

Электростатические колебания в плазмоподобных структурах, содержащих потоки заряженных частиц

В. М. Яковенко, И. В. Яковенко*

*Институт радиофизики и электроники НАН Украины,
Украина, 61085, г. Харьков, ул. Ак. Проскуры, 12
E-mail: Yakovenko@ire.kharkov.ua*

**Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт "Молния"
Министерства образования и науки Украины,
Украина, 61013, г. Харьков, ул. Шевченко, 47*

Статья поступила в редакцию 30 октября 2000 г.

В работе исследуются дисперсионные характеристики электростатических колебаний в системе, которая представляет собой плазменный слой (диэлектрик), окруженный средами с различными электромагнитными свойствами. Изучены механизмы взаимодействия колебаний с потоками заряженных частиц, проходящими параллельно или перпендикулярно границам раздела сред. Сформулированы условия возникновения неустойчивых состояний и найдены их инкременты.

У роботі досліджуються дисперсійні характеристики електростатичних коливань у системі, що є плазмовим шаром (діелектриком), оточеним середовищами з різними електромагнітними властивостями. Вивчено механізми взаємодії коливань із потоками заряджених частинок, що проходять паралельно або перпендикулярно межах поділу середовищ. Зформульовано умови виникнення нестійких станів і знайдено їх інкременти.

В последнее время в связи с достижениями в области технологии изготовления проводящих твердотельных структур (пленки, полупроводники со сверхрешеткой, двумерный электронный газ, структуры типа металл – диэлектрик – полупроводник и др.) большое внимание уделяется исследованию электромагнитных явлений в таких системах [1-5].

Очень важным для их диагностики и для многочисленных практических приложений в области микро- и нанoeлектроники представляется вопрос о взаимодействии плазменных колебаний с потоками заряженных частиц. Это связано с тем, что в ограниченных средах появляются дополнительные ветви

электромагнитных колебаний и возникают интересные особенности в механизмах взаимодействия полей и частиц.

В настоящей статье исследуются дисперсионные характеристики электростатических колебаний в системе, которая представляет собой плазменный слой (или диэлектрик), окруженный полубесконечными средами с различными электромагнитными свойствами.

В гидродинамическом и кинетическом приближениях изучены механизмы взаимодействия колебаний с потоками заряженных частиц, проходящими параллельно или перпендикулярно границам раздела сред. Получены

выражения для собственных частот колебаний и их декрементов (инкрементов).

Исследуемая модель неоднородной среды является достаточно универсальной и позволяет рассмотреть ряд частных случаев, наиболее интересных для проведения эксперимента.

1. Для нахождения спектра электростатических колебаний неоднородной среды воспользуемся следующими уравнениями электростатики:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0. \quad (2)$$

Вектор электрической индукции $\vec{D}(\vec{r}, t)$ связан с электрическим полем $\vec{E}(\vec{r}, t)$ материальным уравнением:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \hat{\epsilon}(t-t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt'.$$

Выбираем систему отсчета таким образом, что ось y направлена перпендикулярно границам раздела, а оси x, z параллельны им. Вдоль осей x, z система предполагается безграничной.

Пусть область $-d \leq y \leq d$ занимает пластина с $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_1$; полупространство $-\infty < y < -d$ – среда “2” с $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_2$, полупространство $d < y < \infty$ – среда “3” с $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_3$.

На границах раздела сред $y = \pm d$ выполняются условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля и непрерывности нормальных составляющих вектора индукции.

При $y = \pm \infty$ все переменные величины, входящие в уравнения (1), (2), обращаются в нуль.

Поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$ представим в виде:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(y) e^{i(\vec{q}\vec{r} - \omega t)},$$

где \vec{q} – волновой вектор, ω – частота колебаний, $\vec{r} = (x, z)$. Поскольку среда предполагается изотропной, ось x можно направить вдоль волнового вектора \vec{q} . При этом $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(y, x, t)$; $\vec{E} = (E_x, E_y)$.

Решение системы (1), (2) принимает вид:

$$E_x(y) = \begin{cases} a_2 e^{qy}, & -\infty < y < -d; \\ a_1 e^{qy} + a_0 e^{-qy}, & -d \leq y \leq d; \\ a_3 e^{-qy}, & d < y < \infty; \end{cases} \quad (3)$$

$$E_y(y) = \frac{1}{iq} \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad q > 0.$$

Воспользовавшись граничными условиями при $y = \pm d$, получим следующий закон дисперсии собственных колебаний системы:

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2)(\epsilon_1 + \epsilon_3) = (\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3) \exp(-4qd), \quad (4)$$

где $\epsilon_i(\omega) = \int_0^\infty \hat{\epsilon}_i(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$ – диэлектрическая

проницаемость i -й среды. В дальнейшем для плазмоподобных сред предполагается, что $\epsilon_i(\omega) = \epsilon_{0i} - \omega_{0i}^2 / \omega^2$, где ϵ_{0i} – диэлектрическая постоянная кристаллической решетки, $\omega_{0i}^2 = (4\pi e^2 n_{0i}) / m_i$, e – заряд электрона, n_{0i} и m_i – концентрация и эффективная масса электронов проводимости среды соответственно. Эти выражения для ϵ_i получаются из уравнения движения электронов проводимости.

Константы a_i связаны между собой следующими соотношениями:

$$a_2 = \frac{2\varepsilon_1 a_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad a_0 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a_1 e^{-2qd}, \quad (5)$$

$$a_3 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} a_1 e^{2qd}.$$

При больших волновых числах ($qd \gg 1$) получаем два независимых решения: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0$, которые описывают поверхностные плазменные колебания на уединенных границах ($y = \mp d$) сред “1 – 2” и “1 – 3”. В предельном случае $d \rightarrow 0$ имеем плазменные поверхностные колебания на границе сред “2” и “3” ($\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$). При малых, но конечных qd возникают также плазменные колебания в слое $\varepsilon_1(\omega) = 0$. Нетрудно убедиться, что добавки к собственным частотам

$$\omega_1 = \omega_{01} / \sqrt{\varepsilon_{01}} \text{ и } \omega_2 = \left(\frac{\omega_{02}^2 + \omega_{03}^2}{\varepsilon_{02} + \varepsilon_{03}} \right)^{1/2}$$

пропорциональны волновому числу. Легко получить зависимость $\omega = \omega(q)$ при произвольных qd , поскольку уравнение (4) относительно ω является биквадратным (в отсутствие столкновений).

Из уравнения (4) следует:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\Omega_1^2}{2} \left\{ 1 + \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 - 2 \frac{\alpha + \beta + (1 + \alpha\beta) \text{th}(2qd)}{1 + \text{th}2(qd)}} \right\}. \quad (6)$$

Здесь мы для упрощения формул предположили: $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = \varepsilon_{03} = \varepsilon_0$; $\Omega_i^2 = \omega_{0i}^2 / \varepsilon_0$; $\Omega_2^2 = \alpha \Omega_1^2$; $\Omega_3^2 = \beta \Omega_1^2$; α и β – действительные числа, выражающие связь между концентрациями носителей заряда в различных средах. Примером системы, описываемой формулой (6), являются p - n -переходы при $y = \pm d$ (очевидно, что такое предположение не ограничивает общности полученных результатов).

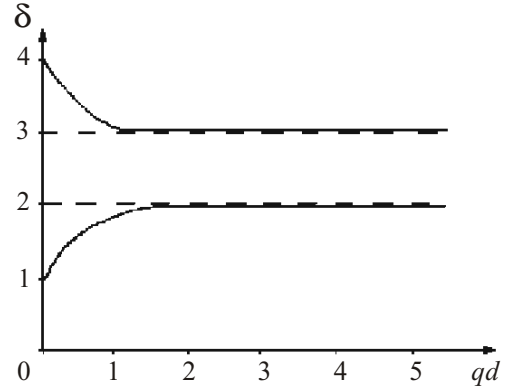


Рис. 1. Зависимость частоты от волнового числа для $\alpha = 3, \beta = 5$

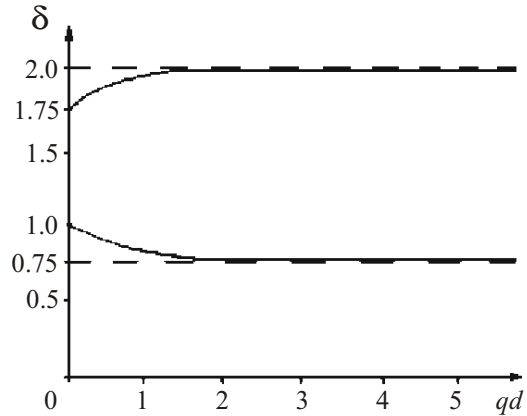


Рис. 2. Зависимость частоты от волнового числа для $\alpha = 3, \beta = 1/2$

На рис. 1, 2 представлен ход зависимостей $\delta = \delta(qd)$ для $\alpha = 3, \beta = 5$ и $\alpha = 3, \beta = 1/2$, где $\delta = \omega / \Omega_1$. Видно, что для произвольных соотношений между α и β существуют две ветви электрических волн. Одна из них имеет положительную групповую скорость ($d\omega/dq > 0$), вторая – отрицательную.

Интересно отметить одно обстоятельство, связанное с симметрией системы [1]. Если в выражении (4) положить $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$, то оно распадается на два независимых уравнения:

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \exp(-2qd). \quad (7)$$

Уравнение со знаком “+” описывает колебания с симметричным распределением тангенциальной составляющей поля в слое: $E_x(-d) = E_x(d)$, со знаком “-” – колебания с антисимметричным распределением $E_x(-d) = -E_x(d)$.

Далее, если среда “1” является диэлектриком с $\epsilon_1 = \epsilon_d$, а среда “2” – плазмой с $\epsilon_2 = \epsilon(\omega)$, где $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 - \omega_0^2/\omega^2$, то спектры симметричных и антисимметричных колебаний соответственно имеют следующий вид:

$$\omega_1(q) = \frac{\omega_0}{\sqrt{\epsilon_0 + \epsilon_d \operatorname{th}(qd)}}, \quad (8)$$

$$\omega_2(q) = \frac{\omega_0}{\sqrt{\epsilon_0 + \epsilon_d \operatorname{cth}(qd)}}. \quad (9)$$

В случае $\epsilon_1 = \epsilon(\omega)$ и $\epsilon_2 = \epsilon_d$, напротив, спектр симметричных колебаний описывается формулой (9), а антисимметричных – формулой (8).

Для структуры металл – диэлектрик – полупроводник, где $\epsilon_2 \rightarrow \infty$, $\epsilon_1 = \epsilon_d$, $\epsilon_3 = \epsilon(\omega)$, существует лишь одна ветвь с законом дисперсии:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\epsilon_0 + \epsilon_d \operatorname{cth}(2qd)}}.$$

2. Рассмотрим теперь взаимодействие потока заряженных частиц с электрическим полем в структуре.

Предположим, что поток частиц с плотностью n_0 и скоростью \vec{v}_0 движется в среде “1” ($\epsilon_1 = \epsilon_d$) вдоль оси x (в конечных формулах всегда можно положить $\epsilon_d = 1$). В этом

случае на границах $y = \pm d$ нормальная составляющая вектора индукции претерпевает разрыв, обусловленный возникновением поверхностных зарядов. Так, из уравнения Пуассона при $y = d$ следует, что граничное условие принимает вид:

$$\epsilon_d E_y(d+0) - D_y(d-0) = 4\pi e \int_{d-0}^{d+0} n dy. \quad (10)$$

Возмущенная концентрация n электронов пучка связана со скоростью \vec{v} уравнениями гидродинамики:

$$i(\omega - qv_0)n = iq n_0 v_x + \frac{\partial}{\partial y} [n_0(y)v_y], \quad (11)$$

$$(\omega - qv_0)\vec{v} = i \frac{e}{m} \vec{E}. \quad (12)$$

Воспользовавшись выражениями (11), (12), из формулы (10) находим после интегрирования по переходному слою:

$$\epsilon_d E_y(d+0) - D_y(d-0) = \frac{\omega_b^2}{(\omega - qv_0)^2} E_y(d+0),$$

где $\omega_b = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right)^{1/2}$ – плазменная частота электронов пучка.

Предположим далее, что $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon(\omega)$. Иными словами, в плазме твердого тела имеется щель, сквозь которую проходит поток заряженных частиц. В этом случае в дисперсионных соотношениях (7) необходимо заменить ϵ_1

на $\epsilon_d - \frac{\omega_b^2}{(\omega - qv_0)^2}$. В результате получим:

$$\left[\omega^2 - \omega_1^2(q)\right](\omega - qv_0)^2 = \frac{\omega_b^2 \omega^2}{\epsilon_0 \operatorname{cth}(qd) + \epsilon_d}, \quad (13)$$

$$\left[\omega^2 - \omega_2^2(q)\right](\omega - qv_0)^2 = \frac{\omega_b^2 \omega^2}{\epsilon_0 \operatorname{th}(qd) + \epsilon_d}. \quad (14)$$

Найдем решение уравнения (13), воспользовавшись приближением малой плотности пучка $\omega_b^2/\omega_0^2 \ll 1$.

Полагая $\omega_b = 0$, получим два независимых решения:

$$\omega = \omega_1(q),$$

$$\omega = qv_0.$$

Первое характеризует уже известные собственные колебания системы в отсутствие пучка (см. (8)), второе – колебания в пучке с малой плотностью. Учет конечной плотности электронов пучка приводит к изменению частот и возникновению неустойчивости (механизм Ахиезера и Файнберга [6]).

В условиях черенковского резонанса, когда частоты и волновые числа обеих ветвей совпадают, инкремент колебаний γ имеет максимальное значение:

$$\frac{\gamma}{\omega_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_b^2 \operatorname{th}(qd)}{2\omega_0^2} \right)^{1/3}. \quad (15)$$

Аналогичным образом находится относительный инкремент для антисимметричных колебаний с частотой $\omega = \omega_2(q)$ (см. (14)). Он отличается от формулы (15) заменой $\operatorname{th}(qd)$ на $\operatorname{ctg}(qd)$. При малых qd относительный инкремент для ветви $\omega_1(q)$ пропорционален

$(qd)^{1/3}$, а для ветви $\omega_2(q)$ он оказывается значительно большим и пропорциональным $(1/qd)^{1/3}$. Это связано с тем, что возмущенная плотность электронов в потоке локализована на границах (см. (11)), и поэтому взаимодействие волн пространственного заряда с антисимметричными плазмонами более эффективно.

3. Рассмотрим теперь взаимодействие плазменных колебаний с потоком частиц, пересекающих границы структуры, т. е. $\vec{v} = (0, v_0, 0)$. В этом случае вместо формул (10)-(12) необходимо воспользоваться следующей системой уравнений в каждой среде:

$$\epsilon(\omega) \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi en, \quad (16)$$

$$\left(i\omega - v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) n = n_0 \operatorname{div} \vec{v}, \quad (17)$$

$$\left(-i\omega + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{v} = \frac{e}{m} \vec{E}. \quad (18)$$

Для получения дисперсионных соотношений в этом случае необходимо, кроме электродинамических граничных условий при $y = \pm d$, сформулировать дополнительные граничные условия. В качестве таковых воспользуемся условиями равенства плотностей частиц и плотностей потока частиц на границах [7].

Как и в предыдущем случае, будем считать плотность пучка малой, и в отсутствие пучка имеем дисперсионное уравнение (4). Для получения декремента (инкремента) колебаний, обусловленного наличием пучка, введем медленную зависимость a_i амплитуды поля от времени. Предполагается, что падающий пучок является “гладким”, т. е. в среде “2” $n = 0$ и происходит лишь модуляция скорости частиц под действием поперечного поля ($\operatorname{div} \vec{E} = 0$). Из уравнения (18) при $\omega \gg qv_0$ находим:

$$v_{2y}(y) = \frac{e}{m\omega} a_2 e^{qy}.$$

В среде "1" решения уравнений (16)-(18) при условии $\text{rot}\vec{E} = 0$ имеют вид:

$$v_{1y}(y) = C_1 e^{i\frac{\omega}{v_0}y} + \frac{e}{m\omega} (a_1 e^{qy} - a_0 e^{-qy}),$$

$$n_1(y) = \left(B_1 - \frac{in_0 y \omega}{v_0^2} C_1 \right) e^{i\frac{\omega}{v_0}y},$$

$$E_{1y}^l = \frac{4\pi e v_0}{i\omega \epsilon_1} \left[B_1 + \frac{in_0 C_1}{v_0} \left(1 - i \frac{\omega}{v_0} y \right) \right] e^{i\frac{\omega}{v_0}y},$$

$$E_{1x}^l(y) = \frac{qv_0}{\omega} E_{1y}^l.$$

Видно, что в среде "1" возникают дополнительные волны (волны Ван-Кампена [8]). Они являются продольными ($\text{div}\vec{E}^l \neq 0$). Аналогично запишутся решения в среде "3", где B_1 , C_1 , ϵ_1 следует заменить на B_3 , C_3 , ϵ_3 . При этом имеем:

$$v_{3y}(y) = C_3 e^{i\frac{\omega}{v_0}y} - \frac{e}{m\omega} a_3 e^{-qy}.$$

Заметим, что при $y \rightarrow \infty$ выражение $ye^{i\frac{\omega}{v_0}y}$ должно быть конечным. При достаточном удалении от границы $y = d$ в среде "3" в уравнение (18) всегда можно ввести частоту столкновений электронов $\nu \ll \omega$, так что $\omega \rightarrow \omega + i\nu$. Разумеется, толщина слоя $2d$ должна быть меньше длины свободного пробега электрона v_0/ν .

Учет продольных полей приводит к необходимости уточнить выражения (3) для поперечных полей. Другими словами, для удовлетворения электродинамических граничных условий к полям (3) необходимо добавить следующие слагаемые:

$$E'_{2x}(y) = b_2 e^{qy},$$

$$E'_{1x}(y) = b_1 e^{qy} + b_0 e^{-qy}, \quad (19)$$

$$E'_{3x}(y) = b_3 e^{-qy}.$$

Они учитывают конечную плотность пучка.

Тогда граничные условия для тангенциальных составляющих с учетом продольных полей \vec{E}^l запишутся следующим образом:

$$E'_{2x}(y) = E'_{1x}(-d) + E_{1x}^l(-d), \quad (20)$$

$$E'_{1x}(d) + E_{1x}^l(d) = E'_{3x}(d) + E_{3x}^l(d).$$

Граничные условия для нормальных составляющих вектора индукции D'_y принимают вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 E'_{2y}(-d) + \frac{d\epsilon_2}{d\omega} \frac{da_2}{dt} e^{-qd} = \\ = \epsilon_1 E'_{1y}(-d) + \frac{d\epsilon_1}{d\omega} \left(\frac{da_1}{dt} e^{-qd} - \frac{da_0}{dt} e^{qd} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_3 E'_{23}(d) - \frac{d\epsilon_3}{d\omega} \frac{da_3}{dt} e^{-qd} = \\ = \epsilon_1 E'_{1y}(d) + \frac{d\epsilon_1}{d\omega} \left(\frac{da_1}{dt} e^{qd} - \frac{da_0}{dt} e^{-qd} \right), \end{aligned}$$

где $E'_y = \frac{1}{iq} \frac{\partial E'_x}{\partial y}$. Здесь учтено, что амплитуды

полей a_i медленно меняются со временем:

$\left| \frac{da_i}{dt} \right| \ll \omega |a_i|$. Продольные поля E_y^l не дают вклада в граничные условия (21), поскольку для них в каждой среде выполняется равенство:

$$\epsilon E_y^l(y) = \frac{4\pi e}{i\omega} [n_0 v_y(y) + v_0 n(y)].$$

Если принять во внимание дисперсионные уравнения (4), то из выражений (19)-(21) следует:

$$\begin{aligned} & (\epsilon_1 - \epsilon_3) \left[\frac{d\epsilon_2}{d\omega} \frac{da_2}{dt} e^{-2qd} - \frac{d\epsilon_1}{d\omega} \left(\frac{da_1}{dt} e^{-2qd} - \frac{da_0}{dt} \right) \right] + \\ & + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \left[\frac{d\epsilon_1}{d\omega} \left(\frac{da_1}{dt} e^{2qd} - \frac{da_0}{dt} \right) + \frac{d\epsilon_3}{d\omega} \frac{da_3}{dt} \right] = \\ & = i\epsilon_2 (\epsilon_1 - \epsilon_3) E_{1e}^l(-d) e^{-qd} + \\ & + i\epsilon_3 (\epsilon_1 + \epsilon_2) [E_{1x}^l(d) - E_{3x}^l(d)] e^{qd}. \end{aligned}$$

Видно, что изменение амплитуд a_i обусловлено возбуждением волн Ван-Кампена в средах "1" и "3".

Воспользовавшись далее гидродинамическими граничными условиями:

$$n_1(-d) = 0, \quad v_{2y}(-d) = v_{1y}(-d);$$

$$n_1(d) = n_3(d), \quad v_{1y}(d) = v_{3y}(d)$$

и соотношениями (5), можно выразить константы B_i и C_i через амплитуду поля a_0 . В результате получим уравнение, описывающее изменение амплитуды плазменных колебаний системы:

$$\frac{da_0}{dt} = \gamma a_0, \quad \gamma = \frac{\omega_b^2 q v_0 Q}{\omega^3 \epsilon_1 P} (\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3), \quad (22)$$

где

$$Q = \epsilon_2 \epsilon_3 - \epsilon_1^2 - (\epsilon_1 + \epsilon_2)(\epsilon_1 + \epsilon_3)(1 - i\omega\tau) \exp(i\omega\tau), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} P = & \epsilon_1 \left[(\epsilon_1^2 - \epsilon_3^2) \frac{d\epsilon_2}{d\omega} + (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \frac{d\epsilon_3}{d\omega} \right] + \\ & + (\epsilon_2 \epsilon_3 - \epsilon_1^2)(\epsilon_2 + \epsilon_3) \frac{d\epsilon_1}{d\omega}, \quad (24) \end{aligned}$$

$\tau = 2d/v_0$ – время пролета частицы через пластину.

Выражения (22)-(24) довольно громоздки для анализа, поэтому рассмотрим ряд наиболее интересных частных случаев.

Если $d \rightarrow 0$, то, как следует из дисперсионного уравнения (4), $\epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$, и мы получаем декремент колебаний:

$$\gamma = -\frac{2\omega_b^2 q v_0}{\omega^3} \left(\frac{d\epsilon_2}{d\omega} + \frac{d\epsilon_3}{d\omega} \right)^{-1}. \quad (25)$$

Аналогично получаем затухание при $d \rightarrow \infty$, если $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ или $\epsilon_1 + \epsilon_3 = 0$. При этом знаменатель в выражении (25) заменяется

$$\text{соответственно на } \frac{d\epsilon_1}{d\omega} + \frac{d\epsilon_2}{d\omega} \text{ или } \frac{d\epsilon_1}{d\omega} + \frac{d\epsilon_3}{d\omega}.$$

Таким образом, на границе двух плазменных сред или на границе плазма – диэлектрик ($d \rightarrow 0$ или $d \rightarrow \infty$) поверхностные плазмоны затухают в результате взаимодействия с потоком заряженных частиц. Это затухание обусловлено преобразованием на границе поверхностных колебаний в объемную волну Ван-Кампена.

Рассмотрим ситуацию с конечным d . Предположим, что пластина с $\epsilon_1 = \epsilon(\omega)$ окружена диэлектриками с $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_d$. Тогда для антисимметричных и симметричных колебаний, спектры которых описываются соответственно формулами (8) и (9), из выражения (22) следует:

$$\gamma_{1,2} = -\frac{\omega_b^2 q v_0}{4\omega_0^2 \text{sh}(qd) \text{ch}(qd)} \times \\ \times [\exp(2qd) \mp (1 - i\omega\tau) \exp(i\omega\tau)].$$

Видно, что изменение знака затухания можно ожидать лишь при условии $2qd \ll 1$. Если

$$\omega\tau = \frac{(2l+1)}{2}\pi, \text{ то } \gamma_{1,2} \text{ принимает вид:}$$

$$\gamma_{1,2} = -\frac{\omega_b^2}{2\omega_0^2 \tau} \left[1 + 2qd \mp (-1)^l (\omega\tau + i) \right],$$

$$l = 1, 2, 3 \dots$$

Для четных l и $\omega\tau > 1 + 2qd$ неустойчивыми оказываются антисимметричные колебания в пластине. Их инкремент равен $\text{Re } \gamma_1$, а симметричные колебания при этом затухают с декрементом $\text{Re } \gamma_2$. Если же $\omega\tau = l\pi$, то

$$\gamma_{1,2} = -\frac{\omega_b^2}{2\omega_0^2 \tau} \left[1 + 2qd \mp (1 - i\omega\tau)(-1)^l \right].$$

В этом случае для любых l симметричные и антисимметричные колебания являются затухающими. Их декременты различаются. При

$$\text{четных } l \text{ большим декрементом } \text{Re } \gamma_2 = -\frac{\omega_b^2}{\omega_0^2} \frac{1}{\tau}$$

обладают симметричные колебания; при нечетных l – антисимметричные.

Можно показать, что затухание или нарастание колебаний зависит от фазовых соотношений между полем плазмона и током $j_y = e(n_0 v_y + n v_0)$, создаваемым волной Ван-Кампена на границах $y = \mp d$. Действительно, на границе $y = -d$ плотность $n = 0$ и ток $j_{1y} = en_0 v_y$, обусловленный модуляцией скорости, находится в фазе с полем плазмона. Это всегда приводит к затуханию на уединенной границе $d = 0$ или $d = \infty$. При конечных d на второй границе в выражении

для j_y появляется дополнительное слагаемое $j_{2y} = en_0 (\cos \omega\tau + \omega\tau \sin \omega\tau) v_y$, обусловленное модуляцией плотности частиц. В зависимости от симметрии полей колебаний a_i ток j_{2y} прибавляется к току j_{1y} или вычитается из него. При этом знак j_{2y} в свою очередь зависит от соотношений между периодом колебаний $2\pi/\omega$ и временем пролета частицы через пластину τ . Видно, что усиление колебаний возможно только при $\omega\tau > 1$. В экспериментах по обнаружению описанных эффектов в качестве плазменного слоя можно использовать, например, тонкую металлическую пластину с отверстиями.

В структуре металл – диэлектрик – полупроводник ($\epsilon_2 = \infty$, $\epsilon_1 = \epsilon_d$, $\epsilon_3 = \epsilon$), γ имеет вид:

$$\gamma = -\gamma_0 \left[\text{cth}(2qd) - (\text{cth}(2qd) - 1) \times \right. \\ \left. \times (1 - i\omega\tau) \exp(i\omega\tau) \right],$$

где $\gamma_0 = \frac{\omega_b^2 q v_0}{2\omega_0^2} (1 + \text{cth}(2qd))$. Если $\omega\tau = l\pi$, то

колебания затухают с декрементом

$$\text{Re } \gamma = -\gamma_0 \left[\text{cth}(2qd) - (-1)^l (\text{cth}(2qd) - 1) \right].$$

Для $\omega\tau = \frac{(2l+1)}{2}\pi$ получим:

$$\text{Re } \gamma = -\gamma_0 \left[\text{cth}(2qd) - (-1)^l \omega\tau (\text{cth}(2qd) - 1) \right].$$

Колебания оказываются неустойчивыми при $\omega\tau > 1$, $\text{cth}(2qd) > 1$ для четных l . Инкремент достигает наибольшего значения при $2qd \ll 1$. При этом

$$\text{Re } \gamma = \frac{\omega_b^2}{4\omega_0^2} \frac{\omega}{qd}, \quad qd \gg \frac{\omega_b^2}{4\omega_0^2}.$$

Приведенные результаты, полученные на основе гидродинамики, описывают взаимодействие типа волна – волна, т. е. взаимодействие плазменных колебаний (волн) с волнами пространственного заряда в потоке частиц.

4. Остановимся теперь на взаимодействии типа волна – частица, когда поведение заряженных частиц в потоке описывается более детально (например, кинетическим уравнением). Мы рассмотрим этот механизм исходя из энергетического принципа, изложенного в работах [2, 9]. Он основывается на идее квантования энергии плазмонов и потока электронов и позволяет учесть две ситуации, когда энергия осциллятора $\hbar\omega_q$ больше и меньше температуры (или средней тепловой энергии) электронов пучка.

В этом случае изменение числа плазмонов N_q в состоянии с волновым вектором \vec{q} в результате их взаимодействия с электронами n_k в состоянии с волновым вектором \vec{k} описывается следующим кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial N_q}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} |W_{kqk'}|^2 \delta(E' - E - \hbar\omega_q) \times \\ \times \left[(N_q + 1) n_{k'} (1 - n_k) - N_q n_k (1 - n_{k'}) \right], \quad (26)$$

$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ – энергия электрона; δ -функция выражает собой закон сохранения энергии электронов и плазмонов; закон сохранения их импульсов $k'_x = k_x + q$, $k'_z = k_z$ выполняется лишь вдоль направлений x , z ; $|W_{kqk'}| = |W_{k'-qk}|$; $\omega_{-q} = \omega_q$. Здесь $W_{kqk'}$ – матричный элемент гамильтониана взаимодействия плазмонов и электронов,

$$W_{kqk'} = \frac{-e\hbar(\vec{k} + \vec{k}')}{2mcL|\varepsilon|^2} \left[\varepsilon^* (\bar{A}_2 e^{-\varepsilon d} + 2\bar{A}_1 \text{sh}(\varepsilon d)) + \right. \\ \left. + \varepsilon (\bar{A}_3 e^{-\varepsilon^* d} + 2\bar{A}_0 \text{sh}(\varepsilon^* d)) \right], \quad (27)$$

где $\varepsilon = |q| + i(k_y - k'_y)$, знак “*” означает ком-

плексное сопряжение; $\vec{A}_i = A_i \vec{e}_i$, орты поляризации $e_{0x} = e_{1x} = e_{2x} = e_{3x} = 1/\sqrt{2}$, $e_{1y} = e_{2y} = -i/\sqrt{2}$,

$e_{0y} = e_{3y} = i/\sqrt{2}$, $A_i = -i \frac{c}{\omega} a_i$ – амплитуды вектора-потенциала, связанные между собой соотношением (5). Амплитуда a_2 связана с энергией плазмона соотношением $\hbar\omega_q = \frac{SF}{4\pi q} |a_2|^2$,

$S = L_x L_z$ – площадь поперечного сечения, L – длина всей системы в направлении y ,

$$F = e^{-2qd} \frac{d}{d\omega} (\omega\varepsilon_2) + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \left(1 - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_1^2} \right) \times \\ \times \frac{d}{d\omega} (\omega\varepsilon_1) \text{sh}(2qd) + \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2} e^{-2qd} \frac{d}{d\omega} (\omega\varepsilon_3).$$

Первое слагаемое в квадратной скобке уравнения (26) описывает процессы индуцированного и спонтанного излучения плазмонов в результате переходов электронов из состояния “ k' ”, в состояние “ k ”, второе – процесс поглощения плазмонов при обратных переходах. Из формулы (26) при условии $N_q \gg 1$ можно получить декременты (или инкременты)

$$\text{плазменных колебаний } \gamma = \frac{1}{2N_q} \frac{dN_q}{dt}.$$

Пусть энергия частиц, проходящих через границы $y = \mp d$, распределена вокруг

некоторого значения $E_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ так, что ширина линии $\Delta E_0 \sim T$ мала. Тогда при $E_0 \gg T$ и $\hbar\omega_q \gg T$ можно положить $n_k = (2\pi)^3 n_0 \delta(k_x) \delta(k_0 - k_y) \delta(k_z)$. Уравнение (26) преобразуется к виду:

$$\gamma = \frac{n_0 LV}{2\hbar} \int dk_y |W_{kqk_0}|^2 \left[\delta(E - E_0 + \hbar\omega_q) - \right. \\ \left. - \delta(E - E_0 - \hbar\omega_q) \right], \quad (28)$$

где $V = SL$ – объём системы.

После интегрирования выражения (28) находим:

$$\gamma = \frac{n_0 m L V}{2 \hbar^3} \left[\frac{|W_-|^2 + |W'_-|^2}{k_-} - \frac{|W_+|^2 + |W'_+|^2}{k_+} \right],$$

где $k_{\pm} = \sqrt{k_0^2 - q^2 \pm 2m\omega_q / \hbar} > 0$ – волновые векторы электронов после поглощения (+) или излучения (–) плазмонов,

$$W_{\pm} = W_{k'qk} (k'_x = k'_z = 0, k'_y = k_0; k_x = q, k_y = k_{\pm}; k_z = 0), \quad (29)$$

$$W'_{\pm} = W_{\pm} (k_y = -k_{\pm}).$$

Член, содержащий W_- , описывает процесс рассеяния электронов “вперед”, а W'_- – “назад” относительно первоначального движения с излучением плазмонов при переходах “ k_0 ” → “ k_- ”. Слагаемые с W_+ , W'_+ есть результат электронных переходов из состояния “ k_0 ” в состояние “ k_+ ” с поглощением поверхностных плазмонов при рассеянии электронов “вперед” и “назад”. Если энергия электрона значительно превосходит энергию плазмона $k_0^2 \gg \frac{2m\omega}{\hbar}$, $k_0^2 \gg q^2$, то, как следует из выражения (29), $|W_{\pm}| \gg |W'_{\pm}|$, $|W_+| = |W_-| = W$.

При этом $\frac{1}{k_{\pm}} = \frac{1}{k_0} \left(1 \pm \frac{m\omega_q}{\hbar k_0^2} \right)$. Видно, что вероятность перехода электронов в состояние с меньшей энергией превосходит вероятность перехода в состояние с большей энергией. В первом случае она пропорциональна $1/k_-$, во втором – $1/k_+$.

В результате инкремент неустойчивости выражается через матричный элемент:

$$\gamma = \frac{n_0 L V \omega_q}{\hbar m v_0^3} |W|^2.$$

При $d \rightarrow 0$ получаются известные выражения для инкрементов [2, 9].

С точки зрения эксперимента наибольший интерес представляет структура металл – диэлектрик – полупроводник. В отличие от гидродинамики здесь поток может быть создан за счет автоэлектронной эмиссии при низких температурах.

В этом случае получаем:

$$|W|^2 = \frac{\pi e^2 \hbar v_0^4}{V L q d^2 \omega_0^2 \omega_q} \left(\sin^2 \frac{\omega \tau}{2} + q^2 d^2 \cos^2 \frac{\omega \tau}{2} \right),$$

$$\gamma = \frac{\omega_b^2}{2 \omega_0^2 \tau q d} \left(\sin^2 \frac{\omega \tau}{2} + q^2 d^2 \cos^2 \frac{\omega \tau}{2} \right).$$

Заметим, что колебания неустойчивы, если $\omega \tau$ больше или меньше единицы. Инкремент достигает наибольшего значения при $\omega \tau = (2l + 1)\pi$. Однако он оказывается в $2/\omega \tau$ раз меньше гидродинамического декремента при равных скоростях частиц. Это связано с тем, что в квантовом случае в процессе усиления участвует меньшее число частиц.

5. В заключение рассмотрим ситуацию, когда частицы движутся параллельно границе, но пучок является немонотонноэнергетическим: $E_0 \gg T \gg \hbar \omega_q$. Тогда можно положить:

$$n_k = (2\pi \hbar)^3 f(p_x) \delta(p_y) \delta(p_z),$$

$$\text{где } f(p_x) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi m v_T}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{p_x - p_0}{m v_T} \right)^2 \right],$$

$$v_T^2 = \frac{T}{m}. \text{ Учитывая малость энергии и импульса}$$

са ($\hbar q \ll p_x$) плазмона, можно представить

$$f(p'_x) \text{ как } f(p_x) + \hbar q \frac{\partial f(p_x)}{\partial p_x}.$$

Поскольку пучок занимает область $-d \leq y \leq d$, а электроны испытывают упругое (зеркальное) отражение от границ, то в выражении для матричного элемента (27) необходимо положить: $A_2 = A_3 = 0$, $L = d$, $k'_y = k_y$. Воспользовавшись затем дисперсионным соотношением (4) для $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon(\omega)$, $\epsilon_1 = \epsilon_d$, $2qd \ll 1$, находим:

$$|W|^2 = \frac{2\pi e^2 q \hbar \omega}{S \omega_0^2} \left(v_x^2 + \frac{\epsilon^2}{\epsilon_d^2} v_y^2 \right).$$

Переходя, наконец, в уравнении (26) от суммирования к интегрированию по волновым векторам \vec{k} , получим инкремент колебаний для обеих ветвей в виде:

$$\gamma = \frac{\pi}{\hbar} S d |W|^2 \left. \frac{\partial f}{\partial v_x} \right|_{v_x = \frac{\omega}{q}},$$

где матричный элемент берется в точке

$$v_x = \frac{\omega}{q}; \quad v_y = 0.$$

Для симметричных и антисимметричных колебаний соответственно получим:

$$\frac{\gamma_1}{\omega_1} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_b^2 d}{\epsilon_0 q v_T^3} (v_0 - v_{1\phi}) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{v_0 - v_{1\phi}}{v_T} \right)^2 \right],$$

$$\frac{\gamma_2}{\omega_2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_b^2 d^2}{\epsilon_d v_T^3} (v_0 - v_{2\phi}) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{v_0 - v_{2\phi}}{v_T} \right)^2 \right],$$

где $v_\phi = \omega/q$ – фазовая скорость плазмона.

Видно, что неустойчивость плазмонов возникает при условии $v_0 > v_\phi$ (эффект обращения затухания Ландау [10]). Сравнение относительных инкрементов показывает, что отношение первого ко второму при $\epsilon_d = 1$ равно $1/(\epsilon_0 q d)$ и, в зависимости от величины $\epsilon_0 q d$, может быть больше или меньше единицы. При $v_0 - v_\phi \gg v_T$ инкременты бесконечно малы. В этом случае, т. е. при малом тепловом разбросе скоростей, необходим гидродинамический подход для описания неустойчивости. Кинетическая неустойчивость проявляется при $v_0 - v_\phi \ll v_T$.

Таким образом, представленные результаты показывают, что максимальным инкрементом неустойчивости обладают антисимметричные колебания при взаимодействии с моноэнергетическим потоком заряженных частиц, движущихся параллельно границам щели в плазме твердого тела в условиях черенковского резонанса.

Неустойчивости при пересечении границ проводящей пластины моноэнергетическим потоком возникают в зависимости от соотношений между временем пролета частицы через пластину и периодом колебаний. При этом исследованы две ситуации: ширина уровня энергии движущегося электрона больше и меньше энергии плазмона $\hbar\omega$. В первом случае используется гидродинамическое приближение, во втором – приближение, основанное на принципе квантования энергии системы и кинетическом уравнении для плазмонов. Показано, что в первом случае колебания нарастают быстрее.

Однако на уединенной границе или в тонкой пластине, $\omega\tau < 1$, неустойчивость возникает только в условиях малости ширины уровня энергии по сравнению с энергией плазмона. При этом инкременты могут быть найдены только при квантовомеханическом описании взаимодействия колебаний с потоком частиц.

Литература

1. Н. Л. Дмитрук, В. Г. Литовченко, В. Л. Стрижевский. Поверхностные поляритоны в полупроводниках и диэлектриках. Киев, Наукова думка, 1989, 376 с.
2. Н. Н. Белецкий, В. М. Светличный, Д. Д. Халамейда, В. М. Яковенко. Электромагнитные явления СВЧ диапазона в неоднородных полупроводниковых структурах. Киев, Наукова думка, 1991, 216 с.
3. F. G. Bass, A. A. Bulgakov. Kinetic and Electromagnetic Phenomena in Classical and Quantum Semiconductor Superlattices. Nova Science Publishers, JNC, New York, 1997, pp. 482.
4. В. М. Яковенко, И. В. Яковенко. Изв. вузов. Радиофизика. 1998, **41**, №6, с. 735-746.
5. В. М. Яковенко, И. В. Яковенко. Док. НАН Украины. 2000, №1, с. 70-74.
6. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг. ДАН СССР. 1949, **69**, №4, с. 555-556.
7. Н. Н. Белецкий, А. А. Булгаков, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко. Плазменные неустойчивости и нелинейные явления в полупроводниках. Киев, Наукова думка, 1984, 292 с.
8. Б. Б. Кадомцев. Коллективные явления в плазме. Москва, Наука, 1976, 280 с.
9. В. М. Яковенко, И. В. Яковенко. УФЖ. 1984, **29**, №12, с. 1830-1836.
10. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов. Электродинамика плазмы. Москва, Наука, 1974, 720 с.

Electrostatic Oscillations in Plasma-Like Structures with Flows of Charged Particles

V. M. Yakovenko, I. V. Yakovenko

The paper deals with the investigation of dispersion characteristics of the electrical oscillations in the system consisting of a plasma layer (dielectric) surrounded by the media with different electromagnetic properties.

The interaction mechanisms of the oscillations with the flows of charged particles passing parallel or perpendicular to the media interfaces are examined.

The instability conditions are formulated and the increments are found.