Радиофизика и радиоастрономия, 1999, т. 4, №2, стр.145-152

УДК 517.522

К теории колебаний в нестационарной случайной среде

А. А. Янцевич [1], Н. Н. Ясницкая [2], М. М. Бендерский [3], В. И. Баранов [4]

[1] *Харьковский Гуманитарный Институт Народной Украинской Академии Украина, 61000, Харьков, ул. Лермонтовская, 27*

[2] *Харьковский Государственный Политехнический Университет 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21*

[3] *Ben Gurion University of the Negev Beer Sheva 84105 Israel*

[4] *Харьковский Государственный Экономический Университет 61059, Харьков, пр. Ленина, 9а*

Статья поступила в редакцию 20 июня 2000 г.

В работе построена теория волновых процессов в нестационарной случайной марковской среде с непосредственным использованием специфических функциональных свойств линейных дифференциальных стохастических уравнений. Указан класс марковских сред, в которых рассматриваемые волновые процессы описываются уравнением линейного стохастического осциллятора. Исследована устойчивость (в среднеквадратичном) электромагнитных колебаний в резонаторе со случайным плазменным заполнением.

В роботі побудовано теорію хвильових процесів у нестаціонарному випадковому марківському середовищі з безпосереднім використанням специфічних функціональних властивостей лінійних стохастичних диференційних рівнянь. Вказано клас марківських середовищ, в яких розглянуті хвильові процеси описуються рівнянням лінійного стохастичного осцилятора. Досліджено стійкість (у середньому квадратичному) електромагнітних коливань у резонаторі з випадковим плазмовим заповненням.

В работе изучается класс волновых процессов в нестационарной случайной марковской среде с произвольным временным масштабом изменения ее свойств. При достаточно общих предположениях о характере вероятностных свойств среды получены замкнутые линейные уравнения с переменными коэффициентами для одноточечных моментов любого порядка (математическое ожидание, дисперсия и т. д.) случайного волнового поля. Указан класс нестационарных марковских сред, в которых рассматриваемые волновые процессы могут быть описаны уравнением линейного стохастического осциллятора. Соответствующий вероятностный анализ может быть сведен при этом к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Изложенный подход используется для исследования стохастической устойчивости (в среднеквадратичном) электромагнитных модовых колебаний в резонаторе с нестационарным случайным заполнением.

1. В теории распространения волн в случайных средах [1], в теории колебаний механических и электрических систем с распределенными случайными параметрами [2] и др. достаточно часто возникают дифференциальные уравнения вида

$$\varepsilon_0 \frac{d^2 u}{d t^2} + \omega^2(t) u = 0, \tag{1.1}$$

или

$$\frac{d^2}{d t^2}\left[\varepsilon(t) u\right] + \omega_0^2 u = 0, \tag{1.2}$$

где ε_0 и ω_0 – постоянные величины, а $\omega(t)$ и $\varepsilon(t)$ – случайные функции времени.

В настоящее время имеется достаточно полный статистический анализ уравнения (1.1) [1-4], а уравнение (1.2) практически не изучено. Это связано с тем, что в уравнении (1.2) содержится слагаемое с первой производной неизвестной функции, приводящее к появлению затухания или усиления волнового процесса (в зависимости от знака $d\varepsilon / dt$). Такой волновой процесс уже является нестационарным в статистическом смысле, так как корреляционная функция его зависит не только от длительности интервала наблюдения, но и от момента времени, с которого наблюдение начинается. Математический аппарат исследования таких процессов в настоящее время еще только развивается. Кроме того, исследование уравнения (1.2) требует более обширной информации о вероятностных свойствах среды, например, о совместных плотностях вероятности ε, $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}^2\varepsilon/\mathrm{d}t^2$. Уравнение (1.2) требует для своего исследования и более "тонких" математических приемов, т. к. его решение не является аналитическим функционалом соответствующего случайного коэффициента $\varepsilon(t)$.

Вместе с тем, уравнение (1.2) является линейным однородным уравнением (хотя и стохастическим), и это позволяет при использовании методов функционального анализа провести хотя и ограниченный, но тем не менее практически важный вероятностный его анализ, основанный на знании одноточечных вероятностных моментов его решения. Именно такому анализу уравнения (1.2) и посвящена настоящая работа. В п. 2 кратко изложена суть используемого метода, дан алгоритм построения вероятностных моментов различного порядка в случае достаточно общей системы линейных уравнений и построены уравнения для первого и второго моментов в задаче о резонаторе со случайным заполнением в условиях, когда изменение свойств среды описывается уравнением (1.2). В п. 4 исследована устойчивость в среднеквадратичном электромагнитных модовых колебаний в резонаторе, заполненном средой, свойства которой описываются нестационарным двузначным случайным процессом. Физической моделью такой среды может служить, например, плазменная среда в широком диапазоне условий ее существования.

2. Рассмотрим задачу Коши для линейного векторного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \hat{A}[\xi(t)]\eta, \quad \eta = y \quad \text{при } t=0. \qquad (2.1)$$

Здесь $\eta(t)$ – вектор-столбец со значениями из R_n; $\hat{A}$ – матрица порядка n^2; $\xi(t)=\{\xi_k(t)\}$, $k=1, 2,..., m$ – стационарный марковский случайный процесс со значениями из R_m.

При достаточно общих предположениях можно считать, что $\xi(t)$ в свою очередь определяется как решение задачи Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений со случайной силой $Q(t)$ [5-8]

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \hat{a}(\xi) + \hat{b}(\xi)Q(t), \quad \xi = x \quad \text{при } t=0, \qquad (2.2)$$

где $\hat{a}(\xi)$ – векторная функция со значениями из R_m, $\hat{b}(\xi)$ – линейный оператор из R_m, $Q(t)$ – белый шум. Дифференцирование в (2.2) понимается в смысле Ито или Стратоновича [7,8].

Уравнение (2.1) само по себе описывает не марковский процесс, т. к. вектор $\xi(t)$ определяющий "динамику" матрицы $\hat{A}$, в любой момент времени t зависит от своих значений на всем предыдущем интервале времени $[0,t)$. Однако если ввести в рассмотрение расширенный вектор $\varsigma\{\eta,\xi\}$ со значениями в R_{n+m} и рассматривать системы (2.1) и (2.2) как одну

$$\frac{\mathrm{d}\varsigma}{\mathrm{d}t} = \hat{B}(\varsigma) + \hat{P}, \qquad \varsigma = \varsigma_0 \quad \text{при } t=0, \qquad (2.3)$$

где матрицы $\hat{B}$ и $\hat{P}$ строятся по матрицам правых частей вышеупомянутых уравнений, а $\varsigma_0 = \{y, x\}$, то вектор ς будет описывать уже марковский процесс, т. к. все его компоненты будут определяться одновременно и зависеть лишь от бесконечно близкого прошедшего момента времени. Существенно однако, что вводимый таким образом марковский процесс (2.3) определяется уже нелинейным дифференциальным векторным уравнением.

Полный статистический анализ решения системы (2.3), в том числе и его компонент η, обычно проводится по известной классической схеме, состоящей из следующих этапов:

а) построение для задачи (2.3) уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК), которые описывают распределения условной плотности вероятности компонент случайного вектора ς;

б) решение их;

в) нахождение различных вероятностных характеристик процесса ς в любой момент времени.

Однако эта схема в большинстве случаев практически не реализуема. Существует лишь небольшое число ситуаций, когда уравнения ФПК могут быть решены точно [2,9]. Попытка построения с помощью уравнений ФПК различных корреляционных моментов в общем случае приводит к незамкнутой иерархической системе уравнений, в которой уравнения для моментов более низкого порядка зависят от неизвестных моментов более высокого порядка. Аналогичная ситуация возникает и при попытке построения уравнений для вероятностных моментов исходя непосредственно из уравнения (2.3).

Возвращаясь к нашей задаче (2.1), следует отметить, что она не является задачей общего типа, а достаточно специфична, а именно линейна и однородна. Это позволяет, во-первых, упростить вид уравнений ФПК, во-вторых, дает возможность использовать специфику математической конструкции вероятностных моментов вектора η как функционалов различного порядка (линейных, билинейных и т. д.), связанную с линейностью функционального пространства R_n. В силу сказанного уравнения ФПК, описывающие процесс "случайного блуждания" вектора ς в расширенном пространстве R_{n+m}, имеют достаточно простой вид в той части, которая относится к блужданию искомого вектора η в пространстве R_n. Этого недостаточно для нахождения точного решения уравнений, однако уже позволяет "расцепить" систему уравнений для неупреждающих (одноточечных) вероятностных моментов вектора η (математическое ожидание, дисперсия и т. д.). При этом для математического ожидания U любого неупреждающего функционала $\varphi(\varsigma)$,

$$U(x,y,t) \equiv M\varphi[\eta(y,t),\xi(x,t)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta,\xi) f_{n+m}(\eta,\xi;x,y,t,\tau) \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau, \qquad (2.4)$$

где f_{n+m} – условная совместная плотность распределения вероятности вектора ς, можно, исходя из первого уравнения Колмогорова, получить следующую задачу [7]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \hat{Q}U, \quad U = \varphi(x,y) \quad \text{при } t = 0, \qquad (2.5)$$

$$\hat{Q} = \hat{L} + \left\langle \hat{A}(x)y, \vec{\nabla}_y \right\rangle. \qquad (2.6)$$

Здесь <...> означает скалярное произведение в R_n, $\hat{A}(x)$ – матрица системы (2.1), $\hat{L}$ – кинетический оператор

$$\hat{L} f = \langle \hat{a}, \vec{\nabla} f \rangle + \frac{1}{2} Sp\left[\nabla^2 f, \hat{b}\hat{b}^*\right], \qquad (2.7)$$

определяющий "блуждание" вектора ξ под действием силы $\hat{Q}$ из (2.2).

Уравнение (2.5) есть однородное линейное (с переменными коэффициентами) уравнение в частных производных.

Используем теперь свойства линейности и однородности исходной задачи (2.1). Её оператор

$$\hat{J} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \hat{A}$$

является линейным и в условиях теоремы существования и единственности (с вероятностью, равной единице) – ограниченным. Пространство допустимых векторов R_n является при этом n-мерным линейным эвклидовым пространством с метрикой, определяемой обычным скалярным произведением

$$<ab> = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

Представим решение задачи (2.1) в виде

$$\eta(t,y) = \hat{F}(t,0)y, \qquad (2.8)$$

где $\hat{F}(t,0)$ – т. н. переходная матрица [10], удовлетворяющая следующему уравнению:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{F}}{\mathrm{d}t} = \hat{A}(\xi,t)\hat{F}, \quad \hat{F} = \hat{I} \quad \text{при } t=0.$$

Матрица $\hat{F}$ является одновременно и функционалом от ξ.

Введем теперь в рассмотрение функционал

$$<\eta, a> = <\hat{F} y, a>,$$

равный скалярному произведению вектора η на произвольный детерминированный вектор a из R_n. Математическое ожидание этого функционала является линейным функционалом от y и по теореме Рисса [11] может быть представлено в виде

$$M <\eta, a> = <V(t,x,a), y>, \qquad (2.9)$$

где $V(t,x,a)$ – некоторая детерминированная вектор-функция.

Подставляя (2.9) в (2.5) и учитывая, что вектор y произвольный, получим, что вектор-функция V в функционале (2.9) есть решение следующей задачи:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\hat{A}^T V+\hat{L}V,\quad V=a \text{ при } t=0, \tag{2.10}$$

где $\hat{A}^T$ – транспонированная матрица $\hat{A}$ из (2.1).

Таким образом, нахождение вектора $V(t,x,a)$ сводится к линейной (с переменными пространственными коэффициентами) системе уравнений в пространстве меньшей размерности, чем у системы (2.5), а именно только в пространстве R_m.

Решив задачу Коши (2.10), найдя $V(t,x,a)$ и построив скалярное произведение $<V,y>$, можно вычислить математическое ожидание

$$M\eta(t)=\frac{\partial}{\partial a}<V(t,x,a),y>. \tag{2.11}$$

Для нахождения моментов более высокого порядка поступаем аналогичным образом.

Например, для нахождения элементов матрицы момента второго порядка необходимо рассмотреть выражение $\Omega=M<\eta,\hat{B}\eta>$, где $\hat{B}$ – произвольная детерминированная матрица. Эта величина уже будет представлять собой билинейный функционал от y и может быть представлен в виде [11]

$$\Omega=<y_i y_k C_{ik}(t,x)>. \tag{2.12}$$

Для матрицы C_{ik} при этом получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial t}=\hat{L}\hat{C}+\hat{A}^T\hat{C}+\hat{C}\hat{A}^T,\quad \hat{C}=\hat{B} \text{ при } t=0. \tag{2.13}$$

Найдя матрицу C из (2.13) и составив функционал (2.12), элементы матрицы второго момента найдем дифференцированием:

$$M\eta_i\eta_k=\frac{\partial\Omega}{\partial b_{ik}}.$$

Этот процесс может быть продолжен и дальше аналогичным образом. Наиболее существенным здесь является замкнутость и линейность получаемых уравнений для моментов любого порядка.

При вычислении моментов высоких порядков удобно использовать кронекеровское умножение матриц [10]. Вводя в рассмотрение одностолбцовые матрицы $\eta^{[\alpha]}$, элементами которых являются произведения координат вектора η по α множителей в каждом, можно показать, что матрицы $\eta^{[\alpha]}$ также удовлетворяют уравнениям вида (2.1):

$$\frac{d\eta^{[\alpha]}}{dt}=\hat{A}^{[\alpha]}\eta^{[\alpha]}$$

где

$$A^{[\alpha]}=\underbrace{\left(\hat{A}\times\hat{I}\times\cdots\times\hat{I}\right)}_{\alpha}+\underbrace{\left(\hat{I}\times\hat{A}\times\cdots\times\hat{I}\right)}_{\alpha}+\cdots+\underbrace{\left(\hat{I}\times\hat{I}\times\cdots\times\hat{A}\right)}_{\alpha},$$

$\hat{I}$ - единичная матрица.

Матрица $A^{[\alpha]}$, таким образом, представляет собой сумму α слагаемых, каждое из которых есть кронекеровское произведение α множителей.

Заметим далее, что если интересоваться только уравнением для математического ожидания $\hat{H}(t,x)=M\ \hat{F}(t,0)$ переходной матрицы $\hat{F}(t,0)$ из (2.8), то его можно построить непосредственно, учитывая, что $\hat{F}(t,0)$ – функционал мультипликативный. Действительно,

$$\hat{H}(t+\Delta t,x)=M\,\hat{F}(t+\Delta t,0)=$$

$$=M\left\{\hat{F}(t+\Delta t,\Delta t)\,\hat{F}(t+\Delta t,0)\right\}=$$

$$=M\left\{\hat{F}(t+\Delta t,\Delta t)[\hat{I}+\hat{A}(x)\Delta t]+o(\Delta t)\right\}=$$

$$=M\,\hat{F}(t+\Delta t,\Delta t)[\hat{I}+\hat{A}(x)\Delta t]+o(\Delta t).$$

Отсюда

$$\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}=\hat{L}\hat{H}+\hat{H}\hat{A},\quad \hat{H}=\hat{I}\quad \text{при } t=0,$$

где $\hat{L}\equiv\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{M\,\hat{F}(t+\Delta t,\Delta t)-\hat{F}(t,0)}{\Delta t}$ – кинетический оператор (2.7).

Полученные уравнения могут быть упрощены и сведены к уравнениям с постоянными коэффициентами за счет некоторых предположений относительно свойств случайной среды. Упрощение уравнений возможно, если $\xi(t)$:

а) двузначный марковский процесс;
б) процесс Кубо-Андерсена;
в) процесс типа "кенгуру";
г) белый шум;
д) нормальный процесс;
е) процесс Релея;
ж) процесс Пирсона;
з) процесс Пуассона.

Из этого списка видно, что упрощение при вычислении моментов возможно для достаточно обширного класса практически важных задач.

3. Для иллюстрации получаемых при этом уравнений с постоянными коэффициентами рассмотрим уравнение (2.1) с линейной матрицей

$$\hat{A}[\xi(t)] = \hat{A}_1 + \hat{A}_2\,\xi(t), \tag{3.1}$$

где $\xi(t)$ – двузначный скалярный однородный марковский случайный процесс со значениями $\xi_i = \pm 1$ и матрицей вероятностей переходов [6]

$$\hat{p}(t) = \exp(\hat{S}\,t), \quad \hat{S} = \begin{pmatrix} -\nu & \nu \\ \nu & -\nu \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Положительный параметр ν в инфинитизимальной матрице $\hat{S}$ имеет смысл частоты изменения значений ξ. Данный случайный процесс можно рассматривать как решение стохастического дифференциального уравнения (2.2), но связанного уже не с винеровской мерой, как (2.2), а с пуассоновской: $\mathrm{d}\xi = -2\xi\mathrm{d}\chi$, где $\mathrm{d}\chi$ принимает значение $\nu\mathrm{d}t$ с вероятностью единица и значение $(1-\nu\mathrm{d}t)$ с вероятностью нуль. В случае этого процесса и матрицы (3.1) необходимые уравнения для средних величин можно получить и непосредственно из уравнения (2.1). Действительно, обозначая

$$Z_1 = M\eta, \quad Z_2 = M[\eta\xi],$$

и учитывая, что

$$M\left[\xi(t)\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\right] = M\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\xi\eta)\right] - M\left[\eta\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\mathrm{d}Z_2}{\mathrm{d}t} + 2\nu Z_2,$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}Z_1}{\mathrm{d}t} = \hat{A}_1 Z_1 + \hat{A}_2 Z_2, \\ &\frac{\mathrm{d}Z_2}{\mathrm{d}t} + 2\nu Z_2 = \hat{A}_1 Z_2 + \hat{A}_2 Z_1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Эти уравнения будут использованы ниже при рассмотрении физической задачи.

4. В качестве приложения развитой выше теории рассмотрим задачу об устойчивости в среднеквадратичном модовых колебаний резонатора с равновесной плазмой. Пусть имеется резонатор с идеально проводящими стенками, заполненный нестационарной случайной диэлектрической средой без поглощения. Отыскивая решение уравнений Максвелла для электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей в виде разложения по собственным функциям $\vec{E}_s$ и $\vec{H}_s$ краевой задачи для самосопряженной части оператора Максвелла [12]

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \sum_{-\infty}^{\infty} e_s(t)\vec{E}_s(\vec{r}), \quad \vec{H}(t,\vec{r}) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_s(t)\vec{H}_s(\vec{r}),$$

для определения коэффициентов разложения e_s и h_s придем к следующей системе уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\varepsilon(t)e_s(t)\} + ick_s h_s = 0, \quad \frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}t} + ick_s e_s = 0. \tag{4.1}$$

Здесь $\varepsilon(t)$ – диэлектрическая проницаемость среды, k_s – собственное волновое число s-ой моды колебаний, c – скорость света. Начальные условия к системе (4.1) будут задаваться далее конкретно в зависимости от рассматриваемой задачи. Вектор-функции $\vec{E}_s$ и $\vec{H}_s$ являются решением следующих спектральных задач:

$$\begin{aligned} &(\Delta + k_s^{\,2})\vec{E}_s = 0, \quad \left[\vec{n}\times\vec{E}_s\right]_L = 0, \quad \vec{H}_s = -\frac{i}{k_s}\operatorname{rot}\vec{E}_s, \\ &(\Delta + k^2{}_s)\vec{H}_s = 0, \quad (\vec{n}\vec{H}_s)_L = 0, \quad \vec{E}_s = \frac{i}{k_s}\operatorname{rot}\vec{H}_s. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Краевые условия в (4.2) записаны для поверхности резонатора L.

Из (4.1) находим следующее уравнение для определения e_s:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\{\varepsilon(t)e_s\} + \omega^2{}_s e_s = 0, \quad \omega_s^{\,2} = k_s^{\,2}c^2 \tag{4.3}$$

Это уравнение вида (1.2), оно будет рассмотрено ниже для конкретного закона изменения случайной функции $\varepsilon(t)$.

Будем далее считать, что $\varepsilon(t)$ имеет вид

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0[1+\alpha(t)], \tag{4.4}$$

где изменение со временем $\alpha(t)$ описывается для простоты случайным марковским процессом с двумя состояниями α_1 и α_2 ($|\alpha_{1,2}|<1$) и постоянным временем изменения состояний τ. По терминологии [13] такие значения α соответствуют как слабым, так и сильным флуктуациям диэлектрической проницаемости среды. При $|\alpha_1|=|\alpha_2|$ таким процессом можно моделировать случайное гармоническое колебание и довести анализ задачи до конца без громоздких вычислений при сохранении правильной качественной картины рассматриваемого явления. Будем в дальнейшем считать, что полость резонатора заполнена бесстолкновительной плазмой (нейтральной [14] или заряженной [15]) с концентрацией электронов, испытывающей флуктуации $\tilde{n}$ около среднего значения n_0. При этом ε_0 и $\alpha(t)$ в законе (4.4) имеют следующий вид:

$$\varepsilon_0=1-\frac{n_0}{n_c},\ \alpha(t)=(1-\varepsilon_0)\frac{\tilde{n}}{n_0}, \tag{4.5}$$

где $n_c=m\omega^2/4\pi e^2$ – критическая концентрация [14], e и m – заряд и масса электрона. Предполагается, что частота колебаний поля ω много больше частоты столкновений частиц между собой и со стенками резонатора.

Характер флуктуаций плотности бесстолкновительной изотропной равновесной плазмы существенно зависит от параметра $\beta=k^2v^2{}_T/\omega^2{}_p$, где k – волновое число флуктуации, v_T – тепловая скорость электронов, ω_p – плазменная электронная частота [16]. При значениях $\beta\ge 2$ в частотном спектре флуктуаций присутствует лишь одна мода с частотой $\omega\approx\omega_p$. Эту случайную моду можно моделировать двузначным марковским процессом со временем изменения состояний $\tau=2\pi/\omega_p$. Аналогичная ситуация возможна и в неизотермической плазме с магнитным полем и без него, в неравновесной плазме, в плазме со столкновениями. Отличие от изотропной плазмы состоит лишь в том, что роль плазменной моды здесь играет другая мода, характерная для рассматриваемой ситуации [17].

Эта ситуация будет аналогична рассмотренной в п. 3, если определить значения случайного процесса $\xi(t)$ как $\xi(t)=\alpha_i/|\alpha_i|$, $i=1,2$, а параметр ν в матрице (3.2) выбрать равным ω_p. Вводя теперь вектор η с компонентами

$$\eta_1(t)=e_s\varepsilon(t),\qquad \eta_2(t)=\frac{d\eta_1}{dt}, \tag{4.6}$$

приведем уравнение (4.3) для электрического поля в резонаторе к векторному уравнению

$$\frac{d\eta}{dt}=\left[A_1+A_2\xi(t)\right]\eta, \tag{4.7}$$

где $\hat{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -q & 0\end{pmatrix}$, $\hat{A}_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \gamma & 0\end{pmatrix}$,

$q=\omega_s{}^2\left[1-\frac{1}{2}(p_1{}^2+p_2{}^2)\right]$, $p_k=\frac{\alpha_k}{1+\alpha_k}$, $k=1,2$,

$\gamma=\omega_s^2(p_1-p_2)$.

С целью получения уравнений для вторых моментов вектора $\eta(t)$ введем новый вектор $\eta^{[2]}\{\eta_1{}^2,\eta_1\eta_2,\eta_2{}^2\}$. Можно показать, что он также будет определяться уравнением вида (2.1) с матрицей

$$\frac{d\eta^{[2]}}{dt}=\left[\hat{C}+\hat{D}\xi(t)\right]\eta^{[2]}, \tag{4.8}$$

где

$$\hat{C}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -q & 0 & 1\\ 0 & -2q & 0\end{pmatrix},\ \hat{D}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \gamma & 0 & 0\\ 0 & 2\gamma & 0\end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Для математических ожиданий

$$U=\langle\eta^{[2]}\rangle,\quad V=\langle\xi(t)\eta^{[2]}\rangle$$

получим при этом систему уравнений, аналогичную (3.3):

$$\frac{dU}{dt}=\hat{C}U+\hat{D}V,$$
$$\frac{dV}{dt}=(\hat{C}-2\nu\hat{I})V+\hat{D}U. \tag{4.10}$$

Используя уравнения (4.7)-(4.10), можно исследовать устойчивость резонаторных колебаний в различной статистической постановке .

Исходными для исследования устойчивости в среднеквадратичном являются уравнения вторых моментов (4.10). Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} \hat{C}-\lambda\hat{I} & \hat{D} \\ \hat{D} & \hat{C}-(\lambda+2\nu)\hat{I} \end{bmatrix}=0$$

или после раскрытия определителя

$$Q(\lambda)Q(\lambda+2\nu)=16\gamma^2(\lambda+\nu), \quad Q(\lambda)=\lambda(\lambda^2+4q). \tag{4.11}$$

Поскольку

$$q=\frac{\omega_s^{\,2}}{1-\alpha^2}>0, \qquad \gamma=\frac{2\alpha\omega_s^{\,2}}{1-\alpha^2}\geq 0\,, \qquad \nu=\omega_p>0\,,$$

то (4.11) представляет собой уравнение шестой степени с вещественными коэффициентами. При $\alpha\neq 0$ оно имеет один положительный простой корень, возрастающий с ростом γ и ν. Кроме того, все элементы фундаментальной матрицы системы (4.10) имеют характеристический показатель, совпадающий с этим корнем [18,19]. Это означает, что рассматриваемая система неустойчива в среднеквадратичном при любом выборе параметров ν и γ. При малых значениях γ из (4.11) для вещественного положительного корня получаем следующее выражение:

$$\lambda=\gamma^2\lambda_1\,, \quad \lambda_1=\frac{\nu}{q(q+\nu^2)}. \tag{4.12}$$

Из (4.12) видно, что наиболее опасным с точки зрения среднеквадратичной устойчивости является значение $\nu=q^{1/2}$, что соответствует следующему соотношению между плазменной ω_p и резонаторной ω_s частотами: $\omega_p=\omega_s/\sqrt{1-\alpha^2}$, т. е. когда плазменная частота несколько превышает собственную частоту резонатора. В случае, когда

$$\lim_{\gamma,\nu\to\infty}\frac{\gamma^2}{\nu}=l\,(l<\infty)\,,$$

$\xi(t)$ переходит в "белый шум", а (4.11) переходит в уравнение

$$\lambda(\lambda^2+4q)=l/2\,.$$

Если при $\gamma=0$ система (4.8) неустойчива, то при $\gamma\neq 0$ характеристический показатель ее только увеличится. Это означает, что рассматриваемая система не может быть застабилизирована за счет выбора параметров параметров l и q.

Литература

1. В. И. Кляцкин. Стохастические уравнения и волны в случайных неоднородных средах. Москва, Наука, 1980, 336 с.
2. Г. Л. Стратанович. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. Москва, Сов. радио, 1961, 558 с.
3. В. Е. Шапиро, В. М. Логинов. Динамические системы при случайных воздействиях. Новосибирск, Наука, 1983, 160 с.
4. Н. Г. Ван Кампен. Стохастические процессы в физике и химии. Москва, Высшая школа, 1990, 376 с.
5. В. И. Тихонов, М. Л. Миронов. Марковские процессы. Москва, Сов. радио, 1977, 488 с.
6. В. А. Казаков. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. Москва, Сов. радио, 1973, 231 с.
7. Р. З. Хасьминский. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва, Наука, 1969, 367 с.
8. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. Москва, Наука, 1965, 654 с.
9. А. Н. Колмогоров. Об аналитических методах в теории вероятностей. Успехи мат. наук, 1938, **5**, с. 5-41.
10. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Москва, ГИТТЛ, 492 с.
11. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Москва, Наука, 1966, 544 с.
12. О. А. Третьяков. Радиотехника и электроника. 1986, **31**, в. 6, с. 1071.
13. А. Исимару. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. Т. 2. Москва, Мир, 1981, 318 с.
14. В. Е. Голант. Сверхвысокочастотные методы исследования плазмы. ФМ, Москва, 1968, 328 с.
15. Р. Девидсон. Теория заряженной плазмы. Мир, Москва, 1978, 216 с.
16. А. Г. Ситенко. Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме. Наукова думка, Киев, 1977, 248 с.
17. Электродинамика плазмы. Под ред. А. И. Ахиезера. Наука, Москва, 1974, 720 с.
18. М. М. Бендерский. Диф. уравнения. 1969, **5**, в. 10, с. 1885-1888.
19. М. М. Бендерский, Л. А. Пастур. ЖЭТФ. 1969, **57**, в. 1171, с. 284-294.

To the Theory of Oscillations in Unsteady Random Medium

A. A. Yantsevich, N. N. Yasnitskaya, M. M. Benderskyi, V. E. Baranov

The theory of oscillation processes in unsteady random Markovian medium is built. It directly uses specific functional properties of linear stochastical differential equations. The class of Markovian media is indicated in which the processes considered are described by the stochastical oscillator equation. The stability of electromagnetic oscillations in the resonator nonuniform with termal plasma is investigated.