

Осесимметричное поле радиального электрического диполя над полубесконечным конусом с усеченной вершиной.

I. Сопоставление метода рядов и метода интегральных преобразований

Д. Б. Куриляк

*Физико-механический институт НАН Украины,
Украина, 79601, Львов, ул. Наукова, 5
e-mail: kuryliak@ipm.lviv.ua*

Статья поступила в редакцию 16 декабря 1999 г., после переработки 7 апреля 2000 г.

Развивается подход к строгому электродинамическому анализу конических структур, аналогичный используемому при исследовании дифракции волн на разветвлении плоских волноводов, сущность которого заключается в применении матричных операторов типа свертки и соответствующих обратных операторов для регуляризации исходных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) методом "полуобращения". Обосновывается процедура вывода БСЛАУ с применением метода собственных функций и метода интегральных преобразований Конторовича-Лебедева, доказываются эквивалентность этих подходов. Показано, что решение полученных БСЛАУ обеспечивает выполнение необходимых условий для компонент поля, включая и условие Мейкснера на краю конуса.

Розвивається підхід до електродинамічного аналізу конічних структур, аналогічний тому, що використовувався при дослідженні дифракції хвиль на розгалуженні плоских хвилеводів, суть якого полягає в застосуванні матричних операторів типу згортки та відповідних обернених операторів для регуляризації вихідних безмежних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (БСЛАУ) методом "напівобертання". Обґрунтовується процедура виведення БСЛАУ з застосуванням методу власних функцій і методу інтегральних перетворень Конторовича-Лебедева, також доводиться еквівалентність цих підходів. Показано, що рішення отриманих БСЛАУ забезпечують виконання необхідних умов для компонент поля, включаючи умову Мейкснера на краю конуса.

Введение

Одной из важных проблем современной радиофизики является изучение дифракции волн, излучаемых локальными источниками при наличии металлических поверхностей с отверстиями. Задача дифракции на полубесконечном конусе с усеченной вершиной представляет интерес для выяснения особенностей работы антенных устройств над отверстиями в поверхностях переменной кривизны, а также непосредственно связана с изучением вопросов проникновения полей в расширяющиеся волноводные области. Учитывая важность рассматриваемой задачи для технической физики, в данной работе поставлена цель получения ее решения строгими методами и выяснения на этой основе физических особенностей соответствующих процессов дифракции. Для этого производится и обосновывается процедура вывода систем уравнений, а также развивается метод "полуобращения" для их регуляризации [1,2]. Вопросы, связанные с численным моделированием волновых процессов, которые обусловлены рассеянием волн рассматриваемой структурой, вынесены в отдельную статью.

Метод рядов

Пусть в сферической системе координат (r, θ, φ) задана идеально проводящая полубесконечная коническая поверхность с усеченной вершиной:

$$Q = \{r \in [c, \infty), \theta = \gamma, \varphi \in [0, 2\pi]\}, \quad (1)$$

облучаемая радиальным электрическим диполем, который расположен на оси симметрии конуса (рис. 1) и возбуждает симметричные ТМ-волны с отличными от нуля компонентами E_r, E_θ, H_φ . Зависимость от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$, который в дальнейшем опускаем. Задача заключается в определении возмущения, вносимого конусом Q в поле источника. Физические процессы, связанные с дифракцией симметричных волн на рассматриваемом конусе, определяются одним скалярным потенциалом $U(r, \theta)$, который является ограниченным решением уравнения Гельмгольца и удовлетворяет граничным условиям

на Q , а также условиям излучения на бесконечности и условию Мейкснера на краю $L: \{r=c, \theta=\gamma\}$. Ограничиваясь случаем, когда источник возбуждения размещен на оси симметрии в области $0 \leq r < c$ и используя метод

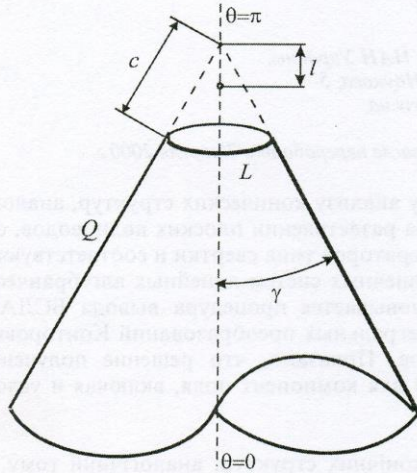


Рис. 1. Геометрическая схема задачи

разложения скалярных потенциалов в ряды по собственным функциям частичных областей, искомое решение представим следующим образом:

$$U(r, \theta) = U^{(i)}(r, \theta) + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} x_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) \frac{I_{z_n}(\rho)}{I_{z_n}(\rho_1)}, \quad (2a)$$

$$\rho, \theta \in D_1: \{r \in [0, c), \theta \in [0, \pi]\};$$

$$U(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(1)} P_{v_n-1/2}(\cos \theta) \frac{K_{v_n}(\rho)}{K_{v_n}(\rho_1)}, \quad (2б)$$

$$\rho, \theta \in D_2^{(1)}: \{r \in (c, \infty), \theta \in [0, \gamma]\};$$

$$U(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(2)} P_{\mu_n-1/2}(-\cos \theta) \frac{K_{\mu_n}(\rho)}{K_{\mu_n}(\rho_1)}, \quad (2в)$$

$$\rho, \theta \in D_2^{(2)}: \{r \in (c, \infty), \theta \in [\gamma, \pi]\};$$

Здесь $x_n, y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ – неизвестные коэффициенты разложения; $\rho = sr; \rho_1 = sc; s = -ik, k = k_1 + ik_2$ – комплексное волновое число, $\text{Im} k > 0; I_\nu(\cdot)$ – модифицированная функция

Бесселя, $K_\nu(\cdot)$ – функция Макдональда; $P_{\nu-1/2}(\cdot)$ – функция Лежандра; $z_n = n + 1/2; v_n, \mu_n$ – соответственно положительные корни трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} P_{v-1/2}(\cos \gamma) &= 0, \\ P_{\mu-1/2}(-\cos \gamma) &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$U^{(i)}(r, \theta)$ – потенциал первичного поля, который представим так:

$$U^{(i)}(r, \theta) = \frac{A_0}{\sqrt{\rho \rho_0}} \times \sum_{n=1}^{\infty} z_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) \begin{cases} K_{z_n}(\rho) I_{z_n}(\rho_0) \\ I_{z_n}(\rho) K_{z_n}(\rho_0) \end{cases} \begin{cases} r \geq l, \\ r \leq l, \end{cases} \quad (4)$$

где $A_0 = 2P_0 Z / l; P_0$ – момент диполя; l – его радиальная координата на оси симметрии конуса при $\theta = 0; \rho_0 = sl; Z$ – волновое сопротивление среды.

Ряд в (2а), содержащий неизвестные коэффициенты, описывает дифрагированное поле в области D_1 , а ряды (2б), (2в) соответствуют полному полю в конических областях $D_2^{(1)}$ и $D_2^{(2)}$. Компоненты электромагнитного поля выражаются через потенциалы (2а)-(2в) при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \{E_r, E_\theta, H_\phi\} = \\ = \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}); \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rU); ikZ \frac{\partial U}{\partial \theta} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения неизвестных коэффициентов разложения искомого потенциалов, имеющих различное представление в частичных областях $D_1, D_2^{(1)}, D_2^{(2)}$, используем условия непрерывности тангенциальных компонент поля на сферической поверхности $S: \{r=c, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, где S – граница раздела областей D_1 и $D_2^{(1)} \cup D_2^{(2)}$. Эти условия запишем так:

$$\{E_\theta^{(i)}(r, \theta) + E_\theta^{(d)}(r, \theta)\} \Big|_{r=c-0} = E_\theta(r, \theta) \Big|_{r=c+0}, \quad (6a)$$

$$\{H_\phi^{(i)}(r, \theta) + H_\phi^{(d)}(r, \theta)\} \Big|_{r=c-0} = H_\phi(r, \theta) \Big|_{r=c+0}. \quad (6б)$$

Здесь $0 \leq \theta \leq \pi$, верхний индекс (d) обозначает компоненту дифрагированного поля. С учетом

выражений (2), а также соотношений (5), (6а) и (6б) получаем, аналогично [2], сумматорные уравнения для определения коэффициентов разложения. Однако из-за особенности на краю L ограничимся конечным числом членов в рядах исходных сумматорных уравнений, а затем будем рассматривать предельный переход, увеличивая число слагаемых до бесконечности. Полученные уравнения перепишем в виде

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_{z_n}^1(\cos \theta) [x_n + b_n] = \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(1)} P_{\nu_p}^1(\cos \theta), & 0 \leq \theta \leq \gamma; \\ -\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M y_m^{(2)} P_{\mu_m}^1(-\cos \theta), & \gamma \leq \theta \leq \pi; \end{cases} \quad (7a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_{z_n}^1(\cos \theta) \left[x_n \frac{I'_{z_n}(\rho_1)}{I_{z_n}(\rho_1)} + b_n \frac{K'_{z_n}(\rho_1)}{K_{z_n}(\rho_1)} \right] = \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(1)} \frac{K'_{\nu_p}(\rho_1)}{K_{\nu_p}(\rho_1)} P_{\nu_p}^1(\cos \theta), & 0 \leq \theta \leq \gamma; \\ -\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M y_m^{(2)} \frac{K'_{\mu_m}(\rho_1)}{K_{\mu_m}(\rho_1)} P_{\mu_m}^1(-\cos \theta), & \gamma \leq \theta \leq \pi; \end{cases} \quad (7b)$$

Здесь $P_{\nu}^1(\pm \cos \theta) = \pm \partial / \partial \theta [P_{\nu}(\pm \cos \theta)]$ (см. [3]), $b_n = A_0 \rho_0^{-1/2} z_n I_{z_n}(\rho_0) K'_{z_n}(\rho_1)$; штрих в (7б) означает производную по аргументу. Величины N, P, M взаимосвязаны, и задача состоит в определении правила предельного перехода, обеспечивающего получение решения сумматорных уравнений (7а), (7б), которое удовлетворяет условию Мейкснера на краю L . Отметим также, что для индексов в правых частях уравнений (7) справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$\begin{aligned} \nu_p &= \pi(p-1/4)/\gamma + O(1/p), \\ \mu_m &= \pi(m-1/4)/(\pi-\gamma) + O(1/m) \end{aligned} \quad (8)$$

при $p, m \rightarrow \infty$.

Используя соотношения, связывающие модифицированные функции Бесселя и их производные по аргументу при больших значениях индекса,

$$\frac{I'_{\nu}(\rho_1)}{I_{\nu}(\rho_1)} = \frac{\nu}{\rho_1}, \quad \frac{K'_{\nu}(\rho_1)}{K_{\nu}(\rho_1)} = -\frac{\nu}{\rho_1}, \quad (\nu \gg |\rho_1|), \quad (9)$$

выделим из (7) вспомогательные сумматорные уравнения:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n P_{z_n}^1(\cos \theta) + b_j P_{z_j}^1(\cos \theta) = \begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(1)} P_{\nu_p}^1(\cos \theta), & 0 \leq \theta \leq \gamma; \\ -\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M y_m^{(2)} P_{\mu_m}^1(-\cos \theta), & \gamma \leq \theta \leq \pi; \end{cases} \quad (10a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n z_n P_{z_n}^1(\cos \theta) - b_j z_j P_{z_j}^1(\cos \theta) = \begin{cases} -\lim_{P \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^P y_p^{(1)} \nu_p P_{\nu_p}^1(\cos \theta), & 0 \leq \theta \leq \gamma; \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M y_m^{(2)} \mu_m P_{\mu_m}^1(-\cos \theta), & \gamma \leq \theta \leq \pi; \end{cases} \quad (10b)$$

где известная величина b_j определена в (7) при $n = j$.

Утверждение: Система сумматорных уравнений (10а), (10б) допускает точное аналитическое решение с коэффициентами $x_n, y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ ($n = \overline{1, \infty}$), стремящимися к нулю как $O(n^{-2})$ при $n \rightarrow \infty$, только при выполнении условий:

$$P/M = \gamma/(\pi-\gamma) \text{ и } P, M \rightarrow \infty \quad (N = P + M), \quad (11)$$

обеспечивая при этом наличие особенности вида $|\theta - \gamma|^{-1.2}$ в рядах (10б) при $\theta \rightarrow \gamma$.

Для доказательства этого утверждения используем формулу переразложения функций Лежандра, которую, применяя условия ортогональности и учитывая представление уравнений (10а), (10б), запишем в виде:

$$P_{z_n}^1(\cos \theta) = q(z_n, \gamma) \times \lim_{P(M) \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{P(M)} \frac{\eta_k \alpha^{\pm}(\eta_k, \gamma)}{\eta_k^2 - z_n^2} P_{\eta_k}^1(\pm \cos \theta), \quad (12)$$

где верхний знак соответствует области $\theta \in [0, \gamma]$, а нижний – $\theta \in [\gamma, \pi]$. В этих областях η_k принимает соответственно значения ν_k и μ_k . Остальные обозначения определяются формулами:

$$q(z_n, \gamma) = (z_n^2 - 1/4) P_{z_n - 1/2}(\cos \gamma), \quad (13)$$

$$\alpha^\pm(\eta_k, \gamma) = \mp 2 \left[(\eta_k^2 - 1/4) \frac{\partial P_{\eta - 1/2}(\pm \cos \gamma)|_{\eta=\eta_k}}{\partial \eta} \right]^{-1}. \quad (14)$$

Ряд (12) сходится к функции $P_{z_n - 1/2}^1(\cos \theta)$ равномерно по θ в рассматриваемых областях изменения этого параметра, что доказываем аналогично [4], привлекая технику преобразования рядов (12) в интегралы на комплексной плоскости.

Подставим соотношение (12) в уравнения (10), приравняем члены с одинаковыми функциями Лежандра $P_{\eta_n - 1/2}^1(\cos \theta)$ и исключим из них неизвестные $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$. В результате приходим к двум системам уравнений вида

$$\sum_{n=1}^N \frac{\tilde{x}_n}{\nu_p - z_n} = \frac{\tilde{b}_j}{\nu_p + z_j}, \quad \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{x}_n}{\mu_m - z_n} = \frac{\tilde{b}_j}{\mu_m + z_j}. \quad (15)$$

Здесь $p=1, 2, \dots, P$; $m=1, 2, \dots, M$;

$$\tilde{x}_n = q(z_n, \gamma) x_n, \quad \tilde{b}_j = -b_j q(z_j, \gamma). \quad (16)$$

Зависимое от N совместное решение систем (15) имеет вид [5]:

$$\tilde{x}_k^{(N)} = \tilde{b}_j \frac{\prod_{p=1}^P (1 - z_k / \nu_p) \prod_{q=1}^M (1 - z_k / \mu_q) \prod_{n=1}^N (k) (1 + z_j / z_n)}{\prod_{p=1}^P (1 + z_j / \nu_p) \prod_{q=1}^M (1 + z_j / \mu_q) \prod_{n=1}^N (k) (1 - z_k / z_n)}, \quad (17)$$

где $k = \overline{1, N}$; символ (k) означает, что в произведении опущен множитель с индексом $n=k$. В предельном случае $P, M \rightarrow \infty$ ($N = P + M$) при больших k для решения (17) имеет место асимптотическая оценка:

$$\tilde{x}_k^{(N \rightarrow \infty)} = O \left(z_k^{-1/2} \exp \left\{ z_k \left[\frac{\gamma}{\pi} \ln \left(\frac{1+M/P}{1+(\pi-\gamma)/\gamma} \right) + \frac{\pi-\gamma}{\pi} \ln \left(\frac{1+P/M}{1+\gamma/(\pi-\gamma)} \right) \right] \right\} \right) \quad (18)$$

Согласно (18) решение систем уравнений (15) зависит от правила редукции, аналогично тому, как это имеет место при решении задач дифракции на разветвлениях плоских волноводов [5]. Из (18) следует, что алгебраический характер убывания решения при больших k получается только при выполнении условия (11).

Рассмотрим возрастающую последовательность

$$\{\xi_n\}_{n=1}^\infty = \{\nu_p\}_{p=1}^\infty \cup \{\mu_m\}_{m=1}^\infty. \quad (19)$$

Используя (19), в предельном случае $P, M \rightarrow \infty$ ($N = P + M$) образуем из уравнений (15) БСЛАУ вида

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\tilde{x}_n}{\xi_q - z_n} = \frac{\tilde{b}_j}{\xi_q + z_j}, \quad q = \overline{1, \infty} \quad (20)$$

и рассмотрим матричный оператор A с элементами $a_{qn} = (\xi_q - z_n)^{-1}$, где $q, n = \overline{1, \infty}$. Для оператора A типа свертки существует обратный оператор A^{-1} , элементами которого являются выражения

$$\tau_{kq} = \left\langle \left\{ M_-^{-1}(\xi_q) \right\} M'_-(z_k) (z_k - \xi_q) \right\rangle^{-1}. \quad (21)$$

Здесь $M_-(v)$ – функция, регулярная в полуплоскости $\text{Re } v < 1/2$; $M'_-(z_k) = \frac{d}{dv} [M_-(v)]_{v=z_k}$. В области регулярности справедлива оценка $M_-(v) = O(v^{-1/2})$ при $|v| \rightarrow \infty$. Вне этой области функция $M_-(v)$ имеет простые действительные нули и полюсы в точках z_k и ξ_q соответственно ($k, q = \overline{1, \infty}$) и записывается так:

$$M_-(v) = B_0 \left\{ (1/2 - v) \Gamma(1/2 - v) e^{-v\chi} \prod_{n=1}^\infty (1 - v/\xi_n) e^{v/\xi_n} \right\}^{-1}, \quad (22)$$

$$\text{где } B_0 = i\sqrt{\pi} \{P_{-1/2}(\cos \gamma) P_{-1/2}(-\cos \gamma)\}^{-1/2};$$

$$\chi = \frac{\gamma}{\pi} \ln \frac{\gamma}{\pi} + \frac{\pi - \gamma}{\pi} \ln \frac{\pi - \gamma}{\pi} \psi(3/4) - S(\gamma) - S(\pi - \gamma);$$

$$S(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma}{\pi(n-1/4)} - \frac{1}{v_n} \right];$$

$\psi(\cdot)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

Для матричных элементов (21) при $k, q \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$\tau_{kq} = O\left(\xi_k^{1/2} \xi_q^{-1/2} (z_k - \xi_q)^{-1}\right). \quad (23)$$

Применяя оператор A^{-1} к системе (20), с учетом (23) находим:

$$\tilde{x}_n = \tilde{b}_j \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\tau_{nq}}{\xi_q + z_j} = -\frac{\tilde{b}_j M_+(z_j)}{M'_-(z_n)(z_n + z_j)} = O(n^{-1/2}), \quad (24)$$

где $M_+(v) = M_-(-v)$, а суммирование проводится с привлечением соотношения (21) посредством преобразования ряда (24) к интегралу в комплексной плоскости вдоль окружности бесконечного радиуса.

Используя соотношения (17), (22) и (24), при $N > M > P$ находим:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{x}_n}{\tilde{x}_n^{(N)}} &= \exp\left\{-\left(z_j + z_n\right)\left[\frac{\gamma}{\pi} \ln \frac{\gamma}{\pi} + \frac{\pi - \gamma}{\pi} \ln \frac{\pi - \gamma}{\pi}\right]\right\} \times \\ &\times \prod_{p=P+1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{v_p - z_n}{v_p + z_j} \right) \left(\frac{\mu_p - z_n}{\mu_p + z_j} \right) \left(\frac{z_p + z_j}{z_p - z_n} \right) \right\} \times \\ &\times \prod_{p=P+1}^M \left(\frac{\mu_p + z_j}{\mu_p - z_n} \right) \prod_{p=P+1}^N \left(\frac{z_p - z_n}{z_p + z_j} \right). \end{aligned} \quad (25a)$$

Устремляя N, M, P к бесконечности и используя технику вычислений, развитую в [6], из (25a) получаем соотношение:

$$\begin{aligned} \lim_{N(P, M) \rightarrow \infty} \frac{\tilde{x}_n}{\tilde{x}_n^{(N)}} &= \exp\left\{-\left(z_j + z_n\right) \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{\gamma}{\pi} \ln \frac{\gamma}{\pi} + \frac{\pi - \gamma}{\pi} \ln \frac{\pi - \gamma}{\pi} + \frac{\gamma}{\pi} \ln \frac{N}{P} + \frac{\pi - \gamma}{\pi} \ln \frac{N}{M} + O(P^{-1}) \right]\right\}. \end{aligned} \quad (25b)$$

Правая часть выражения (25b) стремится к единице для всех $n < N$ и $N \rightarrow \infty$ при выпол-

нении соотношения (11), и, следовательно, решения (17) и (24) совпадают. Используя выражения (24) и (16), находим, что неизвестные коэффициенты разложения в (10) удовлетворяют требуемым условиям. Подставив их в левую часть уравнения (10b), получим ряд, который, согласно теореме о вычетах, преобразуем в интеграл вида

$$\begin{aligned} I(\theta, \gamma) &= \pm \frac{\tilde{b}_j M_+(z_j)}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{t P_{l-1/2}^1(\pm \cos \theta)}{(t^2 - 1/4)(t + z_j) M_-(t) P_{l-1/2}(\pm \cos \gamma)} dt, \end{aligned} \quad (26)$$

где верхний знак соответствует случаю $\theta \leq \gamma$, а нижний – $\theta \geq \gamma$. Учитывая асимптотическое поведение подынтегральной функции в (26) и используя методы оценок интегралов, определяющих гамма-функцию [5], находим:

$$|I(\theta, \gamma)| \leq C_0 \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t|\theta - \gamma|} dt \leq C_1 |\theta - \gamma|^{-1/2}, \quad (27)$$

где C_0, C_1 – ограниченные постоянные. Аналогичные оценки имеют место и для неизвестных $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$. Следовательно, утверждение доказано.

Применяя далее аналогичную процедуру к сумматорным уравнениям (7), приходим к БСЛАУ вида

$$A_1 \tilde{X} = F, \quad (28)$$

где $\tilde{X} = \{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$; A_1 – бесконечная матрица с элементами

$$a_{qn}^{(1)} = \frac{\rho_1 W[K_{\xi_q} I_{-n}]_{\rho_1}}{(\xi_q^2 - z_n^2) K_{\xi_q}(\rho_1) I_{-n}(\rho_1)}, \quad (29)$$

$$W[K_v I_{\mu}]_{\rho} = K_v(\rho) I'_{\mu}(\rho) - K'_v(\rho) I_{\mu}(\rho);$$

$$F = \{f_q\}_{q=1}^{\infty} - \text{известный вектор,}$$

$$\begin{aligned} f_q &= \frac{A_0}{\sqrt{\rho_0}} \sum_{n=1}^{\infty} z_n q(z_n, \gamma) I_{-n}(\rho_0) K_{-n}(\rho_1) \times \\ &\times \frac{\rho_1 W[K_{-n} K_{\xi_q}]_{\rho_1}}{(\xi_q^2 - z_n^2) K_{-n}(\rho_1) K_{\xi_q}(\rho_1)}. \end{aligned} \quad (30a)$$

Отметим, что в случае, когда источник находится на оси симметрии в коническом секторе ($l > c$), выражения для компонент вектора F записываем так:

$$f_q = \frac{A_0 \pi K_{\xi_q}(\rho_0) (\xi_q^2 - 1/4) P_{\xi_q - 1/2}(\mp \cos \gamma)}{2\sqrt{\rho_0} K_{\xi_q}(\rho_1) \cos(\pi \xi_q)}, \quad (30б)$$

где верхний знак соответствует размещению диполя в области $0 \leq \theta \leq \gamma$, а нижний – в дополняющей области.

Выделяя оператор A из A_1 и используя обратный оператор A^{-1} , переходим от системы (28) к БСЛАУ второго рода:

$$\tilde{X} = A^{-1}(A - A_1)\tilde{X} + A^{-1}F. \quad (31)$$

На основе анализа матричных операторов полученной системы доказываем, что она имеет единственное решение в классе последовательностей

$$b(\sigma) : \{ \|\tilde{X}\| = \sup_n |\tilde{x}_n n^\sigma|, \lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{x}_n n^\sigma| = 0, 0 \leq \sigma < 1/2 \}. \quad (32)$$

Это решение находится методом редукции с наперед заданной точностью для произвольных параметров задачи, за исключением счетного множества их значений, для которых определитель системы (31) равен нулю. При этом обеспечивается выполнение условий Мейкснера на краю конуса, а алгоритм получения БСЛАУ (31) одновременно раскрывает смысл предельного перехода в сумматорных уравнениях (7), который состоит в соблюдении правила (11) при стремлении P , M и N к бесконечности.

Метод интегральных преобразований

Этот подход применялся нами ранее [1]. Здесь используем его для решения одной из наиболее простых задач с целью установления связи с методом рядов.

Для этого скалярный потенциал дифрагированного поля в конических областях $0 \leq \theta \leq \gamma$ и $\gamma \leq \theta \leq \pi$, являющийся решением уравнения Гельмгольца, представим в виде интеграла Конторовича-Лебедева [7]:

$$U(r, \theta) = \frac{1}{\pi i \sqrt{sr}} \int_{\Gamma} v F(v) \Phi(v; \theta, \gamma) I_v(sr) dv, \quad (33)$$

где $F(v)$ – неизвестная четная функция, регулярная в полосе $\Pi : \{ |\operatorname{Re} v| < 1/2 \}$; $\Gamma \in \Pi$ – контур интегрирования; $\Phi(v; \theta, \gamma)$ – известная функция, обеспечивающая выполнение условий непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля. Выражение для этой функции запишем так:

$$\Phi(v; \theta, \gamma) = \begin{cases} P_{v-1/2}(\cos \theta) P_{v-1/2}(-\cos \gamma), & \theta \leq \gamma, \\ P_{v-1/2}(-\cos \theta) P_{v-1/2}(\cos \gamma), & \theta \geq \gamma. \end{cases} \quad (34)$$

Используя представление искомого потенциала в виде (33), сводим задачу к системе дуальных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} v (v^2 - 1/4) F(v) P(v, \gamma) I_v(sr) dv = \varphi(r), \quad r \in \Omega; \quad (35а)$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} v (v^2 - 1/4) F(v) Q(v) I_v(sr) dv = 0, \quad r \in \bar{\Omega} \setminus \Omega. \quad (35б)$$

Здесь $\Omega = [c, \infty)$; $\bar{\Omega} = [0, \infty)$;

$$P(v, \gamma) = P_{v-1/2}(\cos \gamma) P_{v-1/2}(-\cos \gamma), \quad (36а)$$

$$Q(v) = \frac{\cos(\pi v)}{v^2 - 1/4} - \quad (36б)$$

целые, четные функции экспоненциального типа, простые действительные нули которых расположены в точках $\pm \xi_k$, $\pm z_n$ ($k, n = \overline{1, \infty}$) соответственно;

$$\varphi(r) = -r \sqrt{sr} E_r^{(i)}(r, \gamma), \quad (37)$$

где $E_r^{(i)}(r, \gamma)$ – компонента первичного поля.

Используя метод доопределения и исключая неизвестные трансформанты в (35), приходим к интегральному уравнению относительно $g(r)$:

$$\hat{R}_{\bar{\Omega} \setminus \Omega} [g(r'); r] = \hat{R}_{\bar{\Omega}} [r' \sqrt{r'} E_r^{(i)}(r', \gamma); r]. \quad (38)$$

Здесь $\hat{R}_{\bar{\Omega} \setminus \Omega} []$ интегральный оператор, который представим так:

$$\hat{R}_{\bar{\Omega} \setminus \Omega} [g(r'); r] = \frac{1}{\pi i} \times \int_{\Gamma} v M(v) \int_{\bar{\Omega} \setminus \Omega} g(r') \begin{cases} K_v(sr) I_v(sr'), r \geq r' \\ I_v(sr) K_v(sr'), r \leq r' \end{cases} \frac{dr'}{r'} dv, \quad (39)$$

где

$$M(v) = Q(v)/P(v, \gamma) = M_+(v)M_-(v) - \quad (40)$$

четная мероморфная функция с полосой регулярности Π , имеющая простые действительные нули и полюсы в точках $\pm z_n, \pm \xi_k$ ($n, k = \overline{1, \infty}$) и допускающая факторизацию методом бесконечных произведений. Функции $M_{\pm}(v)$ определены в (22) и (24). Уравнение (38) выполняется в области $r \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$; $g(r)$ – новая неизвестная функция ($(r\sqrt{sr})^{-1}g(r)$ – по физическому смыслу – является составляющей поля E_r на поверхности, дополняющей Q до полубесконечного конуса). Переход от системы дуальных интегральных уравнений (35) к уравнению (38) получаем в предположении, что $\text{Im } s = 0$.

Для сведения задачи к БСЛАУ рассмотрим подробнее интегральный оператор (39), записав его в более общем виде:

$$\hat{R}_{\Omega_N} [g(r')r] = \frac{1}{\pi i} \times \int_{\Gamma} v M(v) \left[\int_{\Omega_N} g(r') \begin{cases} K_v(sr) I_v(sr'), & r \geq r' \\ I_v(sr) K_v(sr'), & r \leq r' \end{cases} \frac{dr'}{r'} \right] dv, \quad (41)$$

где область интегрирования $\Omega_N = [c_1, c_2] \cup [c_3, c_4] \cup \dots \cup [c_{2N-1}, c_{2N}]$ состоит из конечного числа непересекающихся интервалов; $r, r' \in \Omega_N, \Omega_N \subset [0, \infty)$; $\text{Im } s = 0$.

Пусть на каждом интервале $[c_{2p-1}, c_{2p}] \subset \Omega_N, p = \overline{1, N}$, функция $g(r) = g_p(r)$ выражается следующим рядом:

$$g_p(r) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^{(p)}(r), \quad (42)$$

$$Z_n^{(p)}(r) = a_n^{(p)} I_{-n}^{(p)}(sr) + b_n^{(p)} K_{-n}^{(p)}(sr)$$

(для областей, содержащих бесконечную или нулевую точки, коэффициенты $a_n^{(p)}$ или $b_n^{(p)}$ соответственно принимаем равными нулю). Тогда функция $q(r) = \hat{R}_{\Omega_N} [g(r'); r]$ на каждом из интервалов Ω_N представляется рядом, состоящим из линейной комбинации модифицированных

функций Бесселя и функций Макдональда с индексами ξ_k ($k = \overline{1, \infty}$). Это свойство устанавливается непосредственно путем подстановки выражения (42) в (41), вычисления интегралов по переменной r' и замены интеграла по контуру Γ рядом вычетов в точках ξ_k .

Представим искомое решение уравнения (38) в виде:

$$g(r) = \begin{cases} r\sqrt{sr} E_r^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{I_{z_n}(sr)}{I_{z_n}(sc)}, & 0 \leq r < c; \\ 0, & r > c; \end{cases} \quad (43)$$

где y_n – неизвестные коэффициенты разложения, и подставим его в интегральное уравнение (38). Положив $\Omega_N = \overline{\Omega} \setminus \Omega$, применяя указанное свойство оператора (41) к интегральному уравнению (38), получаем однородное сумматорное уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(Y) I_{\xi_k}(sr) = 0, \quad (44)$$

где $Y = \{y_p\}_{p=1}^{\infty}$,

$$T_k(Y) = \frac{2\xi_k I_{\xi_k}(\rho_1)}{\frac{d}{dv} [M(v)]_{v=\xi_k}} \left[\sum_{p=1}^{\infty} a_{kp}^{(1)} y_p - f_k \right]. \quad (45)$$

В рамках принятых ограничений относительно волнового параметра ($\text{Im } s = 0$) имеет место свойство усиленной линейной независимости функций $I_{\xi_k}(sr)$ ($k = \overline{1, \infty}$) [8]. Следовательно, приравнявая нулю коэффициенты (45), из (44) получаем БСЛАУ, эквивалентную интегральному уравнению (38). Матричные элементы полученной БСЛАУ являются функциями волнового параметра s . Продолжая их аналитически по этому параметру в комплексную область, приходим к БСЛАУ, совпадающей с (28); ее регуляризация осуществляется на основе соотношения (31).

Заключение

На примере решения симметричной задачи дифракции на полубесконечном конусе с усеченной вершиной обоснованы формализм метода рядов собственных функций и метод интегральных преобразований. Доказана эквивалентность этих подходов при выводе бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Установлены правила сведения сумматор-

ных уравнений к БСЛАУ, которые обеспечивают получение решения задачи в требуемом классе последовательностей, и предложен метод "полуобращения" для ее решения. Установлена связь рассмотренных подходов с методами строгого электродинамического анализа процесса дифракции на разветвлении плоских волноводов, развитыми в [5,6].

Исследования, проведенные в этой публикации, выполнены при частичной финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (проект №2.4/687).

Литература

1. Д. Б. Куриляк. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1992, **35**, №3, с. 3-9.
2. Д. Б. Куриляк. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1997, **40**, №2, с. 27-35.
3. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. Москва, Ленинград, Изд. Физико-матем. лит., 1963, 358 с.
4. Д. Б. Куриляк. Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1998, **41**, №9, с. 13-22.
5. Р. Миттра, С. Ли. Аналитические методы теории волноводов. Москва, Мир, 1974, 323 с.
6. В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов. Матричные уравнения типа свертки в задачах теории дифракции. Київ, Наук. думка, 1984, 292 с.

7. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Москва, Ленинград, Изд. АН СССР, 1948, 727 с.
8. В. А. Бабешко, В. Н. Беркович. Прикл. математ. и мех. 1972, **36**, №5, с. 943-947.

Axially-Symmetric Field of Electric Dipole over Truncated Cone.

I. Comparison between Mode-matching Technique and Integral Transformation Method

D. B. Kuryliak

The method of the rigorous electrodynamic analysis of conic structures which is similar to the one used for investigation of wave diffraction by bifurcation of the flat waveguide is developed. The convolution operators together with its inverse operators are used for regularization of the initial sets of linear algebraic equations by a "semi-inversion" technique. The mode-matching method and the Kontorovich-Lebedev integral transformation technique are used and their equivalence is proved for derivation of the sets of equations. It is shown that their solution satisfy the necessary conditions for the field components including the Meixner's condition at the edge of the cone.