

## Электродинамические свойства многоэлементных периодических систем с металлодиэлектрическими рассеивателями

В. Б. Казанский, В. В. Подлозный, В. В. Харди́ков

*Харьковский национальный университет,  
Украина, 61077, Харьков, пл. Свободы, 4*

*Статья поступила в редакцию 6 апреля 2000 г.*

Представлено аналитическое решение задачи дифракции плоской и симметричной волноводных волн на многоэлементной периодической структуре, состоящей из сложных металлодиэлектрических рассеивателей, в одноволновом режиме. Развитый метод не зависит от числа элементов, типов линий передачи (свободное пространство или волновод) и характера нагрузки.

Рассмотрены поглощающая среда в виде чередующихся магнитодиэлектрических слоев с резистивной пленкой, многозвенный частотный и модовый волноводный фильтр с реактивными диафрагмами, угловой и частотный дискриминатор, образованный одинаковыми бесконечными решетками из проводящих брусев.

Выявлены особенности волновых процессов в ограниченных периодических системах (сверхдобротные резонансы, обобщенный эффект Малюжинца) и пути оптимизации эксплуатационных характеристик приборов на их основе. Представлены аппроксимирующие решения, дан сравнительный анализ свойств ограниченных и полубесконечных структур с однотипными повторяющимися элементами, найдены условия формирования сверхдобротных резонансов, исследована динамика комплексных частот и добротности собственных колебаний.

Подано аналітичне розв'язання задачі дифракції плоскої і симетричних хвильоводних хвиль на багатоелементній періодичній структурі з складних металодіелектричних розсіювачів в однохвильовому режимі. Розвинений метод не залежить від числа елементів, типів ліній передачі (вільний простір або хвильовод) і характеру навантаження.

Розглянуто поглинаюче середовище з магнітодіелектричних шарів, що чергуються з резистивною плівкою, багатоланцюговий частотний і модовий хвильоводний фільтр із реактивними діафрагмами, кутівий і частотний дискриміна́тор, утворений однаковими нескінченними ґратками з провідних брусів.

Виявлено особливості хвильових процесів в обмежених періодичних системах (наддобротні резонанси, узагальнений ефект Малюжинця) і шляхи оптимізації експлуатаційних характеристик приладів на їх основі. Представлено апроксимуючі рішення, зроблено порівняльний аналіз властивостей обмежених і напівнескінчених структур з однотипними елементами, які повторюються, знайдено умови формування наддобротних резонансів, досліджено динаміку комплексних частот і добротність власних коливань.

### I. Введение

Особенности периодических систем, состоящих из элементов со сложным характером полей рассеяния, обуславливают уникальные частотные, фазовые, пространственные, поляризационные и диссипативные свойства приборов [1-3]. Широкое распространение таких систем стимулировало развитие теории ограниченных периодических структур. Традиционные строгие математические методы сводятся к определению полей рассеяния как произведения обобщенных матриц передачи повторяющегося элемента. Эффективный и экономичный подход предложен в работе [4], где поля в многослойной периодической структуре выражаются через собственные волны беско-

нечной структуры. Однако трудности численной реализации этих решений серьезно осложняют анализ физических свойств и их динамики, решение задач оптимизации и синтеза. Известные методы применялись, как правило, для анализа простых построений в виде чередующихся однородных диэлектрических слоев [5-8]. Представляется целесообразным развитие аналитических методов для исследования систем со сложной металлодиэлектрической субструктурой базового элемента [9-13].

На основе теории матричных функций и свойств полиномов Моги́на [7] нами получены аналитические формулы для полей рассеяния (в одноволновой области) ограниченных периодических структур с произвольными свойствами повторяющегося элемента. Рассмотрены

модели поглощающего слоистого покрытия, многосвязного частотно-поляризационного волноводного фильтра, сверхдобротного углового и частотного дискриминатора [10-12]. Настоящее исследование является продолжением и развитием этих работ. Основное внимание здесь уделяется анализу условий прозрачности, высокодобротных резонансов и собственных режимов, получению аппроксимирующих решений, сопоставлению свойств ограниченных, полубесконечных и бесконечных периодических структур.

## II. Объект и метод исследования

Исследуются поля в периодической (с периодом  $L$ ) структуре из  $N$  одинаковых кусочно-однородных областей в свободном пространстве или в цилиндрическом волноводе. В первом случае их поперечные относительно направления периодичности размеры предполагаются бесконечными, во втором они огра-

ничены диаметром волновода  $2a$ . Структура находится между однородными (регулярными) волноведущими каналами (свободное пространство или волновод), которые заполнены средой с диэлектрической  $\epsilon_j$  и магнитной  $\mu_j$  проницаемостями и имеют волновую проводимость  $Y_j$  ( $j=0, 3$ ). Повторяющийся (базовый) элемент (БЭ) (рис. 1) включает магнитодиэлектрические ( $\epsilon_j, \mu_j, Y_j$ ) слои (шайбы) (1, 2) толщиной  $d_j$  ( $j=1, 2$ ) и металлодиэлектрическую вставку (3). Рассматриваются следующие классы металлодиэлектрических рассеивателей: тонкие (нерезонансные) резистивные пленки с проводимостью  $Y_\sigma$  (рис. 1, а), реактивные кольцевые (рис. 1, б) и радиальные (рис. 1, в) диафрагмы в цилиндрическом волноводе, резонансные решетки из идеально проводящих брусков прямоугольного поперечного сечения (рис. 1, г). Возбуждающие поля заданы в виде плоской волны перпендикулярной ( $s=h$ ) или параллельной ( $s=e$ ) поляризации с углом

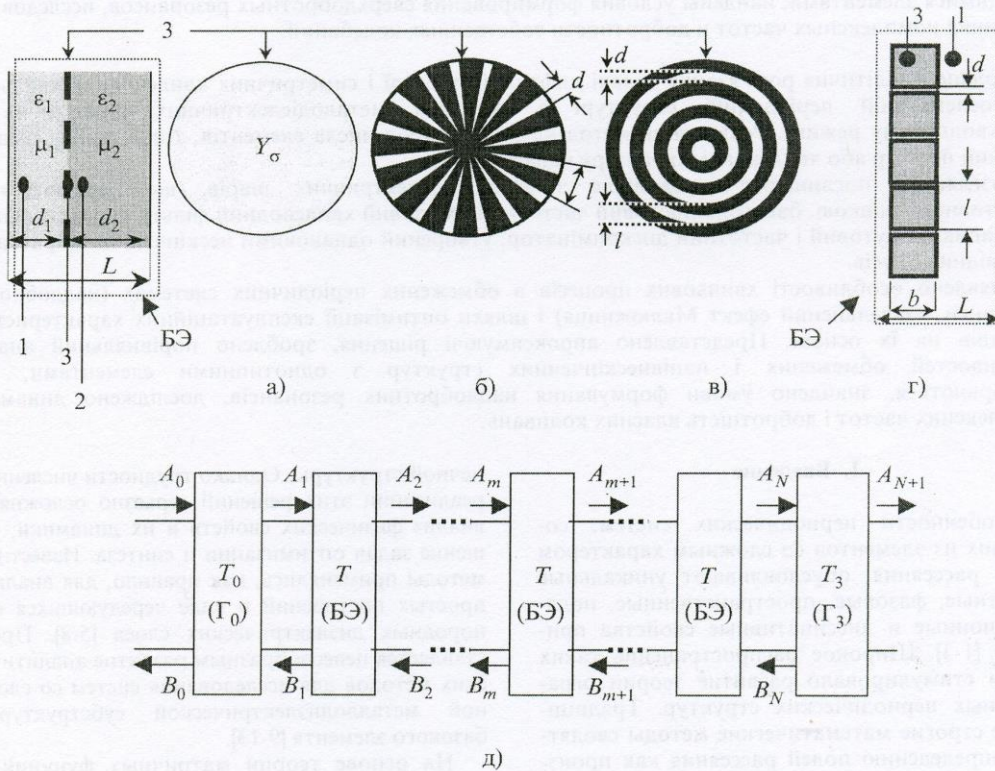


Рис. 1. а), б), в), г) – структура базового элемента (БЭ): 1, 2 – магнитодиэлектрические шайбы, 3 – металлодиэлектрическая вставка; д) – эквивалентная схема  $N$ -элементной периодической структуры:  $\Gamma_0, \Gamma_3, \text{БЭ}$  – четырехполюсники, эквивалентные входной, выходной границам и базовому элементу

падения  $\varphi_0$  (для анализа систем в свободном пространстве) и в виде симметричных  $TE_{0n}$ - и  $TM_{0n}$ -волн (для анализа диафрагмированного волновода) с зависимостью от времени  $\exp(-i\omega t)$ . Исследования проводились в длинноволновом диапазоне, когда период  $l$  диафрагм (рис. 1, б, в) и объемных решеток (рис. 1, г) намного меньше длины волны ( $\kappa = kl/2\pi = l/\lambda \ll 1$ ) и в структуре распространяется только один тип волны. Это позволяет представить базовый элемент (БЭ), входные ( $\Gamma_0$ ) и выходные ( $\Gamma_3$ ) границы структуры эквивалентными четырехполюсниками, а всю систему – их последовательным соединением (рис. 1, д). Амплитуды падающих ( $A_0, A_m$ ) и отраженных ( $B_0, B_m$ ) волн ( $m=1, 2, \dots, N$ ) на входе соседних четырехполюсников связаны соответствующими матрицами передачи (МП)  $T_0, T, T_3$  (рис. 1, д). При известном их значении связь между амплитудами рассеянного ( $B_0, A_{N+1}$ ) и возбуждающего ( $A_0$ ) полей выражается через произведение  $T_0 T^N T_3$ .

Матрица передачи БЭ находилась из эквивалентных граничных условий. Ее коэффициенты зависят от поляризации (типа) волны через волновые проводимости  $Y_j$  регулярных участков линий передачи и эквивалентные проводимости  $Y_u^s$  рассеивателя. Для резистивных пленок и диафрагм (рис. 1, а, б, в) матричные коэффициенты выражаются единым образом:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{1}{4Y_1 Y_2} \{ (Y_1 + Y_2)(Y_1 + Y_2 + Y_u^s) e_1^- e_2^- + (Y_2 - Y_1)(Y_1 - Y_2 + Y_u^s) e_1^+ e_2^+ \}, \\ t_{12} &= \pm \frac{1}{4Y_1 Y_2} \{ (Y_2 - Y_1)(Y_1 + Y_2 + Y_u^s) e_1^- e_2^- + (Y_1 + Y_2)(Y_1 - Y_2 + Y_u^s) e_1^+ e_2^+ \}, \\ t_{21} &= \pm \frac{1}{4Y_1 Y_2} \{ (Y_1 + Y_2)(Y_1 - Y_2 - Y_u^s) e_1^+ e_2^- + (Y_2 - Y_1)(Y_1 + Y_2 - Y_u^s) e_1^- e_2^+ \}, \\ t_{22} &= \frac{1}{4Y_1 Y_2} \{ (Y_2 - Y_1)(Y_1 - Y_2 - Y_u^s) e_1^+ e_2^- + (Y_1 + Y_2)(Y_1 + Y_2 - Y_u^s) e_1^- e_2^+ \}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь верхний знак и соответствующие значения волновых проводимостей ( $Y_j^h = \gamma_j^h / k\mu_j$ ,  $Y_j^s = k\epsilon_j / \gamma_j^s$ ) относятся к перпендикулярной поляризации волны (или  $TE_{0n}$ -волнам), а нижний – к параллельной (или  $TM_{0n}$ -волнам);  $e_j^\pm = \exp(\pm i\gamma_j^s d_j)$ , где  $\gamma_j^s$  – постоянная распространения в регулярных участках волноведущего канала. В открытой линии передачи

$\gamma_j^s = k_j = k\sqrt{\epsilon_j \mu_j} \cos \varphi_j$ , где  $\varphi_j$  – угол падения волны; в цилиндрическом волноводе –  $\gamma_{jn}^h = k\sqrt{\epsilon_j \mu_j - [v_{1n}/ka]^2}$ ,  $\gamma_{jn}^s = k\sqrt{\epsilon_j \mu_j - [\mu_{0n}/ka]^2}$ , где  $a$  – радиус волновода,  $\mu_{0n}, v_{1n}$  – корни бесселевых функций нулевого и первого порядка. Эквивалентные проводимости  $Y_u^s$  резистивной пленки равны  $Y_\sigma$ , а кольцевой и радиальной диафрагм – соответственно  $iY_c^s$  и  $iY_r^s$ , где

$$Y_c^s = \begin{cases} Y_p^+, & s=h; \\ Y_p^-, & s=e; \end{cases} \quad Y_r^s = \begin{cases} Y_p^- / (1 + f^h), & s=h; \\ Y_p^+ / (1 + f^e), & s=e; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Y_p^- &= \kappa(\epsilon_1 + \epsilon_2) \ln 0.5(1 - u), \\ Y_p^+ &= -(\mu_1 + \mu_2) / [\mu_1 \mu_2 \kappa \ln 0.5(1 + u)], \\ u &= \cos(\pi d/l), \quad f^e = M(\mu_{0n}/ka)^2, \\ f^h &= M(v_{1n}/ka)^2, \quad M = (\mu_1 + \mu_2) / [\mu_1 \mu_2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)]. \end{aligned}$$

Если базовый элемент включает только частую ( $\kappa \ll 1$ ) решетку из проводящих брусьев конечной толщины  $\delta = b/l$  (рис. 1, г), то  $e^\pm = \exp[\pm 2\pi\kappa(L/l - \delta)]$  и его МП для наклонно падающей ( $\beta = \cos \varphi_0$ ) плоской волны с вектором  $\vec{H}$ , параллельным образующим брусьев в приближении ( $\theta^2/\beta^2 \ll 1$ ,  $\theta = d/l$ ), имеет вид [12]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{Y^+ - Y^-} \times \\ &\times \begin{pmatrix} (1 + Y^+) (1 + Y^-) e^- & (1 - Y^+ Y^-) e^+ \\ -(1 - Y^+ Y^-) e^- & -(1 - Y^+) (1 - Y^-) e^+ \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $Y^\pm = -i\beta^2 \ln \sin(\pi\theta/2) \pm [\text{ctg}(\pi\kappa\delta)]^{\pm 1} / \theta$ . Зная входные ( $T_0$ ) и выходные ( $T_3$ ) МП получаем решение задачи дифракции волн на  $N$ -элементной периодической структуре:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = T_0 T^N T_3 \begin{pmatrix} A_{N+1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Заметим, что оно справедливо и для многоволновых режимов, если использовать обобщенные МП, а векторы-столбцы дополнить высшими пространственными гармониками, рас-

пространяющимися и затухающими (если известно строгое решение задачи дифракции).

Из интерполяционной формулы Лагранжа и теоремы Кели-Гамильтона следует [14,15]:

$$\mathbf{T}^N = \begin{pmatrix} t_{11}P_N - P_{N-1} & t_{12}P_N \\ t_{21}P_N & t_{22}P_N - P_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $P_N(X) = (\xi^N - \xi^{-N}) / (\xi - \xi^{-1})$  – полиномы Могина,  $\xi^{\pm 1} = X \pm \sqrt{X^2 - 1}$  – корни характеристического уравнения матрицы  $\mathbf{T}$ , а  $X = (t_{11} + t_{22}) / 2$ . Формулы (4) и (5) определяют коэффициенты отражения ( $R = B_0 / A_0$ ) и прохождения ( $\tau = A_{N+1} / A_0$ ):

$$R = \frac{\pm r_{01}[t_{11}P_N - P_{N-1} \mp r_{31}t_{12}P_N] + [\mp r_{31}(t_{22}P_N - P_{N-1}) + t_{21}P_N]}{[t_{11}P_N - P_{N-1} \mp r_{31}t_{12}P_N] \pm r_{01}[\mp r_{31}(t_{22}P_N - P_{N-1}) + t_{21}P_N]}, \quad (6a)$$

$$\tau = \frac{P_{01}P_{31}}{[t_{11}P_N - P_{N-1} \mp r_{31}t_{12}P_N] \pm r_{01}[\mp r_{31}(t_{22}P_N - P_{N-1}) + t_{21}P_N]}, \quad (6b)$$

где  $r_{jk} = (Y_j - Y_k) / (Y_j + Y_k)$ ,

$p_{jk} = 2\sqrt{Y_j Y_k} / (Y_j + Y_k)$ .

Алгоритм расчета по этим формулам не зависит от свойств БЭ, их числа, типа возбуждающего поля и характера нагрузки ( $Y_3$ ).

### III. Поля рассеяния

Характерная особенность частотных зависимостей коэффициента отражения (КО) многоэлементных периодических структур – чередование областей с относительно высоким (зоны квазизапираания) и низким (зоны квазипрозрачности) его средним значением. Это следствие свойств собственных волн бесконечной периодической структуры, постоянная распространения  $\gamma$  которых находится из уравнения

$$\cos \gamma L = X \equiv (t_{11} + t_{22}) / 2. \quad (7)$$

Граница между зонами прозрачности ( $|X| < 1$ ) и запираания ( $|X| > 1$ ) определяется параметрами, которые удовлетворяют условию  $|X| = 1$ . Для ограниченных периодических систем такой четкой границы нет даже в отсутствие потерь ( $\text{Im } X = 0$ ). В зонах квазипрозрачности наблюдается  $(N - 1)$

мелкомасштабных осцилляций коэффициента отражения. Их амплитуда зависит от отражательной способности составных частей периода. Так в длинноволновой области радиальная диафрагма для  $TE_{0n}$ -волн и кольцевая для  $TM_{0n}$ -волн обладают слабой отражательной способностью вплоть до высоких значений параметра заполнения  $u \leq 0.9$  ( $|Y_p^-| \ll 1$ ). Эти же диафрагмы для волн ортогональных поляризации (соответственно, для  $TM_{0n}$  и  $TE_{0n}$ ) играют роль сильно возмущающего фактора ( $|Y_p^+| \gg 1$ ) [9]. В первом случае с ростом  $k$  амплитуда осцилляций коэффициента отражения мала и растет пропорционально  $k |\ln 0.5(1 - u)|$ , а во втором она пропорциональна  $|1 + ik \ln 0.5(1 + u)|^{-1}$  и близка к единице (рис. 2).

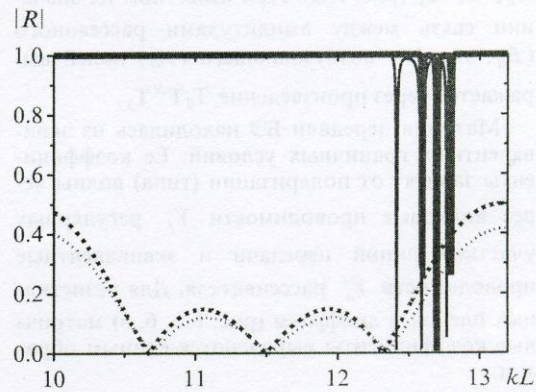


Рис. 2. Частотная зависимость модуля коэффициента отражения волновода из  $N=4$  кольцевых диафрагм для волн различных поляризации,  $\epsilon_j=1.2$ ,  $\mu_j=1$ ,  $L/l=30$ ,  $L/a=2$ ,  $a/l=15$ ,  $d/l=0.5$ :  
 ..... -  $TM_{0l}$ ,  $u=0.8$ ; ..... -  $TM_{0l}$ ,  $u=0.9$ ;  
 ——— -  $TE_{0l}$ ,  $u=0.9$ ; ——— -  $TE_{0l}$ ,  $u=0.99$

В частности, наличие потерь в бесконечной структуре, состоящей из чередующихся слоев с резистивной плёнкой (рис. 1, а), приводит к комплексному значению постоянной распространения ( $\gamma = \alpha + i\beta$ ):

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + i\beta)L &= \cos k_1 d_1 \cos k_2 d_2 - \\ &- \frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2Y_1 Y_2} \sin k_1 d_1 \sin k_2 d_2 - \\ &- i \frac{Y_\sigma}{2Y_1 Y_2} (Y_2 \sin k_1 d_1 \cos k_2 d_2 + Y_1 \cos k_1 d_1 \sin k_2 d_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Для тонких ( $d_2/L \ll 1$ ) диэлектрических слоёв БЭ с малыми потерями ( $\epsilon_2'' \ll \epsilon_2'$ ) в свободном пространстве ( $Y_\sigma = 0$ ,  $Y_2/Y_1 = \sqrt{\epsilon_2}$ ,  $k_1 = k$ )

$$\cos \alpha L = \cos kL - \frac{kd_2(1 + \epsilon_2'')}{2} \sin kL;$$

$$\beta L \cong \frac{kd_2 \epsilon_2''}{2 \sin \alpha L} \sin kL.$$

Если БЭ состоит только из слабо проводящей резистивной пленки ( $\tilde{Y}_{\sigma 1} = Y_\sigma/Y_1 \ll 1$ ,  $\epsilon_j = \mu_j = 1$ ), то из (8) следуют приближенные равенства  $\alpha L \cong kL$ ,  $\beta L \cong \tilde{Y}_{\sigma 1}/2$ .

При комплексных  $\gamma$  и  $N \gg 1$  полиномы Могина можно аппроксимировать функциями  $P_N \cong \xi^{-N}/(\xi^{-1} - \xi)$  и коэффициент отражения (6а) принимает вид:

$$R = \frac{\pm r_{01} [t_{11} - \xi \mp r_{31} t_{12}] \mp r_{31} (t_{22} - \xi) + t_{21}}{t_{11} - \xi \mp r_{31} t_{12} \pm r_{01} [t_{21} \mp r_{31} (t_{22} - \xi)]}. \quad (9)$$

Эта формула не описывает высокочастотные осцилляции коэффициента отражения и может рассматриваться как его "усредненное" значение для недиссипативных систем.

Если базовый элемент образован резистивной плёнкой и слоем идеального диэлектрика ( $Y_1/Y_2 = 1$ ,  $d_1/L = 1$ ,  $\text{Im} \epsilon_j = \text{Im} \mu_j = 0$ ), то корни характеристического уравнения МП и коэффициенты отражения равны

$$\xi = \cos k_1 L - 0.5i \tilde{Y}_{\sigma 1} (1 - \theta) \sin k_1 L,$$

$$R = \pm \frac{1 + \tilde{Y}_{\sigma 3} (1 + \theta)/2 - \tilde{Y}_{10} [\tilde{Y}_{13} - \tilde{Y}_{\sigma 1} (1 - \theta)]/2 + i \tilde{Y}_{\sigma 3} \text{ctg} k_1 L}{1 + \tilde{Y}_{\sigma 3} (1 + \theta)/2 + \tilde{Y}_{10} [\tilde{Y}_{13} - \tilde{Y}_{\sigma 1} (1 - \theta)]/2 + i \tilde{Y}_{\sigma 3} \text{ctg} k_1 L},$$

где  $\theta = \sqrt{1 + (2\tilde{Y}_{1\sigma})^2 + i4\tilde{Y}_{1\sigma} \text{ctg} k_1 L}$ , а  $\tilde{Y}_{jk} = Y_j/Y_k$  - нормированные волновые проводимости. Нетрудно заметить, что  $R$  является периодической (с периодом  $\Delta(k_1 L) = \pi$ ) функцией волнового размера  $k_1 L$  базового элемента. Максимальное отражение  $|R| = 1$  достигается при  $k_1 L = p\pi$  ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ), а минимальное - при  $k_1 L = \pi(2p - 1)/2$  и зависит как от  $Y_\sigma$ , так и от волновых проводимостей окружающих структур сред. При равенстве последних ( $Y_0 = Y_3$ )

$$R_{\min} = \pm \frac{1 - \tilde{Y}_{10}^2 + \tilde{Y}_{\sigma 0}}{1 + \tilde{Y}_{10}^2 + \tilde{Y}_{\sigma 0} \sqrt{1 + 4\tilde{Y}_{10}^2}}.$$

Отсюда следует условие полного согласования:

$$\tilde{Y}_{\sigma 0} = \tilde{Y}_{\sigma 0}^{ext} \cong \tilde{Y}_{10}^2 - 1.$$

Мощность диссипативных потерь  $W$  можно оценить по формуле  $W = 1 - |R|^2 - |\tau|^2$ . Для поглощающих покрытий на отражающем экране ( $\tau = 0$ ,  $\tilde{Y}_{j3} = 0$ ,  $\tilde{Y}_{12} = 1$ ) минимальный уровень КО и максимальное поглощение энергии равны соответственно

$$R_{\min} = \pm \left\{ 2 - \left[ \sqrt{\tilde{Y}_{\sigma 0}^2 + 4\tilde{Y}_{10}^2} - \tilde{Y}_{\sigma 0} \right] \right\} / \left\{ 2 + \left[ \sqrt{\tilde{Y}_{\sigma 0}^2 + 4\tilde{Y}_{10}^2} - \tilde{Y}_{\sigma 0} \right] \right\};$$

$$W_{\max} = 1 - R_{\min}^2.$$

Здесь так же, как и в полупрозрачных структурах, условием полного согласования является равенство  $\tilde{Y}_{\sigma 0} = \tilde{Y}_{\sigma 0}^{ext}$ , а мощность потерь определяется зависимостями

$$W \cong \begin{cases} 1 - r_{01}^2 (1 - 2\tilde{Y}_{\sigma 0} / \tilde{Y}_{\sigma 0}^{ext}), & \tilde{Y}_{\sigma 0} < \tilde{Y}_{\sigma 0}^{ext}; \\ 4\tilde{Y}_{10}^2 / \tilde{Y}_{\sigma 0}, & \tilde{Y}_{\sigma 0} \gg \tilde{Y}_{\sigma 0}^{ext}. \end{cases}$$

В общем случае коэффициенты рассеяния и поглощения являются многопараметрическими функциями с экстремальными значениями. Это создаёт основу для положительного решения задач оптимизации эксплуатационных характеристик радиопоглощающих покрытий в широком частотном диапазоне.

Понятно, что коэффициент отражения для многоэлементных ( $N \gg 1$ ) поглощающих периодических структур слабо зависит от нагрузки  $Y_3$  и практически совпадает со значением для полубесконечной ( $N = \infty$ ) структуры с таким же базовым элементом. Особенность последней заключается в том, что коэффициенты отражения на входе любых повторяющихся элементов  $R_0 = B_m/A_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \infty$ ) равны и с учетом границы с входным волноведущим каналом связаны с коэффициентом отражения  $R$  всей структуры операторными соотношениями [16]:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ R A_0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_0 \begin{pmatrix} A_1 \\ R_0 A_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_m \\ R_0 A_m \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} A_{m+1} \\ R_0 A_{m+1} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, \infty. \quad (10)$$

Отсюда следует:

$$R_0^\pm = \left\{ (t_{22} - t_{11}) \pm \sqrt{(t_{11} + t_{22})^2 - 4} \right\} / 2t_{12}, \quad (11)$$

$$R = (R_0 \pm r_{01}) / (1 \pm r_{01} R_0). \quad (12)$$

Из двух значений коэффициента отражения ( $R^+$ ,  $R^-$ ) выбирается то, у которого модуль не превышает единицы, а знак “+” или “-” в (12) по-прежнему определяется поляризацией падающего поля. Унимодулярность МП БЭ и очевидное равенство  $R_0^+ R_0^- = -t_{21}/t_{12}$  позволяют записать коэффициент отражения через корни соответствующего характеристического уравнения ( $\xi^\pm$ ):  $R_0^+ = -(\xi - t_{11})/t_{12}$ ,  $R_0^- = -t_{21}(\xi - t_{11}) = -(\xi^{-1} - t_{22})/t_{12}$ . Подстановка их в (12) дает формулу для коэффициента отражения любой полубесконечной периодической структуры. Она формально совпадает с (9), если в последней считать  $r_{31} = 0$ .

Представляет интерес сравнение коэффициентов отражения  $N$ -элементной и полубесконечной периодической структур на границах зон записания ( $X = \pm 1$ ). Если  $r_{01} = 0$ , то  $R = R_0^+ = R_0^- = (t_{11} - 1)/t_{12}$ ,  $\xi^+ = \xi^{-1} = 1$ ,  $P_N(1) = N$ . В отсутствие потерь матричные коэффициенты  $t_{11}$  и  $t_{12}$  равны соответственно комплексно сопряженным значениям  $t_{22}$  и  $t_{21}$  ( $|t_{11}|^2 - |t_{12}|^2 = 1$ ,  $\text{Re } t_{11} = \text{Re } t_{22} = \pm 1$ ). Отсюда следует, что коэффициент отражения от полубесконечной периодической структуры равен единице ( $|R| = 1$ ), а в случае  $N$ -элементной структуры (6) с  $\tilde{Y}_{31} = 1$  он зависит от количества БЭ и их прозрачности  $\tau_0 = 1/|t_{11}|$ :

$$|R_N|^2 = (N \text{Im } t_{11})^2 / [1 + (N \text{Im } t_{11})^2],$$

где  $(\text{Im } t_{11})^2 = (1 - \tau_0^2) / \tau_0^2$ . Если  $\tau_0^2 < 0.5$ , то отражающие свойства полубесконечных и  $N$ -элементных структур в зонах записания практически совпадают уже при  $N > 3$ . Для систем с высокой прозрачностью БЭ ( $\tau_0^2 > 0.5$ ) совпадение наблюдается при большом  $N$ . Такая тенденция сохраняется и для диссипативных систем в произвольном окружении, однако “размытие” границ в этом случае увеличивается за счет потерь (рис. 3).

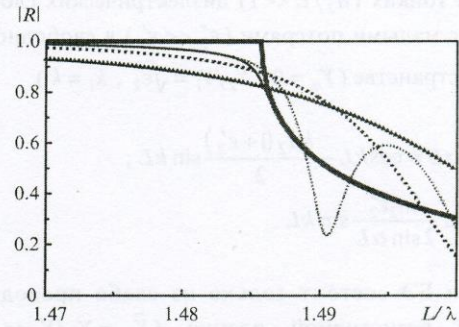


Рис. 3. Поведение модуля коэффициента отражения  $N$ -элементной и полубесконечной ( $N = \infty$ ) слоистых периодических структур вблизи высокочастотной границы одной из зон записания,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\epsilon_0 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ ,  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\mu = 1$ ,  $d_1/L = 0.1$ :

..... -  $N=7$ ,  $Y_\sigma = 0.01$ ; ..... -  $N=10$ ,  $Y_\sigma = 0.01$ ;  
 ..... -  $N=20$ ,  $Y_\sigma = 0.01$ ; \_\_\_\_\_ -  $N=\infty$ ,  $Y_\sigma = 0.01$ ;  
 \_\_\_\_\_ -  $N=\infty$ ,  $Y_\sigma = 0$

#### IV. Резонансные явления

Для определения условий резонансной прозрачности ( $R = 0$ ) требуется в общем случае численное решение многопараметрического трансцендентного уравнения, которое получается приравниванием нулю числителя формулы (6а). Коэффициент отражения от полубесконечных и многоэлементных поглощающих систем с одинаковыми БЭ в отражательном ( $|r_{31}| = 1$ ) и проходном режимах практически совпадают. Поэтому поиск параметров, обеспечивающих максимальное согласование ( $|R| \ll 1$ ) при высоком уровне поглощения, ограничивается зонами квазипрозрачности ( $|X| < 1$ ).

Если волновые проводимости первого регулярного участка и входного волноведущего канала совпадают ( $Y_1 = Y_0$ ,  $r_{01} = 0$ ), трансцендентные уравнения упрощаются. Для отражательной ( $|r_{31}| = 1$ ) и проходной ( $r_{31} = 0$ ) системы они принимают вид:

$$t_{21} = \frac{\pm P_N(X)}{t_{22} P_N(X) - P_{N-1}(X)}, \quad t_{21} P_N(X) = 0. \quad (13)$$

Для проходных структур в отсутствие диссипации энергии ( $\text{Im } X = 0$ ) существуют два независимых набора резонансных параметров: уравнение  $t_{21} = 0$  описывает низкооборотные резонансы БЭ, а  $P_N(X) = 0$  отвечает за резонансы в зоне квазипрозрачности. Любое из указанных

уравнений определяет один из наборов резонансных параметров и в отражательных структурах. Их решение приближенно верно и для систем с потерями: в этом случае оно соответствует максимальному согласованию.

Ширина зон прозрачности ( $|X| = |\operatorname{Re} t_{11}| \leq 1$ ) бесконечного диафрагмированного волновода зависит от ее положения на частотной шкале  $\gamma_0^s L$ . В частности, зона прозрачности волновода с кольцевыми диафрагмами в однородном окружении ( $Y_1^s = Y_2^s = Y_0^s$ ,  $\gamma_1^s = \gamma_2^s = \gamma_0^s$ ) для  $TM_{0n}$ - и  $TE_{0n}$ -волн определяется неравенствами:

$$U_- \geq \frac{1}{\gamma_0^e L} \begin{cases} -\operatorname{ctg}(\gamma_0^e L/2), \\ \operatorname{tg}(\gamma_0^e L/2); \end{cases}$$

$$U_+ \leq \gamma_0^h L \begin{cases} \operatorname{tg}(\gamma_0^h L/2), \\ -\operatorname{ctg}(\gamma_0^h L/2); \end{cases}$$

где первая строка относится к области  $2\pi p < \gamma_0^s L \leq \pi(2p+1)$ , а вторая – к области  $\pi(2p+1) \leq \gamma_0^s L \leq 2\pi(p+1)$ ,  $p=0, 1, 2 \dots$ ;  
 $U_- = [\ln 0.5(1-u)] / (2\pi L/l)$ ;  
 $U_+ = -(2\pi L/l) / [\ln 0.5(1+u)]$ .

Низкочастотные границы зон прозрачности  $TM_{0n}$ -волн ( $e$ ), кроме первой ( $p=0$ ), совпадают с высокочастотными для  $TE_{0n}$ -волн ( $h$ ) и на шкале  $\gamma_0^s L$  равны  $\pi p$  ( $p=1, 2 \dots$ ). Положение других границ зависит от параметров структуры. С ростом частоты (номера зоны  $p$ ) ширина зон для  $TM_{0n}$ -волн уменьшается, а для  $TE_{0n}$ -волн – увеличивается. Здесь решающую роль играют прозрачность диафрагмы и ее зависимость от частоты. В частности, при  $|u| \leq 0.9$  и  $L/l \geq 10$  кольцевая диафрагма обладает высокой прозрачностью для  $TM_{0n}$ -волн ( $|U_-| \ll 1$ ). Такая сильная электродинамическая связь между регулярными участками волновода приводит к широким зонам прозрачности ( $\delta(\gamma_0^e L) \leq \pi$ ). Следствием слабой связи по  $TE_{0n}$ -волнам ( $|U_+| \gg 1$ ) являются весьма узкие зоны прозрачности ( $\delta(\gamma_0^h L) / \pi \ll 1$ ), которые расположены вблизи значений  $\gamma_0^h L = \pi p$  (рис. 2).

Учитывая, что корень полинома Могина ( $P_N(X_v)=0$ ) равен  $X_v = \cos(v\pi/N)$  ( $v=1, 2, \dots, (N-1)$ ), для волновода с кольцевыми диафрагмами из

(7) и (13) получаем уравнения относительно резонансного значения  $\gamma_0^s L$ :

$$\cos \frac{v\pi}{N} = \begin{cases} \cos \gamma_0^h L + (U_+ / \gamma_0^h L) \sin \gamma_0^h L, & (14a) \\ \text{для } TE_{0n} \text{ - волн,} \\ \cos \gamma_0^e L + (U_- \gamma_0^e L) \sin \gamma_0^e L, & (14b) \\ \text{для } TM_{0n} \text{ - волн.} \end{cases}$$

Поскольку зоны квазипрозрачности для  $TE_{0n}$ -волн ( $s=h$ ) узкие и известны их высокочастотные границы  $\gamma_0^h L = \pi p$  ( $p=1, 2, \dots$ ), то представление правой части уравнения (14a) рядом Тейлора даст в линейном приближении с высокой точностью резонансные значения  $(\gamma_0^h L)_v^p$  в четных ( $p=2k$ ) и нечетных ( $p=2k-1$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) зонах квазипрозрачности:

$$\begin{cases} (\gamma_0^h L)_v^{(2k)} \\ (\gamma_0^h L)_v^{(2k-1)} \end{cases} = \begin{cases} 2k\pi \\ \pi(2k-1) \end{cases} \times \left( 1 - \frac{|\ln 0.5(1+u)|}{(\pi L/l)} \left\{ \frac{\sin^2(v\pi/2N)}{\cos^2(v\pi/2N)} \right\} \right). \quad (15)$$

Отсюда легко оценить ширину  $p$ -ой зоны квазипрозрачности  $\delta(\gamma_0^h L)^p$  как разность между первым ( $v=1$ ) и последним ( $v=N-1$ ) резонансным значением  $(\gamma_0^h L)_v^p$ :

$$\delta(\gamma_0^h L)^{(p)} = p |\ln 0.5(1+u)| (l/L) \cos(\pi/N).$$

Отмеченное ранее увеличение ширины с частотой ( $p \sim (\gamma_0^h L) / \pi$ ) происходит тем сильнее, чем выше прозрачность решетки (чем меньше  $u$ ). Зависимость  $\delta(\gamma_0^h L)^{(p)}$  от числа элементов практически исчезает, когда  $N \geq 5$ . Так как в каждой зоне число резонансов равно  $(N-1)$ , то их добротность не меньше, чем

$$Q = \frac{(\gamma_0^h L)_N^{(p)}}{\delta(\gamma_0^h L)^p} (N-1) = \frac{\pi [1 - |\ln 0.5(1+u)| (l/2\pi L)]}{|\ln 0.5(1+u)| \cos(\pi/N)} (N-1) \frac{L}{l}. \quad (16)$$

Здесь для оценки выбрано значение корня  $v=N/2$ , соответствующее резонансу в середине зон прозрачности многоэлементной ( $N \gg 1$ ) структуры. Согласно (16), добротность возрас-

тает с увеличением общей длины диафрагмированного волновода ( $\sim (N-1)L/l$ ) и параметра заполнения диафрагм  $u$ . Указанное поведение резонансных частот и добротности отражает природу интерференционных явлений в квазиоткрытых системах.

Высокая точность такого аналитического представления решения уравнения (14а) сохраняется и для других систем с узкими зонами прозрачности. К ним относятся ограниченные периодические структуры, образованные решетками из проводящих брусков прямоугольного поперечного сечения в свободном пространстве ( $\epsilon_r = \mu_r = 1$ ) (рис. 1, г). Их особенность состоит в том, что связь между прилегающими к решетке областями является резонансной. Это приводит к сверхдобротной резонансной прозрачности системы с высокой степенью селекции на дискретных частотах при углах падения  $\varphi_0$  (обобщенный эффект Малюжинца [12]) (рис. 4).

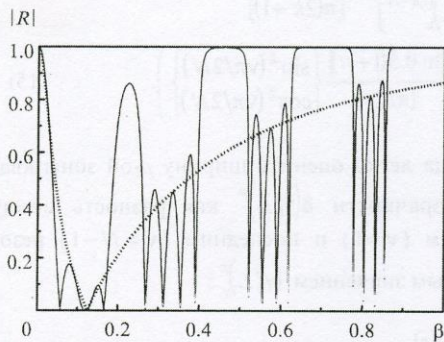


Рис. 4. Угловые зависимости ( $\beta = \cos \varphi_0$ ) модуля коэффициента отражения от  $N$  решеток из проводящих брусков в свободном пространстве:  $\theta=0.15$ ,  $\kappa=0.2$ ,  $\delta=0.3$ ,  $L/l=10$ : ..... -  $N=1$ ; — -  $N=5$

Аналогично можно получить приближенное аналитическое решение уравнений (14б) ( $TM_{0n}$ -волна, кольцевая диафрагма):

$$(\gamma_0^c L)_v^{(p)} = \left[ \pi(2p+1)/2 - (-1)^p \cos(v\pi/N) \right] / (1 - U_-). \quad (17)$$

Поскольку в данном случае зоны квазипрозрачности широкие, то (17) дает большую степень погрешности, чем (15). Тем не менее и это решение эффективно при качественном анализе резонансных режимов и динамики амплитудно-частотных характеристик полей рассеяния.

Отмеченные закономерности имеют место и для волновода с БЭ, содержащими радиальные диафрагмы (рис. 1, б). Характеристики рассеяния  $TE_{0n}$ - и  $TM_{0n}$ -волн в этом волноводе практически совпадают с соответствующими характеристиками рассеяния  $TM_{0n}$ - и  $TE_{0n}$ -волн в волноводе с БЭ в виде кольцевых диафрагм.

### V. Собственные режимы структуры

Анализ собственных режимов системы [17,18] позволяет наглядно представить динамику характеристик её вынужденных колебаний. Уравнение относительно собственных комплексных частот  $\kappa_c^v = \text{Re} \kappa_c^v + i \text{Im} \kappa_c^v$  ( $v=1, 2 \dots N-1$  – номер резонанса в зоне квазипрозрачности) следует из равенства нулю знаменателя в формулах (6а) и (6б). Для диафрагмированного  $N$ -элементного волновода, когда  $Y_0^s = Y_1^s$  ( $r_{01} = 0$ ), это уравнение упрощается:

$$P_{N-1}(X)/P_N(X) = t_{11} \pm t_{31}t_{12}. \quad (18)$$

На рис. 5-8 представлены характерные зависимости собственных частот  $\kappa_c^v$  и добротности колебаний  $Q_v = \text{Re} \kappa_c^v / (2 \text{Im} \kappa_c^v)$  от  $L/l$ ,  $u$ ,  $d_1/l$  и  $\text{Im}(\epsilon_1)$  для волновода с  $N=4$  кольцевыми диафрагмами (рис. 1, в). Аналогичные зависимости имеют место и для волновода с радиальными диафрагмами, если заменить  $TE_{0n}$ - на

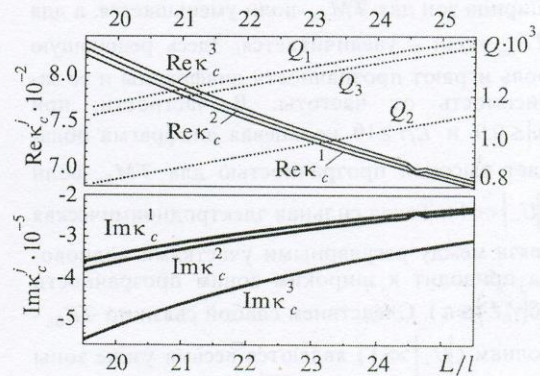


Рис. 5. Зависимости частоты  $\kappa_c^v$  и добротности  $Q_v$  собственных колебаний  $TE_{01}$ -волны в волноводе с  $N=4$  кольцевыми диафрагмами от  $L/l$ :  $\epsilon_0 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1.08$ ,  $\epsilon_1 = 1.08 + 0.005i$ ,  $\mu_j = 1$ ,  $a/l = 15$ ,  $d_1/l = 0.5$ ,  $u = 0.7$



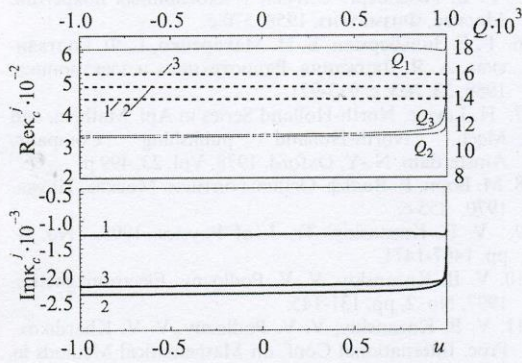


Рис. 6. Зависимости частоты  $\kappa_c^v$  и добротности  $Q_v$   $TM_{01}$ -волны в волноводе с  $N=4$  кольцевыми диафрагмами от параметра заполнения  $u$ :  $\epsilon_j = \mu_j = 1$ ,  $a/l = 15$ ,  $L/l = 30$ , 1-  $v = 1$ , 2-  $v = 2$ , 3-  $v = 3$

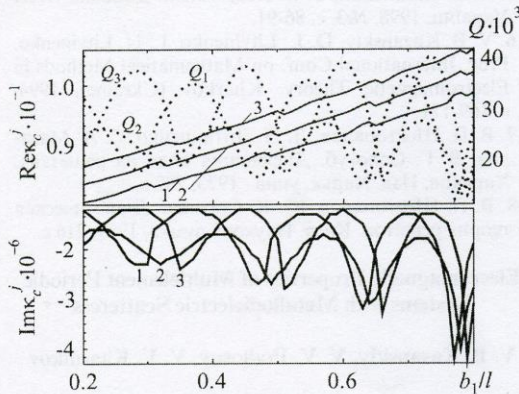


Рис. 7. Влияние относительного размера шайбы на частоту  $\kappa_c^v$  и добротность  $Q_v$   $TE_{01}$ -волны в волноводе с  $N=4$  кольцевыми диафрагмами:  $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon_3 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 2$ ,  $\mu_j = 1$ ,  $L/l = 30$ ,  $a/l = 15$ ,  $u = 0.5$ , 1-  $v = 1$ , 2-  $v = 2$ , 3-  $v = 3$

$TM_{0n}$ -, а  $TM_{0n}$ - на  $TE_{0n}$ -волны. С ростом частоты ( $\sim L/\lambda$ ) разреженность спектра  $Re(\kappa_c^{\max} - \kappa_c^{\min})$ , абсолютные значения  $Re \kappa_c^v$  и  $|\text{Im} \kappa_c^v|$  уменьшаются, а добротность увеличивается (рис. 5). Собственные колебания  $TE_{0n}$ -волн имеют намного большую добротность, чем  $TM_{0n}$ -волны. Если в первом случае добротность резонансов вблизи границ зоны ( $v=1$ ,  $v=3$ ) больше, чем в середине ( $v=2$ ),  $Q_1 \equiv Q_3 \geq Q_2$ , то во втором случае  $Q_1 > Q_3 \geq Q_2$ .

Такое поведение  $\kappa_c^v$  и  $Q$  характерно для квазиоткрытых структур, где отсутствуют четкие границы области формирования волновых процессов. Только при большой длине структуры ( $L/l \gg 1$ ) и её слабой связи с подводящими регулярными волноводами ( $u > 0.99$  для  $TM_{0n}$ -волн или  $u > -0.99$  для  $TE_{0n}$ -волн) можно считать, что механизм формирования свободных колебаний практически полностью определяется взаимодействием встречных волн. В этом случае относительный уровень "излучающей" мощности небольшой, мнимая часть собственной частоты мала по модулю. Вдали от границ структуры амплитуда полей в подводящих волноводах полностью зависит от мнимых частей их постоянных распространения  $\text{Im} \gamma_j(\kappa)$  ( $j = 0, 3$ ).

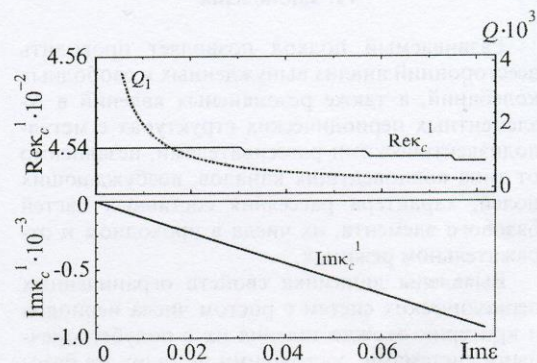


Рис. 8. Влияние диссипативных потерь диэлектрической вставки на частоту  $\kappa_c^1$  и добротность  $Q_1$  собственных колебаний  $TE_{01}$ -волны в волноводе с  $N=4$  кольцевыми диафрагмами:  $\epsilon_0 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ ,  $\epsilon_1 = 2 + i \text{Im} \epsilon$ ,  $\mu_j = 1$ ,  $d/L = 0.5$ ,  $L/l = 30$ ,  $a/l = 15$ ,  $u = 0$

По зависимостям  $\kappa_c(u)$  и  $Q(u)$  от параметра заполнения кольцевой диафрагмы можно оценить влияние связи на спектр собственных колебаний. Их особенность – весьма малое значение  $\text{Im} \kappa_c$  для  $TE_{0n}$ -волн. В этом случае собственные колебания исследуемой системы и соответствующего ей резонатора близки друг к другу. Спектральные линии  $Re \kappa_c^v(u)$  для  $TE_{0n}$ -волн в каждой зоне квазипрозрачности незначительно отличаются только при значении  $u \leq -0.5$ , а при большом параметре заполнения ( $u > 0$ ) практически совпадают. Для  $TM_{0n}$ -волн спектр более разрежен,  $\kappa_c^v$  незначительно увеличиваются в диапазоне  $|u| \leq 0.95$ .

а для  $TE_{0n}$ -волн – уменьшаются (рис. 6). Последнее обстоятельство обусловлено разным характером эквивалентной реактивности кольцевой диафрагмы для  $TE_{0n}$ - и  $TM_{0n}$ -колебаний. Как и следовало ожидать,  $\operatorname{Re} \kappa_c(u)$  близки к резонансным частотам вынужденных колебаний (15) и (17).

Наличие кусочно-однородных областей ( $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ ) между диафрагмами сложным образом меняет условия “излучения” во внешние волноведущие каналы. В зависимостях радиационных потерь ( $\operatorname{Im} \kappa_c$ ) и добротности  $Q$  от размера неоднородности появляются экстремальные значения (рис. 7). С ростом диссипативных потерь  $|\operatorname{Im} \kappa_c|$  увеличивается, добротность уменьшается, а  $\operatorname{Re} \kappa_c$  изменяется слабо (рис. 8).

### VI. Заключение

Развиваемый подход позволяет проводить всесторонний анализ вынужденных и свободных колебаний, а также резонансных явлений в  $N$ -элементных периодических структурах с металлodieлектрическими рассеивателями, независимо от типа волноведущих каналов, возбуждающих полей, характера рассеяния составных частей базового элемента, их числа в проходном и отражательном режимах.

Выявлены динамика свойств ограниченных периодических систем с ростом числа периодов и критерии отождествления их с полубесконечными системами, состоящими из таких же базовых элементов. Получены асимптотические выражения для полей рассеяния диссипативных структур. Рассмотренные модели отражают свойства реальных устройств, а именно: поглощающих слоистых покрытий, многосвязных волноводных частотных и модовых фильтров, а также угловых дискриминаторов в свободном пространстве. Поэтому описанные пути оптимизации эксплуатационных характеристик поглощающих покрытий, способы достижения высокого уровня поляризованной и частотной селекции, условия формирования сверхдобротных колебаний представляют практическую значимость.

### Литература

1. Ch. Elachi. IEEE Proc. 1976, **64**, No. 12, pp. 1666-1698.
2. Р. А. Силин, В. П. Сазонов. Замедляющие системы. Москва, Сов. радио, 1966, 620 с.
3. Б. Ф. Алимин. Зарубежная радиоэлектроника. 1989, №2, с. 73-82.
4. Д. Л. Литвиненко, Л. Н. Литвиненко, С. Л. Про-свирнин. Радиопизика и радиоастрономия, 1997, **2**, №4, с. 485-491.
5. Г. В. Розенберг. Оптика тонкослойных покрытий. Москва, Физматгиз, 1958, 570 с.
6. Г. Е. Зильберман, Б. И. Макаренко, Г. Ф. Голтвян-ская, А. Я. Даржания. Радиотехника и электроника. 1988, **33**, №5, с. 915-921.
7. H. Levine. North-Holland Series in Apl. Mathem. and Mech. North-Holland publishing Company. Amsterdam, N.-Y, Oxford, 1978, Vol. 23, 499 p.
8. М. Борн, Е. Вольф. Основы оптики. Москва, Наука, 1970, 855 с.
9. V. B. Kazanskiy. Tr. J. of Physics. 1995, No. 11, pp. 1467-1471.
10. V. B. Kazanskiy, V. V. Podlozny. Electromagnetics. 1997, No. 2, pp. 131-145.
11. V. B. Kazanskiy, V. V. Podlozny, V. V. Khardikov. Proc. International Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Kharkov (Ukraine), 1998, June 2-5, V. 1, pp. 396-398.
12. V. B. Kazanskiy, V. V. Podlozny. Microwave and Optical Technology Letters. 1999, **21**, No. 4, pp. 299-304.
13. H. Contopanagos, N. Alexopoulos, E. Yablonovitch. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 1998, **MMT-46**, No. 9, pp. 1310-1312.
14. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Москва, Наука, 1967, 575 с.
15. В. Б. Казанский, В. В. Подлозный. Доповіді НАН України. 1998, №3, с. 86-91.
16. V. B. Kazanskiy, D. L. Litvinenko, L. N. Litvinenko. Proc. International Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Kharkov (Ukraine), 1994, с. 169-171.
17. В. П. Шестопа́лов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Мас-лов, В. Г. Сологуб. Дифракция волн на решетках. Харьков, Изд. Харьк. унив., 1973, 287 с.
18. В. П. Шестопа́лов, Ю. К. Сиренко. Динамическая теория решёток. Киев, Наукова думка, 1989, 216 с.

### Electromagnetic Properties of Multielement Periodic Systems with Metallodielectric Scatterers

V. B. Kasanskiy, V. V. Podlosny, V. V. Khardikov

This paper presents the solution of the problem on diffraction of plane and symmetric waveguide waves by the finite periodic structure based on complex metallodielectric scatterers in a single-mode regime. The method developed does not depend on the number of the elements, types of the transmission lines (free space or waveguide) and character of a load.

The absorbing cover based on alternating magnetodielectric layers with resistive films, ladder-type frequency and mode filter with reactive diagrams, spatial and frequency discriminator based on a set of the identical gratings of metal bars are considered.

The features of wave process in the finite periodic system (super-Q resonances, generalized Maluzhinetz effect) and ways of the optimisation of the characteristics of practical devices are shown. The approximate solutions, comparative analysis of the properties of the finite and infinite structures with identical unite cells, conditions of super-Q resonances, behavior of complex frequencies and Q-factor of natural oscillations are presented.