

Стационарные неравновесные состояния частиц максвелловского типа с потоками по спектру

Г. Ф. Коняхин, А. Ю. Мелашенко, З. Ю. Литвина, В. Е. Новиков¹⁾, С. С. Моисеев²⁾

*Харьковский военный университет
61043, Харьков, пл. Свободы, 6*

*¹⁾Лаборатория Электродинамических Исследований ЭНРАН
03057, Киев, ул. Довженко, 14*

*²⁾Институт Космических Исследований РАН
117810, Москва, ул. Профсоюзная, 220*

Показано, что при выбранном характере взаимодействия частиц кинетическое уравнение Больцмана сводится к дифференциальному уравнению или к замкнутой цепочке моментных уравнений.

Показано, що при вибраному характері взаємодії частинок кінетичне рівняння Больцмана зводиться до диференційного рівняння або до замкнутого ланцюжка моментних рівнянь.

1. Введение

Реальные физические системы частиц и квазичастиц часто находятся в состояниях, далеких от равновесия. Изучение физических явлений, происходящих под действием притока частиц или энергии в систему, невозможно без знания неравновесных распределений частиц. Особенно важным в таких системах является изучение стационарных распределений, которые служат аналогами равновесных. Во многих случаях можно считать рассматриваемые системы однородными в пространстве, а источники локализованными в энергетическом пространстве [1-8]. В частности, это справедливо в задаче о полупроводнике под воздействием электромагнитного поля с энергией кванта порядка ширины запрещенной зоны [7] или под воздействием постоянных процессов ионизации при распространении альфа-частиц в веществе [6].

Нарушение равновесия обычно связывается с наличием источников и стоков, определяющих стационарное состояние системы. Присутствие источников и стоков может вести к формированию столь сильного неравновесного состояния, что приближение локального равновесия оказывается недостаточным.

Например, в теории слабой турбулентности присутствие источника и стока ведет к появлению в области между ними универсальных спектров турбулентности, которые зависят только от интегральных характеристик источника и стока [1,2].

Существование распределения частиц по энергиям, подобного спектрам турбулентно-

сти, было показано впервые в [3]. В этой работе найдено, что степенные функции распределения с показателями степени, связанными со степенью потенциала взаимодействия, являются точными решениями уравнения Больцмана и соответствуют постоянному потоку частиц (или энергии) в пространстве энергий. В указанных выше работах (как и во многих других) исследовались неравновесные распределения частиц в системах, обладающих свойством локальности распределений в инерционном интервале.

Представляет интерес изучить примеры, в которых может быть явно прослежен эффект воздействия источника на отклонение функции распределения от равновесия и в случаях с отсутствием локальной сходимости.

Кроме того, мы надеемся, что влияние источников и стоков на основные макроскопические параметры системы будет слабо зависеть от межмолекулярного потенциала (по крайней мере для "жестких потенциалов").

Точные решения уравнений Больцмана для пространственно однородного газа, в случае специальной модели столкновения (газ максвелловских молекул), впервые были получены в [9] и изучались в литературе очень интенсивно [10].

Можно также строить математические модели для интеграла столкновения таким способом, что кинетические уравнения, с одной стороны, становятся более поддающимися аналитическому анализу и, с другой стороны, все еще сохраняют некоторые из существенных свойств (присущих полным нелинейным уравнениям) типа законов сохранения и H-теоремы.

К такому типу взаимодействия сводятся, например, физически интересные случаи рассеяния заряженных частиц в условиях статической экранировки в полупроводниках, процессы обмена колебательными квантами при столкновениях молекул и т. д. (см., например, [10]). Обратим внимание на то, что методы, изложенные в работе [10], были обобщены на широкий класс подобных межмолекулярных потенциалов [12].

В настоящей работе исследуются особенности стационарных неравновесных распределений частиц в системах с источниками и стоками в случае взаимодействия максвелловского типа. Эти открытые системы изучены на основе нелинейного кинетического уравнения Больцмана с локализованными в пространстве энергий источниками и стоками двух типов (распределенными и локализованными в пространстве энергий). Внимание концентрируется на эволюции их состояний, но не во времени, а при изменении параметров неравновесной системы.

2. Основные уравнения

Для описания кинетики исследуемых систем используем пространственно однородное нелинейное уравнение Больцмана с источниками и стоками частиц в следующей форме:

$$\frac{\partial f(\vec{v})}{\partial t} = I_{st}\{f, f\} + \Psi(v), \quad (1)$$

$$I_{st}\{f, f\} = \int d\vec{v}_1 d\Omega g \sigma(g, \theta) (f f'_1 - f f_1).$$

В (1) мы использовали стандартные системы обозначений $f = f(\vec{v}, t)$, $f_1 = f(\vec{v}_1, t)$, $f' = f(\vec{v}', t)$, $f'_1 = f(\vec{v}'_1, t)$ для бинарного взаимодействия и рассеяния частиц с такими скоростями: $(\vec{v}, \vec{v}'_1) \leftrightarrow (\vec{v}', \vec{v}_1)$; $g = |\vec{v} - \vec{v}_1|$ – относительная скорость, которая при столкновении поворачивается на угол θ ; $\sigma(g, \theta)$ – сечение рассеяния, зависящее от вида межмолекулярного взаимодействия; $d\Omega$ – элемент телесного угла; $I_{st}\{f, f\}$ – оператор, описывающий столкновение частиц, $\Psi(v)$ – выражение, которое представляет источники и стоки в пространстве скоростей. Для взаимодействия максвелловского типа $g\sigma(g, \theta) \approx \alpha(\cos\theta) \approx const$.

Поскольку далее изучаются изотропные и однородные по пространству состояния, удобно сделать замену переменной: $x = \frac{v^2}{2}$, $F(x) = 4\pi\sqrt{2x} f(\sqrt{2x})$ (здесь и далее v – ско-

рость частицы, нормированная на среднюю скорость частиц v_{0l} в начальном состоянии).

В настоящей статье мы рассматриваем важный класс источников – источники, локализованные в пространстве энергий. Для этой модели источников мы использовали следующее выражение:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_i - \Delta_i \text{ или } x \geq x_i + \Delta_i, \\ Q \frac{1}{2\Delta_i}, & x_i - \Delta_i < x < x_i + \Delta_i. \end{cases} \quad (2)$$

Когда $\Delta_i \rightarrow 0$, выражение (2) упрощается и $D(x) = Q\delta(x - x_i)$. Например, такой тип источников используется при исследовании процессов ионизации в газе. Стоки часто задаются в форме $-\frac{1}{\tau(x)} F(x)$. Воспользовавшись этими

моделями, запишем выражение, которое описывает источники и стоки в виде:

$$\Psi(x) = D(x) - \frac{1}{\tau(x)} F(x). \quad (3)$$

Кинетическое уравнение (1) для изотропной функции распределения энергии в неравновесной и пространственно однородной физической системе удобно формально представить в виде уравнения непрерывности в пространстве энергий (направление интегрирования выбрано в соответствии с положительностью потока при “движении” от источника к стоку в направлении возрастания энергии):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \Pi\{F, F, x\} + \Psi(x), \quad (4)$$

$$\Pi\{F, F, x\} = -\int_0^x dx' I_{st}\{F(x'), F(x')\}.$$

В данном исследовании будут рассмотрены два предельных случая зависимости характерного времени поглощения частиц в стоке $\tau(x)$ от энергии:

1) полностью распределенный сток (τ -сток):

$$\frac{1}{\tau(x)} = \frac{1}{\tau} = const;$$

2) полностью сосредоточенный сток:

$$\frac{1}{\tau(x)} = \frac{1}{\tau_s} \delta(x - x_s),$$

где x_s – значение энергии, вблизи которого локализован сток, а τ_s – характерное время поглощения частиц в этом стоке.

Рассмотрим общие закономерности, присущие стационарным неравновесным распределениям частиц.

3. Стационарные неравновесные состояния частиц

Для анализа неравновесных состояний газа максвелловских молекул удобно воспользоваться интегральными преобразованиями, введенными в [9,10]:

$$\Phi(y) = \hat{R}\{F(x)\} = \int_0^\infty dx {}_0F_1\left(\frac{3}{2}, -xy\right)F(x), \tag{5}$$

$$F(x) = \hat{R}^{-1}\{\Phi(y)\} = \frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^\infty dy {}_0F_1\left(\frac{3}{2}, -xy\right)\sqrt{xy}\Phi(y),$$

где ${}_pF_q$ – обобщенная гипергеометрическая функция, ${}_0F_1\left(\frac{3}{2}, -xy\right) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \sin(2\sqrt{xy})$, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Как обычно, $\Phi(y,t)$ является производящей функцией для моментов (это свойство прямо следует из определения):

$$\Phi(y,t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} M_n(t) y^n, \\ M_n(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(n+3)} \int_0^\infty F(x,t) x^n dx. \tag{6}$$

Стационарные неравновесные состояния определяются уравнением, которое следует из

$$(4) \text{ и имеет вид } \Pi\{F, F, x\} = \int_0^x dx' \Psi(x').$$

Зависимость потока частиц в пространстве энергий от x определяется видом источников и стоков, а также видом стационарной функции распределения. Для выбранной модели в случае τ -стока

$$\Pi\{F, F, x\} = Q_i \theta(x - x_i) - \frac{1}{\tau} \int_0^x dx' F(x').$$

Интегральное преобразование (5) приводит кинетическое уравнение к интегральному уравнению для $\Phi(y,t)$:

$$\frac{\partial \Phi(y,t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \left\{ \Phi\left(\frac{1+\mu}{2}y\right) \Phi\left(\frac{1-\mu}{2}y\right) \right\} = -M_{0st} \Phi(y,t) + \Psi_R(y,t) \tag{7}$$

$$\Psi_R(y) = \hat{R}\{\psi(x)\}$$

или в форме свертки

$$\frac{\partial \Phi(y,t)}{\partial t} - \frac{1}{y} \int_0^y d\xi \Phi(\xi) \Phi(y-\xi) = -M_{0st} \Phi(y,t) + \Psi_R(y,t),$$

где M_{0st} – стационарное значение нулевого момента.

Это интегральное уравнение имеет ряд замечательных особенностей, которые и позволяют использовать его для получения точных решений. Прежде всего, к уравнению (7), записанному в форме свертки, можно применить преобразование Лапласа

$$\hat{L}_z\{\Phi(y)\} \equiv G(z) = \int_0^\infty dy e^{-zy} \Phi(y,t) \text{ и свести его к}$$

дифференциальному уравнению, имеющему для стационарных состояний вид уравнения Риккати:

$$M_{0st} \frac{\partial G}{\partial z} + G^2 + \psi(z) = 0, \tag{8}$$

$$\psi(z) = \hat{L}_z\{\psi(y)\}.$$

С другой стороны, так как $\Phi(y,t)$ является производящей функцией для моментов функции распределения, то легко получить цепочку уравнений эволюции для любых высших нормализованных моментов, подставляя выражение для $\Phi(y,t)$ через моменты функции распределения (6) в интегральное уравнение (7):

$$M_{0st}^{-1} \frac{db_n}{dt} = -b_0 b_n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n b_k b_{n-k} + \\ + Q \frac{a_n}{M_{0st}^2} - \frac{1}{\tau M_{0st}} b_n, \tag{9} \\ b_k = \frac{M_k}{M_{0st} T_0^k}, \quad T_0 = \frac{M_{1st}}{M_{0st}} = \frac{2}{3} x_i;$$

$$\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(n+3)} \int_0^\infty D(x)x^n dx =$$

$$= Qa_n = Qa_{n\delta} \frac{(1+\delta_i)^{n+1} - (1-\delta_i)^{n+1}}{2\delta_i(n+1)}, \quad (10)$$

$$\delta_i = \frac{\Delta_i}{x_i}, \quad a_{n\delta} = \frac{x_i^n}{T_0^n} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(n+3)}.$$

В этих уравнениях Qa_n являются моментами источника конечной ширины, а $Qa_{n\delta_n}$ являются моментами дельтаобразного источника, т. е. моментами источника с шириной $\delta_i \rightarrow 0$. M_{0st} , M_{1st} – стационарные значения соответствующих моментов. Полученная таким образом цепочка уравнений оказывается замкнутой.

4. Стационарные неравновесные состояния для локализованного источника и τ -стока. Моменты функции распределения

Уравнения для первых низших моментов M_0 и M_1 имеют очень простую форму из-за законов сохранения $\frac{d}{dt}M_0 = \int_0^\infty dx \chi \psi(x)$, $\frac{d}{dt}M_1 = \frac{2}{3} \int_0^\infty dx x \chi \psi(x)$.

Как показано в работе [11], из этих уравнений следует, что их стационарные решения возможны либо в случае перекрытия областей действия источника и стока, либо в случае нескольких локализованных источников и стоков (их количество должно быть больше двух). Отметим, что условия согласования следуют также из уравнения (8), а именно, замена

$$G(z) = M_{0st} \frac{u'(z)}{u}$$

приводит уравнение Риккати к линейному уравнению $u''(z) + U(z)u = 0$, где потенциал $U(z) = \frac{\Psi(z)}{M_{0st}^2}$.

Поскольку разложение $G(z)$ по z (также как и разложение $\Phi(y,t)$ по y) имеет своими коэффициентами моменты, условие существования аналитического решения уравнения в виде ряда эквивалентно существованию всех моментов. Легко видеть, что условие отсутствия особых точек уравнения, т. е. условие отсутствия двух первых членов разложения, эквивалентно условию согласования.

В простейшем случае локализованных источников и стоков должно быть три. Существуют два простейших варианта их расположения: источник – сток – источник; сток – источник – сток.

Для источника конечной ширины и τ -стока легко получить стационарные значения для

M_0 и M_1 . Из законов сохранения следует, что $M_{0st} = Q\tau$, $M_{1st} = \frac{2}{3} x_i Q\tau$. Определим эффективную неравновесную температуру стационарного состояния как 2/3 от средней энергии частиц – $T_0 = \frac{M_{1st}}{M_{0st}} = \frac{2}{3} x_i$.

В случае дельтаобразного источника выше моменты функции распределения в стационарном неравновесном состоянии могут быть получены из системы рекуррентных соотношений:

$$b_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} + \frac{n+1}{n-1} \epsilon a_n,$$

$$1 + \frac{n+1}{n-1} \epsilon$$

(11)

$$\epsilon = \frac{1}{Q\tau^2}, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 1$$

Из (11) видно, что стационарное неравновесное состояние открытой системы (для взаимодействия максвелловского типа) полностью описывается параметром неравновесности ϵ . При $\epsilon \rightarrow 0$ получаем известное выражение для равновесной системы максвелловых молекул [9,10], а при больших ϵ – предельно неравновесное стационарное состояние.

На рис. 1 показаны первые 26 моментов при нескольких значениях ϵ . Видно, что при увеличении ϵ моменты b_n уменьшаются.

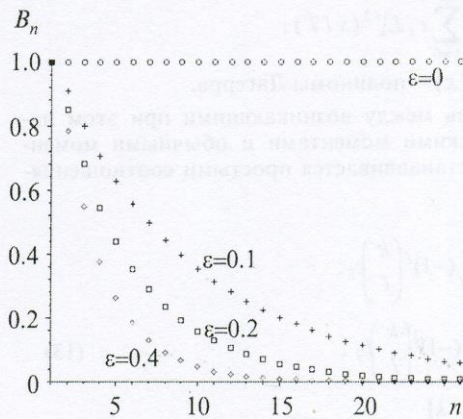


Рис. 1. Первые 26 моментов при $\epsilon = 0$, $\epsilon = 0.1$, $\epsilon = 0.2$, $\epsilon = 0.4$. Сток распределен в пространстве энергии

Все моменты $k < n$ могут быть оценены для произвольного большого n . Ясно, что существ-

вует бесконечное разнообразие функций, чьи моменты, начиная с $n+1$ момента, различаются, и однозначное восстановление функции распределения $F(x)$ невозможно. Тем не менее, существуют различные процедуры построения последовательности приближений $F_n(x)$ к искомой функции распределения при заданных первых n моментах (проблема моментов)

$$\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(n+3)} \int_0^\infty F_n(x, l) x^n dx = M_n.$$

С ростом n эта последовательность приближений, конечно, должна сходиться к истинному распределению $F(x)$.

5. Метод Грэда определения функции распределения по моментам

Применение обратного преобразования \hat{R}^{-1} к ряду (6) невозможно, так как интегралы для каждого отдельного члена ряда $\sim y^n$ не существуют. Чтобы \hat{R}^{-1} можно было применять к ряду, сделаем замену переменной: $\Phi_s(y) = e^{sy} \Phi(y)$. Тогда приходим к разложению по полиномам Лагерра-Сонина. Это разложение можно получить и непосредственно, воспользовавшись для определения функции распределения методом Грэда (разложение $F(x)$ в ряд по полиномам Лагерра-Сонина):

$$F(x) = F_0(x)V(x);$$

$$F_0(x) = M_0 \frac{2}{\sqrt{\pi T}} \sqrt{\frac{x}{T}} \exp\left(-\frac{x}{T}\right), \quad (12)$$

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k^{1/2}(x/T),$$

где $L_k(x)$ – полиномы Лагерра.

Связь между возникающими при этом лагеровскими моментами и обычными моментами устанавливается простыми соотношениями [4]:

$$b_k = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} c_l;$$

$$c_k = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} b_l; \quad (13)$$

$$\binom{k}{l} = \frac{k!}{l!(k-l)!},$$

где T – “неравновесная” температура.

Цепочка моментных уравнений для c_k , определяющая стационарные неравновесные со-

стояния системы максвелловских молекул, имеет такой же вид, как и цепочка уравнений для c_k , но отличается граничными условиями ($b_0 = 1, b_1 = 1$), а также заменой вклада источника в рекуррентные соотношения a_{n0} на $d_{n0} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(n+3)} L_n^{1/2}\left(\frac{x_i}{T_0}\right)$.

На рис. 2 показаны первые лагеровские моменты c_n при нескольких значениях ϵ . Видно, что при увеличении ϵ моменты с фиксированным номером увеличиваются, испытывая затухающие колебания в зависимости от номера.

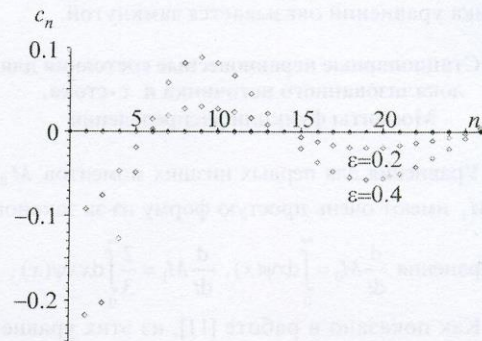


Рис. 2. Первые 26 лагеровских моментов при $\epsilon = 0, \epsilon = 0.1, \epsilon = 0.2, \epsilon = 0.4$. Сток распределен в пространстве энергии

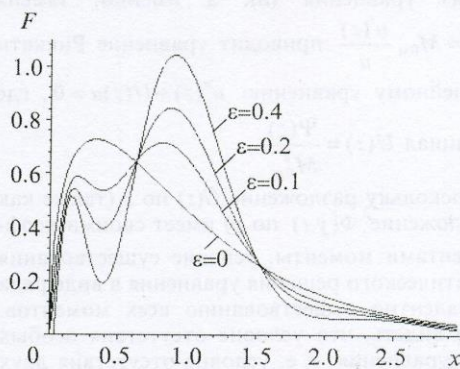


Рис. 3. Функция распределения частиц по энергиям при $\epsilon = 0, \epsilon = 0.1, \epsilon = 0.2, \epsilon = 0.4$. Сток распределен в пространстве энергий

На рис. 3 приведены графики функции распределения для различных параметров неравновесности.

6. Стационарные неравновесные состояния для локализованных источников и стоков

Проанализируем стационарные неравновесные состояния в случае локализованных источников и стоков. Здесь ситуация значительно усложняется. Рассмотрим подробнее уравнения для плотности и энергии газа в случае одного источника, находящегося в точке x_i , и двух стоков в точках x_1 и $x_2 > x_1$:

$$Q_i - Q_1 - Q_2 = 0, \quad x_i Q_i - x_1 Q_1 - x_2 Q_2 = 0. \quad (14)$$

Здесь интенсивности стоков связаны со стационарной функцией распределения: $Q_1 = \frac{1}{\tau_s} F(x_1)$,

$$Q_2 = \frac{1}{\tau_s} F(x_2).$$

Внешними параметрами в этих уравнениях являются интенсивность источника Q_i и координаты источника и стоков. Решая систему уравнений, получаем:

$$F(x_1) = \frac{x_2 - x_i}{x_2 - x_1} Q_i \tau_s, \quad (15)$$

$$F(x_2) = \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} Q_i \tau_s.$$

Так как значения F должны быть положительными, в нашем случае источник и стоки расположены в следующем порядке: $x_1 < x < x_2$. Весь диапазон энергий при этом разбивается на четыре области:

1) $0 < x < x_1$, стационарная функция распределения определяется уравнением $\Pi(x) = 0$;

2) $x_1 < x < x_i$, стационарная функция распределения определяется уравнением

$$\Pi(x) = -Q_1 = -\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} Q_i;$$

3) $x_i < x < x_2$, стационарная функция распределения определяется уравнением

$$\Pi(x) = Q_i - Q_1 = \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} Q_i;$$

4) $x > x_2$, стационарная функция распределения определяется уравнением

$$\Pi(x) = Q_i - Q_1 - Q_2 = 0.$$

Таким образом, функция распределения определяется из уравнения, означающего постоянство потока в соответствующем инерционном интервале. Вблизи нуля и при больших энергиях поток равен нулю, и функция распределения имеет равновесную форму. Во втором интервале поток отрицателен и направлен в

область малых энергий. В третьем интервале поток положителен и направлен в область больших энергий. Совершая предельный переход, можно расширить один из инерционных интервалов на всю ось. Возможны два случая:

Случай А. Если $(x_1 \rightarrow 0; x_i, x_2 \rightarrow \infty)$, то почти на всей оси поток отрицателен и равен $-\frac{x_2 - x_i}{x_2 - x_1} Q_i$;

Случай В. Если $(x_1, x_i \rightarrow 0; x_2 \rightarrow \infty)$, то почти на всей оси поток положителен и равен $\frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} Q_i$.

В отличие от случая с распределенным стоком, для того чтобы из цепочки уравнений определить моменты для локализованных источников и стоков, необходимо воспользоваться выражением для функции распределения, так как она входит в уравнения состояния. Воспользовавшись условиями согласования и рекуррентными соотношениями для лагранжевских моментов, получим из соотношений (12) стационарные функции распределения и уравнения состояния. Анализ стационарных состояний требует решения сильно нелинейной задачи. Для состояний с широким инерционным интервалом этот анализ несколько упрощается благодаря возможности использования асимптотик функции распределения.

Асимптотика функции распределения. Получим асимптотику функции распределения. Использовать обычные методы для ее определения при этом довольно сложно, так как мы хотим проанализировать состояние системы для сильного отклонения от равновесия. Проанализируем дифференциальное уравнение для функции $G(z)$, используя значения интенсивностей стоков из уравнений.

Применяя интегральные преобразования (5),(6) и преобразование Лапласа для δ -образных источников и стоков, получим вклады в уравнения для $\Phi(y)$ и $G(z)$:

$$\Psi_i^\delta = Q_i {}_0F_1\left(\frac{3}{2}; -x_i y\right) = \frac{Q_i}{2\sqrt{x_i y}} \sin(2\sqrt{x_i y}), \quad (15)$$

$$\Psi_i^\delta(z) = \hat{L}_z(y \Psi_i^\delta) = Q_i \frac{1}{z^2} {}_1F_1\left(2; \frac{3}{2}; -\frac{x_i}{z}\right).$$

В дальнейшем будем рассматривать случай одного широкого инерционного интервала (случаи (А) и (В)). Функции потока в этих случаях упрощаются и имеют асимптотики: $\psi(z) = \frac{P}{z^2}$, $P = \pm Q_i$. Тогда кинетическое уравнение для $G(z)$ в инерционном ин-

тервале приобретает вид уравнения Риккати $M_{0st} \frac{\partial G}{\partial z} + G^2 + \frac{P}{z^2} = 0$, решения которого определяются соотношением:

$$G(z) = \frac{M_0}{z} \frac{c_1 s_1 z^{s_1} + c_2 s_2 z^{s_2}}{c_1 z^{s_1} + c_2 z^{s_2}}, \quad (16)$$

$$s_1 = \frac{1-v}{2}; \quad s_2 = \frac{1+v}{2};$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{4P}{M_0^2}}.$$

Здесь c_1 и c_2 произвольные константы. Разлагая $G(z)$ в обобщенный степенной ряд по $\frac{1}{z^v}$ и проводя почленное обратное преобразование Лапласа, получаем для $\Phi(y)$:

$$\Phi(y) = cM_0 s_1 + M_0(s_2 - cs_1)E_v(-y^v/c; 1), \quad (17)$$

$$E_v(x; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\mu + k \frac{1}{v})} - \text{целая функция типа}$$

Миттаг-Леффлера.

Для того, чтобы найти функцию распределения $F(x)$, необходимо совершить еще одно обратное преобразование (5).

Это преобразование удобно провести, введя предварительно новую функцию $\Phi_s(y) = e^{sy}\Phi(y)$, которая совпадает с $\Phi(y)$ при $s \rightarrow 0$. Функция $\Phi_s(y)$ удобна тем, что для нее обратное преобразование можно совершить почленно, разложив $E_v(x; 1)$ в ряд. Таким образом, получаем функцию распределения

$$F_s(x) = \frac{cM_0 s_1}{\Gamma(3/2)} \frac{\sqrt{x}}{s^{3/2}} e^{-x/s} + \frac{M_0(s_2 - cs_1)}{\Gamma^2(3/2)} \frac{\sqrt{x}}{s^{3/2}} e^{-x/s} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^n} \frac{\Gamma(vn + 3/2)}{\Gamma(vn + 1)s^{vn + 3/2}} {}_1F_1(-vn; \frac{3}{2}; \frac{x}{s}). \quad (18)$$

В этом выражении c – произвольная константа, которая должна быть определена из условия нормировки. Так как $F(x) = \lim_{s \rightarrow 0} F_s(x)$, то, воспользовавшись асимптотическим разложением вырожденной гипергеометрической функции, получаем асимптотику функции распределения в инерционном интервале в следующем виде:

$$F(x) \propto \frac{M_0(s_2 - cs_1)}{\Gamma(3/2)} \times \left(-\frac{1}{c}\right) \frac{\Gamma(v + 3/2)}{\Gamma(v + 1)\Gamma(-v)} \frac{1}{x^{v+1}} = A \frac{1}{x^{v+1}}. \quad (19)$$

Таким образом, мы получили асимптотику стационарной функции распределения в инерционных интервалах левее и правее источника. Обратим внимание, что степенной характер ее поведения в этих инерционных интервалах различный. Представляет интерес то обстоятельство, что показатель степени определяется величиной потока (и его знаком) и служит примером нового типа универсальности для стационарных неравновесных систем.

7. Термодинамические свойства систем в стационарных сильнонеравновесных условиях

Для изучения неравновесных состояний и вида функции распределения при конкретных значениях источника необходимо проанализировать соотношения между макроскопическими параметрами, вытекающими из условия стационарности состояния. Этот анализ можно провести на основе условий согласования, приведенных выше, и асимптотического представления функции распределения.

Эти условия согласования приведут к связи между такими важными величинами, как интенсивность источника и плотность частиц в системе, их средняя энергия, глубина скин-слоя, плазменная частота и т. д.

Рассмотрим случаи А и В отдельно более подробно.

Случай А. В этом случае $v = \sqrt{1 + \frac{4(x_2 - x_i)Q_i}{(x_2 - x_1)M_0^2}} > 1$.

Константа A (см. (19)) вычисляется из условия согласования в точке x_1 : $A = \frac{x_2 - x_i}{x_2 - x_1} Q_i \tau_s x_1^{v+1}$,

$\varepsilon = \frac{1}{Q\tau^2}$ – параметр неравновесности системы.

Вычислим теперь плотность частиц и энергию, учитывая то, что инерционный интервал занимает почти всю ось x , следовательно, вносит основной вклад в интегралы, их определяющие:

$$M_0 = \int_{x_1}^{x_i} dx A \frac{1}{x^{v+1}} \approx \frac{x_1}{v} \frac{x_2 - x_i}{x_2 - x_1} \frac{1}{\varepsilon \tau_s},$$

$$M_1 = \frac{2}{3} \int_{x_1}^{x_i} dx x A \frac{1}{x^{v+1}} \approx \frac{2}{3} \frac{x_1^2}{(v-1)} \frac{x_2 - x_i}{x_2 - x_1} \frac{1}{\varepsilon \tau_s}.$$

Отсюда следует, что $T = \frac{2}{3} \frac{v}{(v-1)} x_1$ и уравнение состояния имеет вид

$$M_0 = \frac{3}{2} \frac{v-1}{v^2} \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} T \frac{1}{\varepsilon \tau_s}.$$

Следует отметить, что для таких стационарных состояний параметр неравновесности не может быть произвольно большим. Ограничения следуют из условия вещественности параметра v .

Случай В. $v = \sqrt{1 - \frac{4(x_i - x_1)Q_i}{(x_2 - x_1)M_0^2}} < 1$. Константа A вычисляется из условий согласования

в точке x_2 : $A = \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} Q_i \tau_s x_2^{v+1}$. Плотность частиц и энергия вычисляются следующим образом:

$$M_0 = \int_{x_1}^{x_2} dx A \frac{1}{x^{v+1}} \approx \frac{x_2^{v+1}}{v x_1^v} \frac{1}{\varepsilon \tau_s},$$

$$M_1 = \frac{2}{3} \int_{x_1}^{x_2} dx x A \frac{1}{x^{v+1}} \approx \frac{2}{3} \frac{x_2^2}{(1-v)} \frac{1}{\varepsilon \tau_s}.$$

Из этих соотношений следует выражение для температуры $T = \frac{2}{3} \frac{v}{(1-v)} \left(\frac{x_i}{x_2} \right)^v x_2$ и уравнение состояния $M_0 = \frac{3}{2} \frac{1-v}{v^2} \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} T \frac{1}{\varepsilon \tau_s}$.

8. Обобщенный метод Грэда для решения уравнения Больцмана.

Выше для определения функции распределения при любых энергиях мы пользовались методом Грэда (разложением $F(x)$ в ряд по полиномам Лагерра). Отметим, что такое разложение представляет собой разложение по собственным функциям линеаризованного уравнения Больцмана и может быть обобщено путем замены полиномов Лагерра на вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера (см. работу Бобылева) совпадающую с разложением по полиномам Лагерра при целом p :

$$F(x) = F_0(x)(1 + V(x)),$$

$$F_0(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi T}} \sqrt{\frac{x}{T}} \exp(-x/T). \tag{20}$$

$$V(x) = \sum_{\{p\}} c_p \frac{\Gamma(p+3/2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(p+1)} {}_1F_1(-p; \frac{3}{2}; \frac{x}{T}).$$

В (20) суммирование ведется по счетному множеству индексов p ($p(n)=(n+N)v$, $N=[1/v]$, $n = 1, 2, \dots$), в общем случае не целых, и $p(n) > 1$.

Разложение (20) использовалось ранее [10] для анализа релаксации к равновесию от начального состояния со степенной асимптотикой при больших энергиях. Релаксация в этом случае достаточно мало изучена и обладает рядом интересных особенностей. Отметим, что параметр v в этом разложении произволен.

В нашем случае кажется естественным использовать подобное разложение не для анализа процессов релаксации к равновесию, а для анализа стационарных неравновесных состояний колмогоровского типа, имеющих степенные асимптотики в инерционном интервале. Вырожденные гипергеометрические функции Куммера при этом удобны тем, что могут осуществлять интерполяцию между экспоненциальной равновесной функцией в областях с нулевым потоком и степенными асимптотиками в инерционном интервале с постоянным отличным от нуля потоком.

Сравнивая разложение $F(x)$ по гипергеометрическим функциям Куммера (20) с асимптотическим разложением (18), легко видеть их близость. Однако произвольный параметр v в (20) теперь связан с потоком частиц в пространстве энергий, а произвольный ранее стремящийся к нулю параметр s теперь имеет смысл неравновесной температуры T . Поэтому мы можем для анализа сильнонеравновесных состояний воспользоваться непосредственно разложением (20).

Подставляя это разложение в уравнение для Фурье-преобразования функции распределения $\Phi(y)$, легко получить цепочку уравнений для коэффициентов разложения (куммеровских моментов функции распределения) c :

$$\frac{p(n)-1}{p(n)+1} c_{p(n)} = \frac{1}{p(n)+1} \sum_{l(k), p(n) > l(k)} c_{p(n)-l(k)} + \Psi_{p(n)}, \tag{21}$$

$$p(n) = v(N+n); N = [1/v] + 1; n = 0, 1, 2, \dots$$

Коэффициенты $\Psi_{p(n)}$ представляют собой куммеровские моменты источников и стоков. Полезно иметь в виду связь между полиномами Лагерра и функциями Куммера:

$$L_k^{1/2}(x/T) = \frac{\Gamma(k+3/2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(k+1)} {}_1F_1(-k; \frac{3}{2}; \frac{x}{T}).$$

Куммеровские моменты источника $D(x)$ (или любой другой функции) определяются из

соотношения: $\Psi_l = \int_0^\infty dx {}_1F_1(-l; \frac{3}{2}; \frac{x}{T}) D(x)$. Раз-

лагая функцию Куммера в ряд, получаем соотношение между куммеровскими моментами функции $D(x)$ и обычными моментами:

$$\Psi_l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-l)_n}{\Gamma(n+1)} \frac{a_n}{T^n}$$

На рис. 4 в качестве примера изображена функция распределения для состояния с отрицательным потоком частиц по спектру ($x_1=0.5$, $x_2=10$, $x_3=11.4$, $\epsilon=0.005$), построенная по разложению (20).

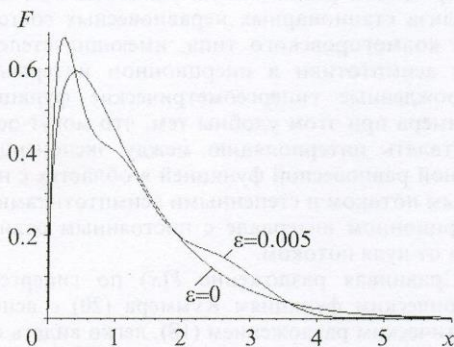


Рис. 4. Функция распределения по энергиям частиц при $\epsilon=0.005$. Стоки сосредоточены в пространстве энергий ($x_1=0.5$, $x_2=10$, $x_3=11.4$)

9. Заключение

Как правило, термодинамические соотношения для макроскопических переменных не зависят от специфического потенциала взаимодействия в системе. Мы надеемся, что макроскопические характеристики стационарных неравновесных состояний обладают такими же свойствами универсальности и точные решения кинетического уравнения Больцмана с источниками и стоками имеют фундаментальное значение для интерпретации неравновесной статистической термодинамики в открытых системах, далеких от локальных состояний равновесия.

В данной статье построена кинетическая теория для неравновесных состояний максвелловских молекул при различных параметрах

системы. В этой теории воздействия источника и стока выражены в терминах только одного параметра, называемого параметром неравновесности, и эффективной температуры неравновесного состояния. Увеличение параметра неравновесности определяет появление стационарного неравновесного состояния. Найдены асимптотики стационарной функции распределения молекул по энергиям в инерционных интервалах и получены уравнения состояния газа максвелловских молекул.

Литература

1. А. В. Кац, В. М. Конторович и др. Взаимосвязь равновесных и потоковых распределений. Сб. "Нелинейные волны", Москва, Наука, 1979.
2. С. С. Моисеев, В. Е. Новиков, А. В. Тур, В. В. Яновский. К теории слабой турбулентности колмогоровских спектров. Сб. "Нелинейные волны", Москва, Наука, 1980.
3. А. В. Кац, В. М. Конторович, С. С. Моисеев, В. Е. Новиков. Письма в ЖЭТФ. **21**, 1975, с. 13-16.
4. А. В. Кац, В. М. Конторович, С. С. Моисеев, В. Е. Новиков. ЖЭТФ. **71**, 1976, с. 177-192.
5. В. И. Карась, С. С. Моисеев, В. Е. Новиков. ЖЭТФ. **71**, 1976, с. 1421-1433.
6. В. И. Карась, С. С. Моисеев. УФЖ. **24**, 1979, с. 1724-1728.
7. С. С. Моисеев, В. Е. Новиков, В. П. Семиноженко. Физика и техника полупроводников. **14**, вып. 2, 1980, с. 402-403.
8. Я. М. Соболев. УФЖ. **35**, №1, 1990, с. 65.
9. А. В. Бобылев. ДАН СССР. **225**, №6, 1975, с. 1296-1299.
10. М. Эрнст. Точные решения нелинейного уравнения Больцмана и близких кинетических уравнений. Уравнения Больцмана. Москва, Мир, 1986.
11. В. Н. Болотов, В. Е. Новиков, А. В. Тур, В. В. Яновский. Письма в ЖТФ. **13**, вып. 21, 1987, с. 1331-1334.
12. Д. Петрина, А. Мищенко. ДАН СССР. **228**, 1988, с. 338-342.

Stationary Nonequilibrium States of Maxwell Type Particles with Spectral Currents

G. F. Konyahin, A. Yu. Melashenko,
Z. Yu. Litvina, V. E. Novikov, S. S. Moiseev

It is shown that at a chosen character of particle interaction Boltzmann kinetic equation can be reduced to a differential equation or to a closed chain of momentum equations.