлены некоторые ошибки предыдущих публикаций, синтезирован алгоритм и проанализирована работа оптимального по критерию Неймана-Пирсона обнаружителя. В настоящей статье результаты [7] обобщены на случай парнокоррелированного шума и дано строгое доказательство анонсированного в [7] рекуррентного соотношения для функций, через которые выражаются плотности вероятности произвольного парнокоррелированного потока.

2. Математический формализм

Поскольку для описания случайных потоков применение обычных в теории случайных процессов многомерных плотностей вероятности не всегда удобно, в статье использован подход, основанный на производящих функционалах. Поэтому для максимальной, насколько это возможно, замкнутости изложения кратко напомним основные определения, следуя терминологии и обозначениям монографии [1].

Полное вероятностное описание случайного потока (в некоторой области Ω в случайные моменты времени τ_1, \dots, τ_k появляется k событий ($k = 0, 1, 2, \dots$) – также случайное число) наиболее эффективно осуществляется посредством производящего функционала (ПФЛ)

$$L[u; \Omega] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\Omega} d\tau_1 \dots \int_{\Omega} d\tau_k \pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) \times [1 + u(\tau_1)] \dots [1 + u(\tau_k)],$$

где $u(\tau)$ – произвольная функция в области Ω , которая является, как правило, временным интервалом $(0, T)$ или, в самом общем случае, объединением нескольких подобла-

стей $\Omega = \bigcup_r \Omega_r$. Здесь и всюду ниже при указании пределов интегрирования для упрощения записи область задания потоков Ω не конкретизируется.

Задание случайного потока с помощью ПФЛ эквивалентно его описанию полным набором функциональных производных

$$\pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = \left. \frac{\delta^k L[u; \Omega]}{\delta u(\tau_1) \dots \delta u(\tau_k)} \right|_{u(\tau)=-1},$$

представляющих собой симметричные (в силу неразличимости событий) по всем аргументам многомерные совместные плотности вероятности появления k событий с координатами около τ_1, \dots, τ_k и неоявления событий в остальной области Ω .

Вероятности появления в области Ω ровно k событий безотносительно к моментам их появления

$$P_k(\Omega) = \frac{1}{k!} \int_{\Omega} d\tau_1 \dots \int_{\Omega} d\tau_k \pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega)$$

удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\Omega) = 1,$$

откуда следует первое условие нормировки производящего функционала – $L[0; \Omega] = 1$, второе условие – $L[-1; \Omega] = P_0(\Omega)$ – следует прямо из определения ПФЛ.

Проводить классификацию случайных потоков по степени корреляции появления событий на интервале наблюдения удобнее, используя разложение в функциональный ряд логарифма ПФЛ

$$L[u; \Omega] = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\Omega} d\tau_1 \dots \int_{\Omega} d\tau_k g_k(\tau_1 \dots \tau_k) \times u(\tau_1) \dots u(\tau_k) \right],$$

потому что вводимые таким образом корреляционные функции потока

$$g_k(\tau_1, \dots, \tau_k) = \frac{\delta^k \ln L[u; \Omega]}{\delta u(\tau_1) \dots \delta u(\tau_k)} \Big|_{u(\tau)=0}$$

имеют ясный физический смысл, отражая тенденцию k событий к сближению, появлению группами при положительных корреляциях и, соответственно, к “расталкиванию” событий и ограничению их числа в области Ω – при отрицательных.

Простейший случай равенства нулю всех функций корреляции, начиная со второй, соответствует пуассоновскому потоку, ПФЛ которого записывается как

$$L[u; \Omega] = \exp \left[\int_{\Omega} d\tau g_1(\tau) u(\tau) \right],$$

а его единственная характеристика $g_1(\tau)$ имеет смысл интенсивности. Для пуассоновского потока легко найти плотности вероятности

$\pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = e^{-\bar{k}} \prod_{i=1}^k g_1(\tau_i)$ и вероятности появления в области Ω ровно k событий

$P_k(\Omega) = \frac{\bar{k}^k}{k!} e^{-\bar{k}}$, где $\bar{k} = \int_{\Omega} d\tau g_1(\tau)$ есть среднее число событий в области Ω .

Как можно видеть, для пуассоновского потока совместная плотность вероятности появления одного события около координаты τ_i и не появления событий в остальной области Ω есть $\pi_1(\tau_i; \Omega) = e^{-\bar{k}} g_1(\tau_i)$, а вероятность появления в области Ω нулевого числа событий – $P_0(\Omega) = e^{-\bar{k}}$. Следовательно, для пуассоновского потока плотность вероятности появления одного события около координаты τ_i есть просто его интенсивность в этой точке $g_1(\tau_i)$.

Отсюда следует, что совместная плотность вероятности появления k событий с координатами около τ_1, \dots, τ_k равна произведению

плотностей вероятности появления каждого события $\prod_{i=1}^k g_1(\tau_i)$. Таким образом, для пуассоновского потока (и, как нетрудно видеть, только для него) моменты появления отдельных событий статистически независимы, или, иными словами, не коррелированы.

Поскольку, как правило, интенсивность корреляций убывает с ростом их порядка (тройные корреляции менее вероятны, чем парные, четверные – менее вероятны, чем тройные, и т. д.), основной физический интерес в большинстве случаев представляют парные корреляции. Парнокоррелированным называют поток, у которого отличны от нуля лишь две корреляции низших порядков – $g_1(\tau)$ и $g_2(\tau_1, \tau_2)$. Теперь мы имеем все необходимое для дальнейшего рассмотрения.

3. Постановка задачи

Пусть на вход приемного устройства поступает смесь парнокоррелированного потока полезных сигналов, который характеризуется производящим функционалом

$$L^c[u; \Omega] = \exp \left[\int_{\Omega} d\tau g_1^c(\tau) u(\tau) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\tau_1 \int_{\Omega} d\tau_2 g_2^c(\tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) \right], \quad (1)$$

и парнокоррелированного потока шумовых сигналов, ПФЛ которого имеет вид

$$L^w[u; \Omega] = \exp \left[\int_{\Omega} d\tau g_1^w(\tau) u(\tau) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\tau_1 \int_{\Omega} d\tau_2 g_2^w(\tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) \right], \quad (2)$$

где функции $g_1(\tau)$ и $g_2(\tau_1, \tau_2)$ представляют

собой первую и вторую корреляции соответствующих парнокоррелированных потоков.

Синтез оптимального по критерию Неймана-Пирсона алгоритма обнаружения сводится к нахождению отношения правдоподобия Λ , задаваемого (при наблюдении в дискретном времени) соотношением [8]

$$\Lambda = \frac{\pi_k^{c+\psi}(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega)}{\pi_k^{\psi}(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega)},$$

где плотности вероятности k -го порядка при наличии и отсутствии сигнала определяются из (1) и (2) как

$$\pi_k^{c+\psi}(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = \frac{\delta^k L^{c+\psi}[u; \Omega]}{\delta u(\tau_1) \dots \delta u(\tau_k)} \Big|_{u(\tau)=-1}$$

и

$$\pi_k^{\psi}(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = \frac{\delta^k L^{\psi}[u; \Omega]}{\delta u(\tau_1) \dots \delta u(\tau_k)} \Big|_{u(\tau)=-1}$$

соответственно.

В силу статистической независимости сигнала и шумового потоков для ПФЛ их суммы имеем

$$L^{c+\psi}[u; \Omega] = L^c[u; \Omega] \cdot L^{\psi}[u; \Omega],$$

или, с учетом (1) и (2),

$$L^{c+\psi}[u; \Omega] = \exp \left[\int_{\Omega} d\tau g_1^{c+\psi}(\tau) u(\tau) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\tau_1 \int_{\Omega} d\tau_2 g_2^{c+\psi}(\tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) \right],$$

где

$$g_1^{c+\psi}(\tau) = g_1^c(\tau) + g_1^{\psi}(\tau), \tag{3}$$

$$g_2^{c+\psi}(\tau_1, \tau_2) = g_2^c(\tau_1, \tau_2) + g_2^{\psi}(\tau_1, \tau_2).$$

Таким образом, сумма двух независимых парнокоррелированных потоков также является парнокоррелированным потоком, корреляции которого выражаются через корреляции слагаемых посредством (3), а задача синтеза сводится к нахождению плотностей вероятности парнокоррелированных потоков с заданными ПФЛ.

4. Статистические характеристики парнокоррелированного потока

После замены переменных $u(\tau) = v(\tau) - 1$ для произвольного парнокоррелированного потока с ПФЛ

$$L[u; \Omega] = \exp \left[\int_{\Omega} d\tau g_1(\tau) u(\tau) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\tau_1 \int_{\Omega} d\tau_2 g_2(\tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) \right]$$

его плотности вероятности

$$\pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = \frac{\delta^k L[u; \Omega]}{\delta u(\tau_1) \dots \delta u(\tau_k)} \Big|_{u(\tau)=-1}$$

можно представить в виде

$$\pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = \frac{\delta^k}{\delta v(\tau_1) \dots \delta v(\tau_k)} \times \exp \left[\chi_0(\Omega) + \int_{\Omega} d\tau \chi_1(\tau; \Omega) v(\tau) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\tau_1 \int_{\Omega} d\tau_2 \chi_2(\tau_1, \tau_2) v(\tau_1) v(\tau_2) \right] \Big|_{v(\tau)=0}. \tag{4}$$

Здесь так называемые χ -плотности – $\chi_0(\Omega)$, $\chi_1(\tau; \Omega)$, $\chi_2(\tau, \tau')$ – задаются для парнокоррелированного потока соотношениями [1]:

$$\chi_0(\Omega) = \ln P_0(\Omega),$$

$$\chi_1(\tau; \Omega) = g_1(\tau) - \int_{\Omega} d\tau' g_2(\tau, \tau'),$$

$$\chi_2(\tau, \tau') = g_2(\tau, \tau'),$$

где вероятность появления в области Ω нулевого числа событий $P_0(\Omega)$ выражается через интегралы от корреляционных функций

$$G_1(\Omega) = \int_{\Omega} d\tau_1 g_1(\tau_1),$$

$$G_2(\Omega) = \int_{\Omega} d\tau_1 \int_{\Omega} d\tau_2 g_2(\tau_1, \tau_2)$$

в виде

$$P_0(\Omega) = \exp \left[-G_1(\Omega) + \frac{1}{2} G_2(\Omega) \right].$$

Преобразуем выражение (4) следующим образом. Статистику любой случайной функции $\zeta(\tau)$ можно полностью описать ее характеристическим функционалом

$$\Phi[u] = \left\langle \exp \left[i \int_{\Omega} d\tau \zeta(\tau) u(\tau) \right] \right\rangle_{\zeta},$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle_{\zeta}$ обозначают усреднение по ансамблю её реализаций. Если случайная функция $\zeta(\tau)$ – гауссова, то ее характеристический функционал записывается в явном виде как

$$\Phi_G[u] = \exp \left[i \int_{\Omega} d\tau \langle \zeta(\tau) \rangle_{\zeta} u(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\tau_1 \int_{\Omega} d\tau_2 \langle \delta\zeta(\tau_1) \delta\zeta(\tau_2) \rangle_{\zeta} u(\tau_1) u(\tau_2) \right],$$

где отклонение функции $\zeta(\tau)$ от ее среднего значения $\delta\zeta(\tau) = \zeta(\tau) - \langle \zeta(\tau) \rangle_{\zeta}$.

Таким образом, выражение (4) можно переписать в виде

$$\pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = P_0(\Omega) \frac{\delta^k \Phi_G[-i\nu]}{\delta\nu(\tau_1) \dots \delta\nu(\tau_k)} \Big|_{\nu(\tau)=0}, \quad (5)$$

где $\Phi_G[u]$ – характеристический функционал некой гауссовой случайной функции $\zeta(\tau)$, среднее значение и корреляционная функция которой определяются соотношениями:

$$\langle \zeta(\tau) \rangle_{\zeta} = \chi_1(\tau; \Omega), \quad (6)$$

$$\langle \delta\zeta(\tau_1) \delta\zeta(\tau_2) \rangle_{\zeta} = \chi_2(\tau_1, \tau_2).$$

Выполнив в (5) дифференцирование, получим, что с точностью до множителя $P_0(\Omega)$ плотности вероятности k -го порядка для произвольного парнокоррелированного потока представляют собой моменты k -го порядка вспомогательной гауссовой случайной функции $\zeta(\tau)$:

$$\pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = P_0(\Omega) \langle \zeta(\tau_1) \dots \zeta(\tau_k) \rangle_{\zeta}. \quad (7)$$

В действительности, соотношение (7) устанавливает дуализм, утверждая при его прочтении справа налево, что моменты любого порядка произвольной гауссовой случайной функции $\zeta(\tau)$ с точностью до множителя представляют собой плотности вероятности того же порядка вспомогательного парно-

коррелированного случайного потока, χ -плотности которого определяются формулой (6).

Введя взамен $\zeta(\tau)$ другую вспомогательную функцию $\xi(\tau) = \frac{\delta\zeta(\tau)}{\chi_1(\tau; \Omega)}$ со средним значением $\langle \xi(\tau) \rangle_\xi = 0$ и корреляционной функцией

$$q(\tau, \tau') = \langle \delta\xi(\tau)\delta\xi(\tau') \rangle_\xi = \frac{\chi_2(\tau, \tau')}{\chi_1(\tau; \Omega)\chi_1(\tau'; \Omega)},$$

получим представление $\pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega)$ в стандартном виде [1]:

$$\begin{aligned} \pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = \\ = P_0(\Omega) \prod_{i=1}^k \chi_1(\tau_i; \Omega) U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Однако теперь, в отличие от [1], в формуле (8) для функции $U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega)$ имеем новое представление:

$$U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = \left\langle \prod_{i=1}^k [1 + \xi(\tau_i)] \right\rangle_\xi, \quad (9)$$

которое в некоторых отношениях является более удобным для математических выкладок и физической интерпретации. В частности, на основе (9) можно строго доказать (см. Приложение), что $U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega)$ удовлетворяет не интегральному уравнению (формула 2.7.9 в [1]), а впервые полученному из эвристических соображений и приведенному в работе [7] рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = U_{k-1}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}; \Omega) + \\ + \sum_{i=1}^{k-1} q(\tau_i, \tau_k) U_{k-2}(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{k-1}; \Omega), \end{aligned} \quad (10)$$

где $U_{k-2}(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{k-1}; \Omega)$ – функция

$k-2$ аргументов, образуемых из упорядоченного множества $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1})$ исключением i -го члена ($1 \leq i \leq k-1$).

Естественно, что соответственно соотношению (10) должны быть модифицированы все структурные схемы алгоритмов оптимальной обработки, использовавшие указанное интегральное уравнение.

Кроме того, только задаваемое формулой (9) представление для $U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega)$ позволяет достаточно просто перейти к непрерывному пределу $k \rightarrow \infty$, поскольку число и координаты точек однородных событий в (9) и, следовательно, во всех выражениях для плотностей вероятности, отношений правдоподобия и т. д. легко выражаются через реализацию случайного потока в виде ступенчатой функции $N(\tau)$:

$$\begin{aligned} U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = \left\langle \exp \left\{ \sum_{i=1}^k \ln [1 + \xi(\tau_i)] \right\} \right\rangle_\xi = \\ = \left\langle \exp \left\{ \int_{\Omega} dN(\tau) \ln [1 + \xi(\tau)] \right\} \right\rangle_\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Выполнение равенства (11) обеспечивается выбором $N(\tau)$ в виде $N(\tau) = \sum_{i=1}^k \theta(\tau - \tau_i)$,

где $\theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда.

Пользуясь тем, что для гауссова случайного поля $\xi(\tau)$ с нулевым средним значением моменты $\langle \xi(\tau_1) \dots \xi(\tau_k) \rangle_\xi$ нечетного порядка равны нулю, а четного – представляют сумму по всем возможным разбиениям индексов на пары τ_1, \dots, τ_k произведений $[k/2]$ (где $[x]$ – целая часть x) корреляционных функций $q(\tau_1, \tau_2), \dots, q(\tau_{k-1}, \tau_k)$, из (9) нетрудно получить:

$$U_0(\Omega) = 1,$$

$$U_1(\tau_1; \Omega) = 1,$$

$$U_2(\tau_1, \tau_2; \Omega) = 1 + q_{12},$$

(12)

$$U_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3; \Omega) = 1 + q_{12} + q_{13} + q_{23},$$

$$U_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4; \Omega) = 1 + q_{12} + q_{13} + q_{14} + q_{23} + q_{24} + q_{34} + q_{12}q_{34} + q_{13}q_{24} + q_{14}q_{23},$$

$$U_5(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5; \Omega) = 1 + q_{12} + q_{13} + q_{14} + q_{15} + q_{23} + q_{24} + q_{25} + q_{34} + q_{35} + q_{45} + q_{12}(q_{34} + q_{35} + q_{45}) + q_{13}(q_{24} + q_{25} + q_{45}) + q_{14}(q_{23} + q_{25} + q_{35}) + q_{15}(q_{23} + q_{24} + q_{34}) + q_{23}q_{45} + q_{24}q_{35} + q_{25}q_{34},$$

где для сокращения записи введено обозначение $q_{ik} = q(\tau_i, \tau_k)$. Исходя из (12), справедливость соотношения (10) для частных случаев $k = 2, 3, 4, 5$ можно доказать прямым вычислением.

Используя алгоритм расчета моментов гауссова случайного поля $\xi(\tau)$, общую формулу для выражений (12) можно записать в виде [7]:

$$U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = 1 + \sum_{n=1}^{[k/2]} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j_1=i+1}^k q_{i,j_1} \times \\ \times \sum_{\substack{i_2=i_1+1 \\ i_2, j_2 \neq j_1}}^{k-1} \sum_{j_2=i_2+1}^k q_{i_2, j_2} \sum_{\substack{i_3=i_2+1 \\ i_3, j_3 \neq j_1, j_2}}^{k-1} \sum_{j_3=i_3+1}^k q_{i_3, j_3} \dots \sum_{\substack{i_n=i_{n-1}+1 \\ i_n, j_n \neq j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}}^{k-1} \sum_{j_n=i_n+1}^k q_{i_n, j_n}. \quad (13)$$

Анализ формул (12), (13) показывает, что в приведенном в монографии [1] выражении для $U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega)$,

$$U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{[k/2]} \sum_{i_1 < j_1} q_{i_1, j_1} \sum_{i_2 < j_2} q_{i_2, j_2} \dots \sum_{i_n < j_n} q_{i_n, j_n},$$

допущена ошибка, существенно повлиявшая на последующие результаты, поскольку суммирование в нем проводится только по упорядоченным $\tau_{i_1} < \tau_{j_1} < \dots < \tau_{i_{[k/2]}} < \tau_{j_{[k/2]}}$ аргументам τ_m , $m \in (1, k)$, и, соответственно, начиная с номера $k \geq 4$, остаются неучтенными некоторые допустимые комбинации.

5. Оптимальный обнаружитель парнокоррелированного потока

Имея все необходимые заготовки, можно перейти к расчету отношения правдоподобия и синтезу структуры оптимального обнаружителя парнокоррелированного потока. Воспользовавшись общим выражением для плотностей вероятности (8), в частных случаях (1) и (2) получим:

$$\pi_k^w(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = \exp[\chi_0^w(\Omega) + \sum_{i=1}^k \ln \chi_1^w(\tau_i; \Omega)] U_k^w(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega), \quad (14)$$

$$\pi_k^{c+w}(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = \exp[\chi_0^{c+w}(\Omega) + \sum_{i=1}^k \ln \chi_1^{c+w}(\tau_i; \Omega)] U_k^{c+w}(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega),$$

где для расчета функций U_k^w и U_k^{c+w} можно воспользоваться любым из методов, основанных на формулах (9), (10) и (13), в которых величины $q(\tau, \tau')$, относящиеся к шуму и смеси сигнала с шумом, имеют вид:

$$q^w(\tau, \tau') = \frac{\chi_2^w(\tau, \tau')}{\chi_1^w(\tau; \Omega)\chi_1^w(\tau'; \Omega)}, \quad (15)$$

$$q^{c+w}(\tau, \tau') = \frac{\chi_2^{c+w}(\tau, \tau')}{\chi_1^{c+w}(\tau; \Omega)\chi_1^{c+w}(\tau'; \Omega)}.$$

В выражениях (14) и (15) для случая смеси сигнала и шума в силу условий (3) имеем:

$$\chi_0^{c+w}(\Omega) = \chi_0^c(\Omega) + \chi_0^w(\Omega),$$

$$\chi_1^{c+w}(\tau; \Omega) = \chi_1^c(\tau; \Omega) + \chi_1^w(\tau; \Omega),$$

$$\chi_2^{c+w}(\tau, \tau') = \chi_2^c(\tau, \tau') + \chi_2^w(\tau, \tau').$$

С учетом всех этих соотношений для логарифма отношения правдоподобия $l = \ln \Lambda$ получаем:

$$l = \chi_0^c(\Omega) + \sum_{i=1}^k \ln \left[1 + \frac{\chi_1^c(\tau_i; \Omega)}{\chi_1^w(\tau_i; \Omega)} \right] + \ln U_k^{c+w}(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) - \ln U_k^w(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega). \quad (16)$$

Итак, в соответствии с выражением (16) оптимальный обнаружитель должен быть трехканальным и иметь структуру, представленную на рисунке. Первый из каналов соответствует стандартному (известному) обнаружителю пуассоновского потока интенсивности $\chi_1^c(\tau; \Omega)$ на фоне пуассоновского шума интенсивности $\chi_1^w(\tau; \Omega)$ и осуществляет накопление появляющихся импульсов с весом

$$\ln \left[1 + \frac{\chi_1^c(\tau; \Omega)}{\chi_1^w(\tau; \Omega)} \right].$$

Второй канал соответствует обнаружению пуассоновского потока некратных (т. е. не совпадающих во времени) пар событий, взаимное расположение которых на интервале наблюдения Ω произвольно, и осуществляет накопление импульсов сигнального потока, “подозреваемых” на парную корреляцию. Результаты накопления первого и (после логарифмирования) второго каналов суммируются в сумматоре С1.

Третий канал структурно аналогичен второму и, если рассматривать его отдельно, также является оптимальным обнаружителем пуассоновского потока пар шумовых (помеховых) импульсов. Результаты накопления, вводимые со знаком минус в сумматор С2, соответствуют отбрасыванию парных корреляций, наблюдаемых в шумовом потоке.

Рассмотрим предельные случаи данной схемы. В отсутствие парных корреляций как в сиг-

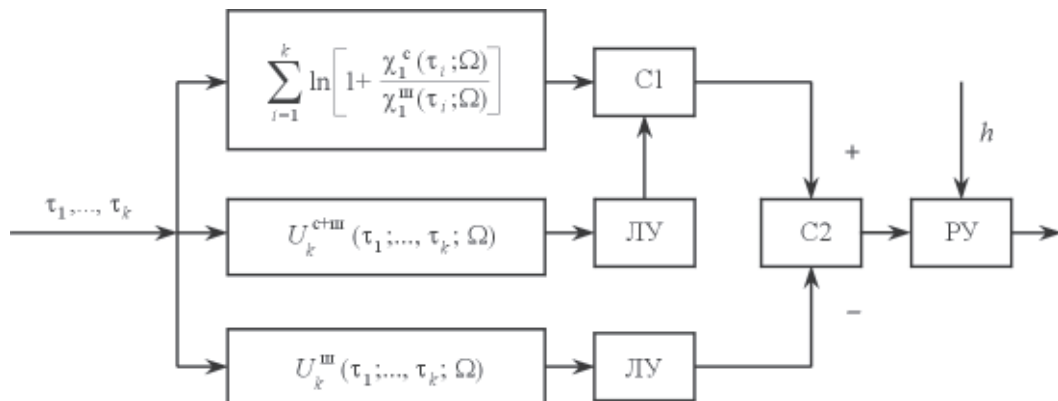


Рис. Структурная схема оптимального парнокоррелированного потока:
 ЛУ – логарифмирующее устройство; С1, С2 – сумматоры; РУ – решающее устройство; h – порог обнаружения

нальном ($g_2^c(\tau_1, \tau_2) = 0$), так и в шумовом ($g_2^w(\tau_1, \tau_2) = 0$) потоках имеем соответственно $U_k^c = 1$ и $U_k^w = 1$, т. е. второй и третий каналы дают нулевой вклад, а схема сводится к известному обнаружителю пуассоновского потока на фоне пуассоновских шумов.

Если парные корреляции отсутствуют только в шумовом потоке ($g_2^w(\tau_1, \tau_2) = 0$), то нулевой вклад дает только третий канал, и мы получаем схему оптимального обнаружителя парнокоррелированного потока на фоне пуассоновских шумов, рассмотренную ранее в [7]. Достаточно очевидным является и частный случай обнаружения пуассоновских сигналов на фоне парнокоррелированных шумов.

Такая трактовка алгоритма следует из того факта, что произвольный парнокоррелированный поток с функциями корреляции $g_1(\tau)$ и $g_2(\tau_1, \tau_2)$ может быть однозначно разложен в сумму статистически независимых пуассоновского потока с интенсивностью $\chi_1(\tau; \Omega) = g_1(\tau) - \int_{\Omega} d\tau' g_2(\tau, \tau')$ и потока пуассоновских пар, не сливающихся в двукратные, взаимное расположение которых описывается функцией $\chi_2(\tau, \tau') = g_2(\tau, \tau')$ [1].

Смесь независимых парнокоррелированных сигнала и шума после такого разложения каждого из слагаемых представляет собой суперпозицию четырех взаимно независимых потоков: двух (сигнального и шумового) пуассоновских и двух (сигнального и шумового) пуассоновских потоков некратных пар. Оптимальное обнаружение, в соответствии с выражением (16), сводится к выделению пуассоновского потока из пуассоновского шума с поправкой, учитывающей эффект парных корреляций сигнального потока и вычитающей вклад в статистику (порог), обусловленный парными корреляциями шумового потока.

При переходе к наблюдению в непрерывном времени из (16) с учетом (11) легко получить:

$$l = \chi_0^c(\Omega) + \int_{\Omega} dN(\tau) \ln \left[1 + \frac{\chi_1^c(\tau; \Omega)}{\chi_1^w(\tau; \Omega)} \right] + \ln \left\langle \exp \left\{ \int_{\Omega} dN(\tau) \ln [1 + \xi^{c+w}(\tau)] \right\} \right\rangle_{\xi^{c+w}} - \ln \left\langle \exp \left\{ \int_{\Omega} dN(\tau) \ln [1 + \xi^w(\tau)] \right\} \right\rangle_{\xi^w}, \quad (17)$$

где усреднение в предпоследнем слагаемом производится по гауссовой случайной функции $\xi^{c+w}(\tau)$, характеризуемой первым и вторым моментами

$$\langle \xi^{c+w}(\tau) \rangle_{\xi^{c+w}} = 0, \\ \langle \xi^{c+w}(\tau) \xi^{c+w}(\tau') \rangle_{\xi^{c+w}} = q^{c+w}(\tau, \tau'),$$

а в последнем – по гауссовой случайной функции $\xi^w(\tau)$, характеризуемой моментами

$$\langle \xi^w(\tau) \rangle_{\xi^w} = 0, \\ \langle \xi^w(\tau) \xi^w(\tau') \rangle_{\xi^w} = q^w(\tau, \tau').$$

Если вычислительный блок оптимального обнаружителя парнокоррелированного потока сигналов реализован на устройствах цифровой обработки сигналов, то для расчетов функций $U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega)$ целесообразно пользоваться формулой (13). Если же он позволяет проводить аналитические вычисления (примером может служить пакет Maple V, ядро которого используется специализированными математическими программами Mathematica, Mathcad и др.), то предпочтительным может оказаться использование рекуррентных соотношений (10). При реализации оптимального обнаружителя на принципах аналоговых вычислений схему оптимальной обработки целесообразно строить в соответствии с формулой (17).

6. Заключение

Оптимальный обнаружитель парнокоррелированного потока сигналов в парнокоррелированном шуме должен иметь трехканальную схему. Первый из каналов представляет собой стандартный обнаружитель пуассоновского потока в пуассоновском шуме, а два других соответствуют учету парных корреляций в сигнальном и шумовом потоках. В зависимости от возможности проведения аналитических вычислений предложены две схемы реализации каждого из этих каналов.

Установлен дуализм между статистическими характеристиками произвольного парнокоррелированного потока и статистическими моментами гауссовой случайной функции $\zeta(\tau)$, среднее значение и корреляционная функция которой выражаются через χ -плотности потока посредством формул:

$$\langle \zeta(\tau) \rangle_{\xi} = \chi_1(\tau_1; \Omega),$$

$$\langle \delta\zeta(\tau_1) \delta\zeta(\tau_2) \rangle_{\xi} = \chi_2(\tau_1, \tau_2).$$

Суть его состоит в том, что плотности вероятности k -го порядка являются (с точностью до множителя, представляющего вероятность $P_0(\Omega)$ непоявления ни одного события на интервале наблюдения) моментами k -го порядка функции $\zeta(\tau)$:

$$\pi_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = P_0(\Omega) \langle \zeta(\tau_1) \dots \zeta(\tau_k) \rangle_{\xi}.$$

Это позволяет реализовать оптимальный обнаружитель парнокоррелированного потока на принципах аналоговых вычислений (подобно нахождению преобразований Фурье в устройствах оптической обработки информации).

Приложение

Для доказательства рекуррентного соотношения

$$U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = U_{k-1}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}; \Omega) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} q(\tau_i, \tau_k) U_{k-2}(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{k-1}; \Omega) \quad (\text{П.1})$$

воспользуемся представлением функции $U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega)$ в виде (9):

$$U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = \left\langle \prod_{i=1}^k [1 + \xi(\tau_i)] \right\rangle_{\xi}. \quad (\text{П.2})$$

Явно выделив последний сомножитель из произведения под знаком усреднения в формуле (П.2)

$$\prod_{i=1}^k [1 + \xi(\tau_i)] = [1 + \xi(\tau_k)] \prod_{i=1}^{k-1} [1 + \xi(\tau_i)],$$

перепишем ее, с учетом определения $U_{k-1}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}; \Omega)$, в следующем виде:

$$U_k(\tau_1, \dots, \tau_k; \Omega) = U_{k-1}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}; \Omega) + \left\langle \xi(\tau_k) \prod_{i=1}^{k-1} [1 + \xi(\tau_i)] \right\rangle_{\xi}. \quad (\text{П.3})$$

При этом в правой части возникает член, обусловленный корреляцией случайной функции $\xi(\tau)$ с неким функционалом $R[\xi]$. Методы расщепления подобных корреляций в общем случае зависят от природы случайной функции $\xi(\tau)$. Формула Фуруцу-Новикова (см., например, [9]) дает явное выражение для среднего от произведения гауссовой случайной функции $\xi(\tau)$ и произвольного функционала $R[\xi]$ от нее:

$$\langle \xi(\tau) R[\xi] \rangle_{\xi} = \langle \xi(\tau) \rangle_{\xi} \langle R[\xi] \rangle_{\xi} + \int d\tau' \langle \delta\xi(\tau) \delta\xi(\tau') \rangle_{\xi} \left\langle \frac{\delta R[\xi]}{\delta \xi(\tau')} \right\rangle_{\xi}. \quad (\text{П.4})$$

В нашем случае формулы (П.4) имеем

$$\langle \xi(\tau) \rangle_{\xi} = 0, \quad \langle \delta \xi(\tau) \delta \xi(\tau') \rangle_{\xi} = q(\tau, \tau'),$$

$$R[\xi] = \prod_{i=1}^{k-1} [1 + \xi(\tau_i)].$$

Дифференцирование функционала $R[\xi]$ дает:

$$\frac{\delta R[\xi]}{\delta \xi(\tau')} = \sum_{i=1}^{k-1} \delta(\tau' - \tau_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k-1} [1 + \xi(\tau_j)]. \quad (\text{П.5})$$

Подставляя (П.5) в (П.4) и замечая, что

$$\left\langle \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k-1} [1 + \xi(\tau_j)] \right\rangle_{\xi} =$$

$$= U_{k-2}(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{k-1}; \Omega),$$

получаем для второго члена в правой части формулы (П.3)

$$\left\langle \xi(\tau_k) \prod_{i=1}^{k-1} [1 + \xi(\tau_i)] \right\rangle_{\xi} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} q(\tau_k, \tau_i) \left\langle \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k-1} [1 + \xi(\tau_j)] \right\rangle_{\xi} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} q(\tau_k, \tau_i) U_{k-2}(\tau_1, \dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{k-1}; \Omega),$$

что завершает доказательство соотношения (П.1).

Литература

1. И. А. Большаков, В. С. Ракошиц. Прикладная теория случайных потоков. Москва, Сов. Радио, 1978, 248 с.
2. D. L. Snyder. Random point processes. N.Y., Wiley, 1975, 254 pp.
3. Н. Г. Ван Кампен. Стохастические процессы в физике и химии. Москва, Высш. школа, 1990, 376 с.
4. А. А. Курикша. Квантовая оптика и оптическая локация. Москва, Сов. Радио, 1973, 184 с.
5. Е. П. Николаев, М. С. Чубаров. Оптика и спектроскопия. 1987, **63**, №6, с. 1378-1380.
6. L. Davidovich. Rev. Mod. Phys. 1996, **68**, No. 1, pp. 127-173.
7. А. И. Стрелков, А. М. Стадник, С. И. Калмыков, А. П. Лытюга. Радиотехника. Харьков, 1999, вып. 112, с. 3-11.
8. Ю. Г. Сосулин. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. Москва, Сов. Радио, 1978, 320 с.
9. В. И. Кляцкин. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. Москва, Наука, 1980, 336 с.

Optimum Detection of Pair-Correlated Random Point Process with Pair-Correlated Noise

A. M. Stadnik

Expressions for statistical characteristics of the pair-correlated random point process are derived using the generating functional technique. The structure of the optimum (on Neuman-Pearson criterion) detector of the pair-correlated random point process in pair-correlated noise is synthesized on the basis of the likelihood ratio, obtained. Peculiarities of its implementation and operation are considered.