

## **Новый подход в математическом моделировании спектральных характеристик волновода с периодической многоступенчатой прямоугольной гребенкой**

Ю. В. Гандель, В. В. Камышан, О. П. Камышан

*Харьковский Национальный университет им. В. Н. Каразина,  
Украина, 61007, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

*Статья поступила в редакцию 23 октября 2000 г.*

В строгой постановке рассмотрена спектральная задача для прямоугольного волновода с замедляющей системой в виде произвольной прямоугольной гребенки для монохроматических продольно-электрических волн. Краевая задача для уравнений Максвелла сведена к системе сингулярных интегральных уравнений, решение которой проведено методом дискретных особенностей. Алгоритм реализован в виде программы с удобным интерфейсом, работающей в среде Windows 9x/NT. Проведено сравнение с результатами, полученными другими методами. Показана высокая эффективность реализованного метода расчета и возможность вычисления точек дисперсионных кривых и полей собственных волн с точностью до  $10^{-6}$  и выше. Изучено влияние точности изготовления на свойства замедляющей системы.

Розглянуто спектральну задачу для прямокутного хвилеводу з уповільнюючою системою у вигляді довільної прямокутної гребінки для монохроматичних поперечно-електричних хвиль у строгій фізичній постановці. Гранична задача для рівнянь Максвелла зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь, рішення якої проведено методом дискретних особливостей. Алгоритм реалізовано у вигляді програми зі зручним інтерфейсом, яка потребує для свого використання середовище Windows 9x/NT. Проведено порівняння з результатами, одержаними іншими методами. Показано високу ефективність реалізованого методу та можливість обчислення точок дисперсійних кривих та полів власних хвиль з точністю до  $10^{-6}$  та вище. Вивчено вплив точності виготовлення на властивості уповільнюючої системи.

Спектральная задача для периодических замедляющих систем гребенчатого типа в волноводах интенсивно исследовалась в семидесятые годы различными методами [1-3]. В последние годы интерес к этой тематике возобновился и появился ряд работ [4, 5 и др.], в которых приближенное решение строится на стадии формулировки задачи. В настоящей работе предлагается новый подход: точная формулировка проблемы как краевой задачи для уравнений Максвелла сведена к системе интегральных уравнений первого рода с логарифмическим ядром. За-

менив эту систему эквивалентной ей системой сингулярных интегральных уравнений (ССИУ) первого рода с дополнительными условиями, получаем систему уравнений для функции, через которую точно выражаются все искомые амплитуды пространственных гармоник и электромагнитных полей. ССИУ получена аналитическими методами, и на стадии ее получения все преобразования выполняются строго. Использование метода дискретных особенностей [6] сводит задачу отыскания спектральных характеристик к решению трансцендентного уравнения, которое

получается посредством приравнивания нулю определителя однородной СЛАУ.

Таким образом, в работе предложен численно-аналитический метод решения спектральных задач для волноводных замедляющих систем с резонаторами прямоугольной формы, который обладает высокой эффективностью и точностью при исследовании характеристик широкого класса электродинамических систем.

Использованный в работе подход не накладывает ограничений на размеры резонаторов и их количество на периоде замедляющей системы, что позволяет исследовать так называемые многоступенчатые замедляющие системы с несколькими резонаторами на периоде. Как известно [1], такие системы обладают преимуществами по сравнению с одноступенчатыми как по широкополосности, так и по сопротивлению связи.

### 1. Постановка задачи: математическая модель

Спектральную задачу для прямоугольного волновода с шириной стенки  $a$  вдоль оси  $OY$  и с замедляющей системой гребенчатого типа будем решать в два этапа. На первом – выразим характеристики исходной трехмерной электродинамической системы (ЭС) через характеристики эквивалентной двумерной ЭС (рис. 1), поперечное сечение которой плоскостью  $XOY$  однородно вдоль оси  $OY$  (поля не зависят от координаты  $y$ ) и совпадает с аналогичным сечением прямоугольного волновода.

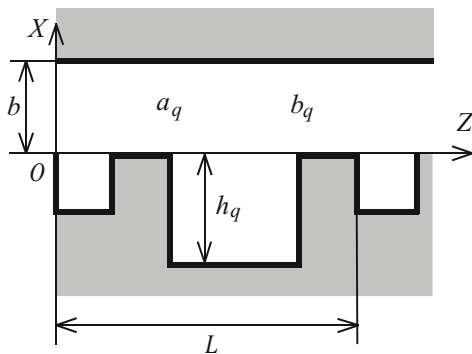


Рис. 1. Продольное сечение одного периода ЭС

На втором – получим решение двумерной задачи предлагаемым в работе методом.

Рассмотрим периодическую двумерную замедляющую ЭС гребенчатого типа с периодом  $L$ , ограниченную идеально проводящими стенками, сечение которой однородно вдоль оси  $OY$  (рис. 1). Гребенка ЭС имеет на периоде  $Q \geq 1$  взаимно не перекрывающихся резонаторов произвольных размеров, каждый из которых описывается тройкой параметров  $\{a_q, b_q, h_q\}_{q=1}^Q$ , удовлетворяющих следующим ограничениям:

$$0 = a_1 < b_1 < \dots < a_Q < b_Q < L; \quad h_q > 0; \quad q = \overline{1, Q}.$$

Пространство над гребенкой ( $0 < x < b$ ) называют пространством взаимодействия [1]. Резонаторная система называется  $Q$ -ступенчатой, если на ее периоде содержится  $Q$  резонаторов. Если резонаторные полости размещены эквидистантно и отличаются между собой по глубине, то пространство взаимодействия называется одноступенчатым. В противном случае пространство взаимодействия также является многоступенчатым.

Для упрощения выражений, которые будут следовать ниже в тексте, обозначим через  $E_\alpha$ ,  $\alpha = \{x, y, z\}$ , комплексные амплитуды компонент истинного электрического поля, домноженные на константу  $\epsilon c$ , где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость вакуума,  $c$  – скорость света. Зависимость от времени –  $e^{-i\omega t}$ .

Электрическое поле продольных собственных волн  $LE_n$  должно удовлетворять уравнению Гельмгольца  $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2 + k^2)\vec{E} = 0$ , компоненты которого можно записать в виде:

$$E_x = f(x, z, k); \quad E_y = 0; \quad E_z = g(x, z, k).$$

Функции  $f$  и  $g$  должны удовлетворять уравнениям Максвелла, граничному условию  $E_\tau = 0$  на металлических поверхностях и зависеть как от координат  $x, z$ , так и от параметра  $k$  – волнового вектора. Единственную нену-

левую компоненту магнитного поля, используя уравнения Максвелла, выражаем через  $f$  и  $g$ :

$$H_y = (\partial f / \partial z - \partial g / \partial x) / ik.$$

Следуя [7, п. 1.4], комплексные амплитуды электрического поля  $LE_{mn}$ -волн прямоугольного волновода выразим через функции  $f$  и  $g$ , а компоненты магнитного поля найдем из уравнений Максвелла:

$$E_x = \sin(k_{ym}y)f(x, z, k');$$

$$H_x = \frac{k_{ym}}{ik} \cos(k_{ym}y)g(x, z, k');$$

$$E_y = 0; \quad H_y = \frac{1}{ik} \sin(k_{ym}y) \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x} \right);$$

$$E_z = \sin(k_{ym}y)g(x, z, k');$$

$$H_z = -\frac{k_{ym}}{ik} \cos(k_{ym}y)f(x, z, k');$$

где  $k_{ym} = \pi m / a$ ,  $k$  – волновой вектор. Функции  $f(x, z, k')$  и  $g(x, z, k')$  являются решениями уравнения Гельмгольца

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k'^2 \right) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 0$$

для двумерной ЭС, а  $k'$  определяется через волновой вектор следующим образом:

$$k'^2 = k^2 - k_{ym}^2, \quad (1)$$

т. е.  $f$  и  $g$  являются компонентами электрического поля собственных  $LE_n$ -волн двумерной ЭС.

Сомножители в виде тригонометрических функций в компонентах электрического поля обеспечивают удовлетворение граничных условий на поверхностях, параллельных плоскости  $XOZ$ .

Поскольку тангенциальная составляющая электрического поля на идеально проводящих стенках ЭС равна нулю, компоненты электрического поля двумерной задачи должны удовлетворять соотношениям:

$$E_x(x, a_q) = E_x(x, b_q) = 0, \quad -h_q \leq x < 0, \quad q = \overline{1, Q},$$

$$E_z(b, z) = 0, \quad z \in [0, L]; \quad (2)$$

$$E_z(0, z) = 0, \quad z \in [0, L] \setminus C_L;$$

где  $C_L = \bigcup_{q=1}^Q [a_q, b_q]$ .

Кроме того, должны выполняться условия Майкснера на ребрах

$$\int_D \left( |\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2 \right) d\sigma < \infty,$$

где  $D$  – любая ограниченная область внутри сечения ЭС плоскостью  $XOZ$ .

## 2. Представление компонент электромагнитного поля в пространстве взаимодействия

Для двумерной задачи ограничимся так называемым “критическим” случаем, когда волна распространяется вдоль оси  $OZ$  и волновое число вдоль оси  $OY$  равно нулю. В соответствии с теоремой Флоке частное решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k^2 H_y = 0 \quad (3)$$

для волн, распространяющихся параллельно оси  $OZ$ , ищем в виде нормальных волн [1]

$$H_y(x, z) = H_{y0}(x, z)e^{ik_{z0}z}, \quad (4)$$

где функция  $H_{y0}$  периодична с периодом  $L$  по координате  $z$ , а  $k_{z0}$  – набег фазы на периоде ЭС. Учитывая (4) и граничные условия (2) на стенке волновода при  $x = b$ , решение (3) представим в виде:

$$H_y(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\text{ch}(\gamma_n(b-x))}{\text{sh}(\gamma_n b)} e^{ik_{zn}z}, \quad (5)$$

где  $k_{zn} = k_{z0} + k_L n$ ;  $\gamma_n^2 = k_{zn}^2 - k^2$ ;  $k_L = 2\pi/L$ ,  $k_{zn}$  – волновое число  $n$ -й пространственной гармоники,  $k_{z0}$  – волновое число нулевой пространственной гармоники и  $c_n$  – подлежащие определению коэффициенты.

Компоненты электрического поля, используя (5), находим из уравнений Максвелла:

$$E_z(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n \frac{\text{sh}(\gamma_n(b-x))}{\text{sh}(\gamma_n b)} e^{ik_{zn}z}, \quad (6)$$

$$E_x(x, z) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n \frac{k_n \text{ch}(\gamma_n(b-x))}{\text{sh}(\gamma_n b)} e^{ik_{zn}z},$$

где введено обозначение

$$\tilde{c}_n = -\frac{i}{k} \gamma_n c_n. \quad (7)$$

### 3. Представление компонент электромагнитного поля в резонаторе

Учитывая граничные условия (2) на стенках резонаторов ( $z = a_q, z = b_q, x = -h_q$ ), бу-

дем искать решение (3) в резонаторе с номером  $q$  в виде

$$H_{yq}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(q)} \frac{\text{ch}(\gamma_n^{(q)}(x+h))}{\text{sh}(\gamma_n^{(q)}h)} \cos k_n^{(q)}(z-a_q); \quad (8)$$

$$z \in (a_q, b_q), \quad x \in [0, -h],$$

где  $(\gamma_n^{(q)})^2 = (k_n^{(q)})^2 - k^2, \quad k_n^{(q)} = \frac{\pi}{L_q} n,$

$L_q = b_q - a_q, \quad q = \overline{1, Q}$ ; а  $c_n^{(q)}$  – подлежащие определению коэффициенты.

Компоненты электрического поля в резонаторе, используя (8), находим из уравнений Максвелла:

$$E_{zq}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n^{(q)} \frac{\text{sh}(\gamma_n^{(q)}(x+h))}{\text{sh}(\gamma_n^{(q)}h)} \cos k_n^{(q)}(z-a_q), \quad (9)$$

$$E_{xq}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n^{(q)} \frac{k_n^{(q)} \text{ch}(\gamma_n^{(q)}(x+h))}{\gamma_n^{(q)} \text{sh}(\gamma_n^{(q)}h)} \sin k_n^{(q)}(z-a_q),$$

где введено обозначение

$$\tilde{c}_n^{(q)} = \frac{i}{k} \gamma_n^{(q)} c_n^{(q)}. \quad (10)$$

### 4. Система сингулярных интегральных уравнений

Действуя так же, как в работах [8, 9], введем в рассмотрение неизвестную функцию  $F(z)$ , равную компоненте  $E_z$  в пространстве взаимодействия (6) при  $x = 0$  ( $z \in [0, L]$ ),

$$F(z) = E_z(x, z)|_{x=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{ik_n z} = e^{ik_{z0} z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{ik_n z}, \quad (11)$$

через которую выражаются искомые коэффициенты разложения полей в пространстве взаимодействия

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{L} \int_0^L e^{-ik_n \zeta} [e^{-ik_{z0} \zeta} F(\zeta)] d\zeta = \frac{1}{L} \int_0^L F(\zeta) e^{-ik_{z0} \zeta} d\zeta.$$

В силу граничных условий (2) при  $x = 0$ ,  $F(z) = 0$  при  $z \in [0, L] \setminus C_L$  окончательно имеем

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{L} \sum_{q=1}^Q \int_{a_q}^{b_q} F(\zeta) e^{-ik_n \zeta} d\zeta, \quad n \in Z.$$

Используя (5), (7), выразим компоненту  $H_y$  при  $x = 0$  через введенную в (11) функцию  $F(z)$ :

$$H_y(0, z) = ik \sum_{q=1}^Q \int_{a_q}^{b_q} G(z, \zeta) F(\zeta) d\zeta, \quad z \in C_L, \quad (12)$$

где

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \text{cth}(\gamma_n b) e^{ik_n(z-\zeta)}, \quad z, \zeta \in C_L. \quad (13)$$

Введем также новые неизвестные функции  $F_q(z)$ , которые при  $a_q < z < b_q$ ,  $q = \overline{1, Q}$  связаны с компонентой  $E_{zq}$  (9) следующим образом:

$$F_q(z) = E_{zq}(x, z)|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n^{(q)} \cos k_n^{(q)}(z - a_q),$$

и через которые выражаются искомые коэффициенты разложений полей в резонаторах:

$$\tilde{c}_n^{(q)} = \begin{cases} \frac{1}{L} \int_{a_q}^{b_q} F_q(\zeta) d\zeta, & n = 0; \\ \frac{2}{L} \int_{a_q}^{b_q} F_q(\zeta) \cos k_n^{(q)}(\zeta - a_q) d\zeta, & n > 0. \end{cases}$$

Используя (8) и (10), запишем компоненту  $H_{yq}$  в  $q$ -том резонаторе при  $x = 0$  через введенную функцию  $F_q$ :

$$H_{yq}(0, z) = -ik \int_{a_q}^{b_q} G_q(z, \zeta) F(\zeta) d\zeta, \quad (14)$$

$$z \in (a_q, b_q), \quad q = \overline{1, Q},$$

где

$$G_q(z, q) = -\frac{1}{kL_q} \text{ctg}(kh_q) + \frac{2}{L_q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^{(q)}} \text{cth}(\gamma_n^{(q)} h_q) \times \cos k_n^{(q)}(z - a_q) \cos k_n^{(q)}(\zeta - a_q). \quad (15)$$

В силу непрерывности тангенциальной составляющей поля в раскрыве резонатора имеем

$$F(z) = F_q(z), \quad z \in [a_q, b_q], \quad q = \overline{1, Q}.$$

Приравнявая выражения для компоненты  $H_y$  в пространстве взаимодействия (12) и в

каждом резонаторе (14) на их общей границе получим систему интегральных уравнений

$$\sum_{q=1}^Q \int_{a_q}^{b_q} G_{pq}(z, \zeta) F(\zeta) d\zeta = 0, \quad (16)$$

$$z \in (a_p, b_p), \quad p = \overline{1, Q},$$

где введено обозначение

$$G_{pq}(z, \zeta) = G(z, \zeta) + \delta_{pq} G_p(z, \zeta), \quad (17)$$

$$z \in [a_q, b_q], \quad \zeta \in (a_q, b_q).$$

Здесь  $\delta_{pq}$  – символ Кронекера.

Введем следующие обозначения:

$$M(z, \zeta) = \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial z},$$

$$M_q(z, \zeta) = \frac{\partial G_p(z, \zeta)}{\partial z}, \quad (18)$$

$$M_{pq}(z, \zeta) = \frac{\partial G_{pq}(z, \zeta)}{\partial z}.$$

Система интегральных уравнений (16) эквивалентна ССИУ, полученной из (16) дифференцированием по  $z$  с дополнительным условием, которое приведено ниже. После дифференцирования (16) по  $z$  получим ССИУ в следующем виде:

$$\sum_{q=1}^Q \int_{a_q}^{b_q} M_{pq}(z, \zeta) F(\zeta) d\zeta = 0, \quad (19)$$

$$z \in (a_p, b_p), \quad p = \overline{1, Q},$$

где, как следует из (17) и (18),

$$M_{pq}(z, \zeta) = M(z, \zeta) + \delta_{pq} M_p(z, \zeta), \quad \zeta \in (a_q, b_q),$$

$$z \in (a_p, b_p)$$

и согласно (13) и (15)

$$M(z, \zeta) = \frac{1}{L} e^{ik_{z0}(z-\zeta)} \left\{ -\text{ctg} \frac{k_L(z-\zeta)}{2} + i \frac{k_{z0}}{\gamma_0} \text{cth}(\gamma_0 b) + \right.$$

$$\left. + i \sum' \left[ \frac{k_{zn}}{\gamma_n} \text{cth}(\gamma_n b) - \frac{|n|}{n} \right] e^{ik_L(z-\zeta)n} \right\},$$

$$z \in [a_p, b_p], \quad \zeta \in [a_q, b_q],$$

$$M_p(z, \zeta) = \frac{1}{2L_p} \left\{ \text{ctg} \frac{\pi}{2L_p} (z - \zeta) + \text{ctg} \frac{\pi}{2L_p} \times \right.$$

$$\left. \times (z + \zeta - 2a_p) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{k_n^{(p)}}{\gamma_n^{(p)}} \text{cth}(\gamma_n^{(p)} h_p) - 1 \right] \times \right.$$

$$\left. \times \sin k_n^{(p)} (z - a_p) \cos k_n^{(p)} (\zeta - a_p) \right\},$$

где через  $\sum'$  обозначена сумма по  $n = -\infty \dots \infty$ , исключая  $n = 0$ .

Система дополнительных условий получается интегрированием (16) по  $z$ :

$$\sum_{q=1}^Q \int_{a_q}^{b_q} K_{pq}(\zeta) F(\zeta) d\zeta = 0, \quad p = \overline{1, Q}, \quad (20)$$

где введено обозначение

$$K_{pq}(\zeta) = -\delta_{pq} \frac{1}{k} \text{ctg}(kh_p) -$$

$$- \frac{i}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{zn} \gamma_n} \text{cth}(\gamma_n b) \left[ e^{ik_{zn}(b_p-\zeta)} - e^{ik_{zn}(a_p-\zeta)} \right].$$

### 5. Система сингулярных интегральных уравнений на стандартном интервале (-1, 1)

Введем отображения

$$g_q : (-1, 1) \rightarrow (a_q, b_q) : t \mapsto z, \tau \mapsto \zeta,$$

где

$$z = g_q(t) = \frac{b_q - a_q}{2}t + \frac{b_q + a_q}{2}, \quad \zeta = g_q(\tau),$$

$$t \in [-1, 1], \quad \tau \in [-1, 1]$$

и, в соответствии с условием на ребре, вместо  $F(\zeta)$  введем новую неизвестную гладкую функцию  $v$ , определяемую на каждом из интервалов  $(a_q, b_q)$  по правилу

$$v(\zeta) = \frac{2\sqrt{(\zeta - a_q)(b_q - \zeta)}}{(b_q - a_q)} F(\zeta),$$

$$\zeta \in [a_q, b_q], \quad q = \overline{1, Q},$$

или

$$v(g_q(\tau)) = \sqrt{1 - \tau^2} F(g_q(\tau)),$$

$$\tau \in [-1, 1], \quad q = \overline{1, Q}.$$

После домножения системы уравнений (19) на 4, а системы дополнительных условий (20) на  $2k_L^2$  и очевидных преобразований получим ССИУ в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{q=1}^Q \int_{-1}^1 \tilde{M}_{pq}(g_p(\tau), g_q(t)) v(g_q(t)) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \\ \tau \in [-1, 1]; \\ \sum_{q=1}^Q \int_{-1}^1 \tilde{K}_{pq}(g_q(t)) v(g_q(t)) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \end{aligned} \right\} p = \overline{1, Q}, \quad (21)$$

где

$$\tilde{M}_{pq}(z, \zeta) = \tilde{M}(z, \zeta) + \delta_{pq} \tilde{M}_p(z, \zeta),$$

$$\tilde{M}(z, \zeta) = 2\bar{L}_q e^{ik_{z0}(z-\zeta)} \left[ -\operatorname{ctg} \frac{k_L(z-\zeta)}{2} + ir_0 \operatorname{cth}(\gamma_{0b}) + iS_K(k_L(z-\zeta)) \right],$$

$$\tilde{M}_p(z, \zeta) = -\frac{L_q}{L_p} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2L_p}(z-\zeta) + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2L_p}(z+\zeta-2a_p) + 4S_Q^{(p)}(z, \zeta) \right]$$

и

$$S_K(\varphi) = \sum' \left[ \frac{k_{zn}}{\gamma_n} \operatorname{cth}(\gamma_n b) - \frac{|n|}{n} \right] e^{i\varphi n},$$

$$\varphi = k_L(z-\zeta);$$

$$S_Q^{(p)}(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{k_n^{(p)}}{\gamma_n^{(p)}} \operatorname{cth}(\gamma_n^{(p)} h_p) - 1 \right] \times \sin k_n^{(p)}(z-a_p) \cos k_n^{(p)}(\zeta-a_p).$$

Введем обозначения:

$$\chi = \frac{k}{k_L} = \frac{L}{\lambda}, \quad \chi_z = \frac{k_{z0}}{k_L},$$

$$\tilde{z} = k_L z, \quad (22)$$

$$\tilde{z}_q = \frac{\pi}{\tilde{L}_q} (\tilde{z} - \tilde{a}_q), \quad \tilde{L}_q = k_L L_q.$$

Тогда ядра ССИУ примут следующий вид:

$$\tilde{M}(z, \zeta) = \frac{\tilde{L}_q}{\pi} e^{i\chi_z(\tilde{z}-\tilde{\zeta})} \left[ -\operatorname{ctg} \frac{\tilde{z}-\tilde{\zeta}}{2} + ir_0 \operatorname{cth}(\gamma_0 b) + iS_K(\tilde{z}-\tilde{\zeta}) \right],$$

$$\tilde{M}_p(z, \zeta) = -\frac{\tilde{L}_q}{\tilde{L}_p} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\tilde{z}_p - \tilde{\zeta}_p}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\tilde{z}_p + \tilde{\zeta}_p}{2} + 4S_Q^{(q)}(\tilde{z}_p, \tilde{\zeta}_p) \right],$$

где

$$S_K(\tilde{\varphi}) = \sum' \left[ r_n \operatorname{cth}(\gamma_n b) - \frac{|n|}{n} \right] e^{i\tilde{\varphi}n}, \quad (23)$$

$$\tilde{\varphi} = \tilde{z} - \tilde{\zeta};$$

$$S_Q^{(p)}(\tilde{z}, \tilde{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ s_n^{(p)} \operatorname{cth}(\gamma_n^{(p)} h_p) - 1 \right] \times \sin(\tilde{z}_p n) \cos(\tilde{\zeta}_p n); \quad (24)$$

$$r_n = \operatorname{sign}(\chi_z + n) \left[ 1 - \chi^2 / (\chi_z + n)^2 \right]^{-1/2};$$

$$s_n^{(p)} = \left[ 1 - (\tilde{L}_p \chi / \pi n)^2 \right]^{-1/2}.$$

В новых обозначениях ядра системы дополнительных условий будут иметь вид

$$\tilde{K}_{pq}(\zeta) = -\delta_{pq} \frac{\tilde{L}_q}{\chi} \operatorname{ctg}(\chi \tilde{h}_p) - i \frac{\tilde{L}_q}{2\pi} S_A^{(p)}(\zeta),$$

где

$$S_A^{(p)}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n \operatorname{cth}(\gamma_n b) \left[ e^{ik_{zn}(b_p - \zeta)} - e^{ik_{zn}(a_p - \zeta)} \right], \quad (25)$$

$$w_n = \left[ (\chi_z + n) |\chi_z + n| \left( 1 - \chi^2 / (\chi_z + n)^2 \right)^{1/2} \right]^{-1}.$$

### 6. Дискретная математическая модель ЭС

Дискретизация ССИУ с дополнительными условиями (21) производится по методу дискретных особенностей с использованием квадратурных формул интерполяционного типа для несобственных и сингулярных интегралов [6, 10].

Обозначим нули полиномов Чебышева первого рода  $T_n(t)$  через  $t_j^{(n)}$ :

$$t_j^{(n)} = \cos \left[ \frac{\pi}{2n} (2j-1) \right], \quad j = \overline{1, n};$$

нули полиномов Чебышева второго рода  $U_n(\tau)$  — через  $\tau_i^{(n)}$ :

$$\tau_i^{(n)} = \cos \left( \frac{\pi}{n} i \right), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Выбирая для замены интегралов в (21) квадратурные формулы с  $N_q$  узлами ( $q = \overline{1, Q}$ ), дискретный аналог ССИУ с дополнительными условиями можно записать в таком виде:



$$\left. \begin{aligned} \sum_{q=1}^Q \frac{\pi}{N_q} \sum_{j_q=1}^{N_q} \tilde{M}_{pq} \left( g_p \left( \tau_{N_p-i_p}^{(N_p)} \right), g_q \left( t_{N_q+1-j_q}^{(N_q)} \right) \right) v \left( g_q \left( t_{N_q+1-j_q}^{(N_q)} \right) \right) &= 0, \quad i_p = \overline{1, N_p - 1}; \\ \sum_{q=1}^Q \frac{\pi}{N_q} \sum_{j_q=1}^{N_q} \tilde{K}_{pq} \left( g_q \left( t_{N_q+1-j_q}^{(N_q)} \right) \right) v \left( g_q \left( t_{N_q+1-j_q}^{(N_q)} \right) \right) &= 0 \end{aligned} \right\} p = \overline{1, Q}.$$

Полученную однородную СЛАУ порядка  $N = \sum_{q=1}^Q N_q$  запишем в матричной форме

$$Av = 0, \tag{26}$$

где  $A = (a_{ij})$  с матричными элементами

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= \frac{\pi}{N_q} \tilde{M}_{pq} \left( g_p \left( \tau_{i_p}^{(N_p)} \right), g_q \left( t_{N_q+1-j_q}^{(N_q)} \right) \right), \quad i_p = \overline{1, N_p - 1}, \quad p = \overline{1, Q}; \\ a_{ij} &= \frac{\pi}{N_q} \tilde{K}_{pq} \left( g_q \left( t_{N_q+1-j_q}^{(N_q)} \right) \right), \quad i(p) = \sum_{r=1}^p N_r, \quad p = \overline{1, Q}; \\ v_j &= v \left( g_q \left( t_{N_q+1-j_q}^{(N_q)} \right) \right) \end{aligned} \right\} j_q = \overline{1, N_q}, \quad q = \overline{1, Q}.$$

Здесь использована следующая линейная нумерация узлов интегрирования ( $j = \overline{1, N}$ ) и уравнений ( $i = \overline{1, N}$ ):

$$j = j(j_q) = \sum_{r=1}^{q-1} N_r + j_q, \quad j_q = \overline{1, N_q}, \quad q = \overline{1, Q};$$

$$i = \left\{ \begin{aligned} i(i_p) &= \sum_{r=1}^{p-1} N_r + i_p, \quad i_p = \overline{1, N_p - 1}; \\ i(i_p) &= \sum_{r=1}^{p-1} N_r \end{aligned} \right\} p = \overline{1, Q}.$$

Элементы матрицы содержат достаточно медленно сходящиеся ряды (23)-(25) (члены убывают пропорционально  $n^{-2}$ ). Для ускорения сходимости рядов до порядка  $n^{-3}$  применялась стандартная методика [11].

Дисперсионные соотношения исследуемой ЭС  $\chi(\chi_z)$  находятся приравниванием детерминанта СЛАУ (26) нулю  $\det A(\chi, \chi_z) = 0$ , после чего определяются собственные векторы СЛАУ и далее поля собственных волн.

По построенной дискретной математической модели проведен численный эксперимент, результаты которого описаны в последующих разделах.

## 7. Результаты численного эксперимента

Описанный выше алгоритм реализован в виде программы (автоматизированного рабочего места исследователя), работающей в среде Windows 9x/NT, с удобным интерфейсом, который предлагает средства для ввода начальных данных, управления процессом расчета и анализа получаемых результатов. Программа сохраняет параметры исследуемых ЭС и полученные численные результаты в базе данных, позволяя накапливать и анализировать их. Структура программы допускает функциональное расширение как посредством добавления новых функций для обработки и анализа рассмотренной ЭС, так и путем добавления новых модулей для расчета ЭС с другой геометрией или с применением других методов и алгоритмов.

Проведено тщательное тестирование разработанной программы и сравнение с результатами, которые получены другими методами.

**Верификация алгоритма.** Проверка достоверности получаемых в результате расчета данных выполнялась двумя способами: сравнением с ранее опубликованными результатами расчета замедляющих систем с гребенкой и проверкой совпадения результатов расчетов с использованием разработанной программы для инвариантных ЭС.

Вследствие того, что публикуемые данные обычно приводятся в виде графиков, первый способ позволил убедиться в совпадении только первых двух-трех знаков мантиссы с известными экспериментальными и расчетными данными (выполнено сравнение дисперсионных кривых для одно- и двухступенчатых ЭС, с приведенными в работе [1]).

Второй способ позволил оценить потенциальные возможности реализованного алгоритма.

**Ошибки дискретизации ССИУ.** Погрешность замены ССИУ ее дискретным аналогом СЛАУ в основном определяется конечностью выбираемых значений порядка матрицы СЛАУ ( $N$ ) и количества учитываемых членов в рядах элементов матрицы ( $N_s$ ). Сходимость результатов расчета к некоторому пределу при уве-

личении  $N$  и  $N_s$  является необходимым условием достоверности получаемых результатов. Минимальные значения этих параметров, обеспечивающие требуемую точность, определяют эффективность алгоритма и его устойчивость к ошибкам округления.

Для выяснения скорости сходимости и определения поведения погрешности дискретизации использовались несколько ЭС. В качестве примера приведем результаты для ЭС со следующими нормированными на период параметрами:

$$\bar{b} = 1.5; \quad \bar{b}_1 = 0.5; \quad \bar{h} = 2.0 \quad (27)$$

(в дальнейшем эта ЭС будет упоминаться как ЭСА).

При вычислении корней дисперсионного уравнения в ЭСА при  $\chi_z = 0.2$  с точностью  $10^{-7}$  зависимость погрешности дискретизации (точности получаемого значения корня) от порядка матрицы ( $N = 2 \dots 20$ ) для первых четырех низших  $LE_n$ -волн приближенно выражалась следующей функцией:  $\delta(N) \approx 10^{-(20+N)/6}$ , причем погрешность вычисления корней для различных собственных волн отличалась менее чем на порядок. Для исключения погрешности дискретизации за счет ошибок вычисления значений рядов в элементах матрицы количество учитываемых членов выбиралось достаточно большим ( $N_s = 30$ ).

Аналогичные расчеты проводились для исследования зависимости погрешности дискретизации от количества членов в рядах элементов матрицы СЛАУ; в этом случае также наблюдается быстрое уменьшение погрешности при увеличении количества учитываемых членов ряда.

Общую формулу для вычисления значений  $N_m(\delta)$  и  $N_s(\delta)$ , обеспечивающих требуемую точность при произвольных параметрах ЭС, получить затруднительно, однако расчеты показали, что требуемое количество членов в рядах и порядок матрицы в основном зависят от количества резонаторов на периоде ЭС. Поэтому предварительное определение  $N_m(\delta)$  и  $N_s(\delta)$  на некотором "среднем" наборе параметров ЭС позволяет провести с ними вычис-

ления для достаточного широкого диапазона значений параметров без ухудшения точности результатов.

Прямое нахождение корней детерминанта сопряжено с определенными трудностями, поскольку даже при локализации корня в интервале длиной  $10^{-5} \div 10^{-8}$  при больших порядках матрицы СЛАУ модуль значения детерминанта на этом интервале может превышать  $10^5 \div 10^8$ . Для упрощения задачи использовался установленный посредством численного эксперимента факт, что при введенной нормировке исходной ССИУ значения детерминанта вещественны, несмотря на то, что элементы матрицы комплекснозначны (этот факт проверяется при каждом вычислении определителя матрицы). Поэтому вместо нахождения нуля детерминанта использовалась локализация с требуемой точностью интервала смены знака его вещественной части. При таком алгоритме поиска корней появляются ложные "корни", связанные с наличием у дисперсионной кривой особенностей типа вещественного полюса. Лишние корни отсеивались посредством исследования поведения детерминанта вблизи смены его знака.

**Тестирование периодичности и симметрии дисперсионных кривых.** Дисперсионные соотношения  $\chi(\chi_z)$  для ЭсА проверялись на следующих соотношениях периодичности и симметрии [1]:

$$\left. \begin{aligned} \chi(\chi_z) &= \chi(\chi_z + n) \\ \chi(\chi_z) &= \chi(n - \chi_z) \end{aligned} \right\} \chi_z > 0, \quad n \in N. \quad (28)$$

При выборе достаточно больших значений порядка квадратуры для дискретизации ССИУ и количества членов в рядах ядер эти соотношения удовлетворяются с точностью до погрешности вычисления корня определителя вплоть до значений  $\chi_z = 10$  (и более) для нескольких низших собственных волн. Погрешность дискретизации и погрешность определения корня при этих вычислениях была менее  $10^{-7}$ .

**Тестирование точности вычисления дисперсионных кривых и полей на эквивалентных ЭС.** Рассмотрим ЭС с одним резонатором на периоде  $L$  ( $b_1 - a_1 = L/2$ ) различными способами:

1) выбирая в качестве расчетного периода минимальный период ЭС,

2) выбирая в качестве расчетного периода двойной минимальный период ЭС.

В первом варианте ЭС имеет один резонатор на периоде  $L$  с нормированными параметрами:

$$\begin{aligned} \bar{b} &= b/L, & \bar{h} &= h/L, & \bar{a}_1 &= 0, \\ \bar{b}_1 &= b_1/L, & \bar{L}_1 &= L_1/L = 0.5. \end{aligned}$$

В дальнейшем эту электродинамическую систему будем обозначать через Эс1 и ее параметры отмечать индексом 1.

Во втором варианте ЭС имеет два идентичных резонатора на периоде  $2L$ , один из которых плоскопараллельным переносом смещен относительно другого на расстояние  $L$  вдоль оси  $z$ . Нормированные параметры этой ЭС следующие:

$$\begin{aligned} \bar{b}^{(2)} &= b/L^{(2)} = 0.5\bar{b}, & \bar{h}_1^{(2)} &= \bar{h}_2^{(2)} = h/L^{(2)} = 0.5\bar{h}, \\ \bar{a}_1^{(2)} &= 0, & \bar{a}_2^{(2)} &= L/L^{(2)} = 0.5, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\bar{b}_1^{(2)} = b_1/L^{(2)} = 0.5\bar{b}, \quad \bar{b}_2^{(2)} = \bar{a}_2^{(2)} + \bar{b}_1^{(2)} = 0.5 + 0.5\bar{b},$$

$$\bar{L}_1^{(2)} = 0.25, \quad \bar{L}_2^{(2)} = 0.25,$$

В дальнейшем эту электродинамическую систему будем обозначать через Эс2 и ее параметры отмечать индексом 2.

Пусть в ЭС распространяется волна, соответствующая точке дисперсионной кривой  $(k, k_{z0})$ , и поскольку Эс1 и Эс2 – фактичес-

ки одна и та же ЭС, то  $k = k^{(1)} = k^{(2)}$  и  $k_{z0} = k_{z0}^{(1)} = k_{z0}^{(2)}$ , так что набег фазы на периоде в системе Эс1 равен  $k_{z0}L$ , а в системе Эс2 –  $2k_{z0}L$ . Перейдем к нормированным волновым параметрам (22):

$$k_L k^{(1)} = k_L k^{(2)}, \quad \chi^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{L^{(2)}}{2\pi} k^{(2)} = \frac{1}{2} \chi^{(2)},$$

$$k_L k_{z0}^{(1)} = k_L k_{z0}^{(2)}, \quad \chi_z^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{L^{(2)}}{2\pi} k_{z0}^{(2)} = \frac{1}{2} \chi_z^{(2)}.$$

Из этих соотношений следует, что между точками нормированных дисперсионных кривых Эс1 и Эс2 существует следующая связь:

$$\chi^{(2)}(\chi_z^{(2)}) = 2\chi^{(1)}(2\chi_z^{(1)}). \quad (30)$$

Более того, если при расчете на раскрые каждого резонатора в квадратурной формуле выбрано одно и то же количество узлов, то нормированные (например, на максимальное по модулю значение) величины компонент собственных векторов в соответствующих точках должны совпадать.

Для проверки этих фактов наряду с ЭсА (Эс1), параметры которой были указаны выше (см. (27)), в соответствии с (29) выбрана эквивалентная ей ЭС – ЭсБ (Эс2) со следующими нормированными на период  $2L$  параметрами:

$$\bar{b}^{(2)} = 0.75, \quad \bar{a}_1^{(2)} = 0, \quad \bar{b}_1^{(2)} = 0.25, \quad \bar{h}_1^{(2)} = 1.0, \quad (31)$$

$$\bar{a}_2^{(2)} = 0, \quad \bar{b}_2^{(2)} = 0.25, \quad \bar{h}_2^{(2)} = 1.0.$$

Поскольку алгоритм расчета ЭС с одним и двумя резонаторами на периоде имеет существенные отличия, проверка изложенных выше фактов является достаточно надежным тестом на правильность алгоритма и функционирования программы.

Вычисления для ЭсА с 20 узлами на интервале  $[a_1, b_2]$  и с таким же количеством уз-

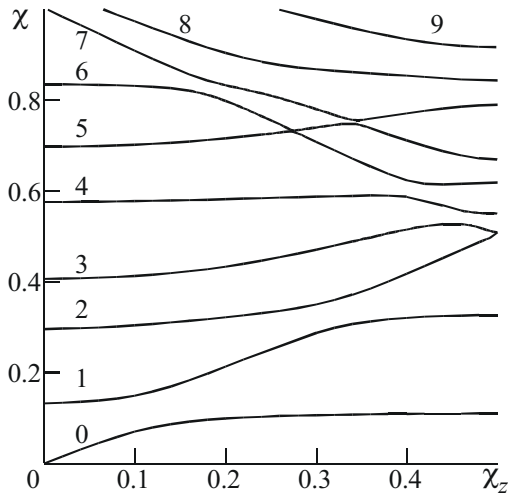
лов для ЭсБ на каждом из интервалов  $[a_q, b_q]$ ,  $q = 1, 2$ , показали, что координаты точек дисперсионных кривых удовлетворяют соотношению (30) с точностью вычисления корней (в данном примере  $10^{-6}$ ), а точность определения собственных векторов на порядок хуже. Следует отметить, что условие симметрии собственных векторов для каждой полости относительно ее центра выполняется с существенно более высокой точностью.

Аналогичная проверка была проведена для амплитуд пространственных гармоник в ЭсА и ЭсБ. С учетом того, что амплитуды нечетных гармоник ЭсБ равны нулю с точностью до погрешности определения корней дисперсионного уравнения [1], соответствующие коэффициенты разложений для ЭсА и ЭсБ совпадают с погрешностью определения собственных векторов (т. е.  $10^{-5}$ ).

Точность вычисления полей вне границы между пространством взаимодействия и резонаторами, за исключением узкой области, прилегающей к этой границе, соответствует точности вычисления собственных векторов однородной СЛАУ. Для нахождения с высокой точностью полей на самой границе (в точках, отличных от узлов квадратур) и вблизи нее (примерно на расстоянии  $10^{-3}b \div 10^{-2}b$ ) необходимо использовать интерполянты, поскольку прямое вычисление через коэффициенты разложения при разумных порядках СЛАУ не позволяет получить точность лучше  $10^{-2} \div 10^{-3}$  вследствие медленного убывания амплитуд пространственных гармоник при возрастании их номера.

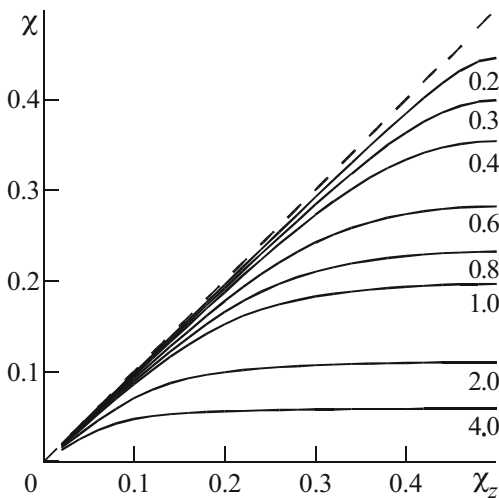
**Примеры результатов расчета.** В рамках данной работы проведен обширный численный анализ характеристик различных одно- и многоступенчатых замедляющих систем. Некоторые результаты приводятся ниже.

На рис. 2 показаны дисперсионные кривые первых девяти собственных  $LE_n$ -волн для ЭсА (27). Кривые приведены только для  $\chi \in [0, 0.5]$ , поскольку для остальных значений они получаются из соотношений симметрии и периодичности (28). Для прямоугольного волновода дисперсионные характеристики могут быть получены из приведен-



**Рис. 2.** Дисперсионные кривые собственных  $LE_n$ -волн ЭСА. Цифрами указан индекс волны  $n$

ных на рис. 2, используя соотношение (1). Зависимость дисперсионных характеристик от высоты резонатора для низшей собственной волны  $LE_0$  показана на рис. 3.

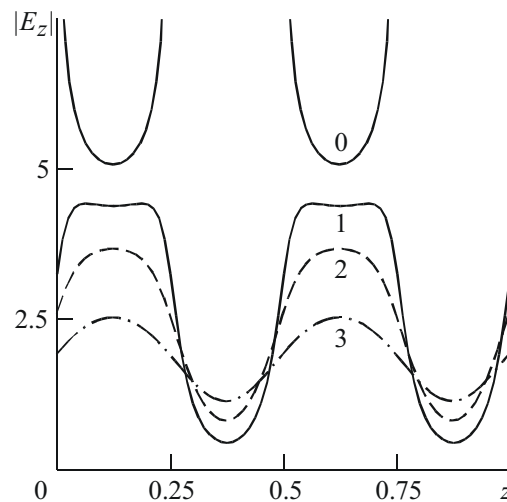


**Рис. 3.** Зависимость дисперсионных характеристик  $LE_0$  от глубины резонатора для ЭСА. Цифрами указана нормированная на период глубина резонатора

На рис. 4 приведен пример зависимости модуля компоненты  $E_z$  от  $z$  в пространстве

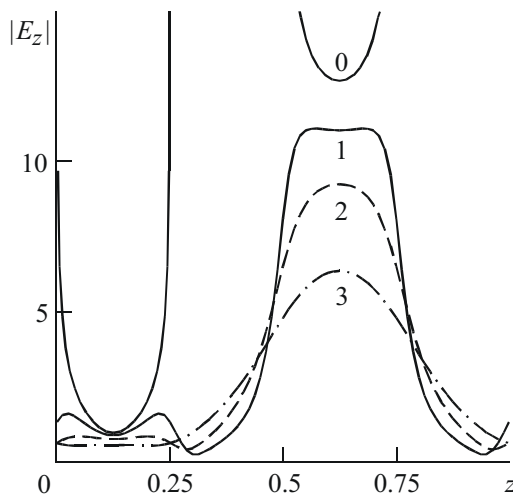
взаимодействия на одном периоде ЭСБ (31) для разных значений “прицельного” расстояния – расстояния от плоскости  $x = 0$ . Поскольку эта ЭС эквивалентна ЭСА и отличается от нее только расчетным периодом, это распределение также описывает поле и в ЭСА, но на двух ее периодах. На рис. 5 показана эта же зависимость, но для ЭС, которая отличается от ЭСБ высотой одного из резонаторов: высота первого резонатора уменьшена на 10 %. Видно, что малые изменения геометрии системы существенно влияют на распределение полей собственных волн. Для обоих рисунков использовалась нормировка на величину вектора Умова-Пойнтинга, так чтобы в обоих случаях значение этого вектора было одинаковым. Расчеты показывают, что изменение высоты резонатора всего на 1 % приводит к двукратному отличию максимальных амплитуд поля над резонаторами. Такая сильная зависимость поля ЭС наблюдается не для всех значений  $\chi_z$ . При меньших значениях  $\chi_z$  эта зависимость выражена слабее.

Аналогичные исследования замедляющих систем с большим количеством резонаторов на периоде, размеры которых варьируются в небольших пределах по случайному закону, позволяют выяснить влияние точно-



**Рис. 4.** Модуль распределения поля волны  $LE_0$  на периоде ЭС с параметрами (42) для  $h_1=1.0$ ,  $h_2=1.0$ ,  $\chi_z=0.48$ :  
0 –  $x/b = 0$ ; 1 –  $x/b = 0.05$ ; 2 –  $x/b = 0.1$ ; 3 –  $x/b = 0.2$

сти изготовления замедляющих систем на их характеристики. Как видно из рис. 4 и рис. 5, эти исследования имеют смысл, поскольку погрешности изготовления замедляющей системы могут существенно влиять на характер ее взаимодействия с пучком электронов. Разработанная нами программа позволяет рассчитывать ЭС с 50 и более резонаторами на периоде на современных персональных компьютерах.



**Рис. 5.** Модуль распределения поля волны  $LE_0$  на периоде ЭС с параметрами (42) для  $h_1 = 0.9$ ;  $h_2 = 1.0$ ;  $\chi_z = 0.48$ :  
 0 –  $x/b = 0$ ; 1 –  $x/b = 0.05$ ; 2 –  $x/b = 0.1$ ;  
 3 –  $x/b = 0.2$

### Заключение

Рассмотренный алгоритм позволяет с высокой точностью провести детальный анализ дисперсионных соотношений и полей основной и высших собственных волн многоступенчатых замедляющих систем типа гребенки в прямоугольных волноводах. Реализующая его программа обеспечивает высокую точность и скорость расчета. Предлагаемый метод может быть достаточно просто обобщен на случай более сложной геометрии замедляющих систем с резонаторами прямоугольной формы.

### Литература

1. Р. А. Силин, В. П. Сазонов. Замедляющие системы. Москва, Советское радио, 1966, 632 с.
2. А. И. Сова, В. В. Старостенко, А. Г. Шеин. Сб. Радиотехника. Харьков, изд. ХГУ, 1973, вып. 24, с. 113-118.
3. В. П. Мельников, В. П. Лоян, А. Г. Шеин. Сб. Радиотехника. Харьков, изд. ХГУ, 1973, вып. 25, с. 150-162.
4. L. J. Louis, J. E. Scharer, J. H. Booske. Phys. Plasmas. 1998, **5**, pp. 2797-2895.
5. Ioanis G. Tigelis, Marco Pedrozzi, P. G. Gottis, Jhon L. Vomorisdis. IEEE Ttrans. Microwave Theory Techn. 1997, **45**, pp. 236-244.
6. Ю. В. Гандель. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики: Вопросы кибернетики. Москва, изд. АН СССР, 1986, с. 166-183.
7. Л. Левин. Теория волноводов. Москва, Радио и связь, 1981, 311 с.
8. Ю. В. Гандель. Нелинейные краевые задачи мат. физики и их приложения. Киев, Ин-т математики НАН Украины, 1995, с. 65-66.
9. В. В. Камышан, О. П. Камышан. Труды IX Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ-2000)". Орел, Орловский госуниверситет, 2000, с. 246-249.
10. И. К. Лифанов. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. Москва, ТОО "Янус", 1995, 520 с.
11. А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях. Москва, ГИТТЛ, 1954, 400 с.

### New Approach in Mathematical Modeling the Spectral Characteristics of Waveguide with Periodic Multistage Lamellar Gratings

Yu. V. Gandel, V. V. Kamyshan,  
 O. P. Kamyshan

The spectral problem for the rectangular waveguide with the slowdown system in a form of rectangular lamellar grating in application to the monochromatic longitudinal-electrical waves was considered in rigorous manner. The boundary problem for the Maxwell equations was reduced to the system of singular integral equations which was discretized by the discrete sin-

gularities method. The algorithm was implemented as the program with the convenient interface, which operated in the Windows 9x/NT environment. The comparison with the results obtained by other methods was carried out. The high efficiency of the proposed computational method

and possibility of calculation of the dispersion relations and fields of the eigenwaves with the accuracy up to  $10^{-6}$  and more is shown. The possibility of studying the influence of accuracy of manufacturing the slowdown system on its properties is shown.